

EXERCICES — CHAPITRE 17

Solution 1 –

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 2 – On a :

$$X - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-(X - 2I_3) = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 - 2X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4(I_3 - X) = 4 \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & -8 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution 3 – On a :

$$\bullet A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 48 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\bullet AB = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 44 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\bullet B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 24 & 48 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 20 & 44 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 & 172 \\ 20 & 44 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et donc

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 & 170 \\ 20 & 43 \end{pmatrix}$$

On a $A^2 + 2AB + B^2 \neq (A + B)^2$ donc $AB \neq BA$.

Solution 4 –

$$1. \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 30 & 51 \\ 36 & 62 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 24 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$3. \begin{pmatrix} 23 & 42 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 32 & 38 \\ 28 & 42 & 49 \\ 34 & 64 & 78 \end{pmatrix}$$

Solution 5 –

1. On utilise ici la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_2 - 3L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 7L_1 - 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -14 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{-14} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{7} L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Donc, la matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. On utilise ici la méthode de Gauss-Jordan :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & | & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & | & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & | & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & | & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow 9L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 18 & 18 & 0 & | & 8 & 2 & 2 \\ 0 & -9 & 0 & | & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & | & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 & | & 4 & 4 & -2 \\ 0 & -9 & 0 & | & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & | & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{18}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -9 & 0 & | & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & | & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{9}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 9 & | & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{1}{9}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Donc, la matrice B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

3. On utilise ici la méthode de Gauss-Jordan :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 11L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & -25 & -11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 6L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 6 & -18 & 0 & | & -19 & -11 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & -25 & -11 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 18L_2} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & | & 17 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & -25 & -11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{17}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{25}{6} & -\frac{11}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Donc, la matrice C est inversible et $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{25}{6} & -\frac{11}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

4. La matrice est de taille 2, on peut donc directement utiliser la formule du cours pour les matrices de taille 2. On a $ad - bc = 2 \times 1 - 3 \times (-1) = 2 + 3 = 5 \neq 0$. Donc, D est inversible et

$$D^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

5. La matrice E est diagonale, avec ses coefficients diagonaux non nuls. Donc E est inversible et :

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\frac{1}{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

6. On utilise ici la méthode de Gauss-Jordan :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & | & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 4L_1 - L_3} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & | & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & | & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & | & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & | & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1} \\ \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2} \\ \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

Donc, la matrice F est inversible et $F^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

7. On utilise ici la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow 3L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -6 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{-3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

Donc, la matrice G est inversible et $G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

8. La matrice H est diagonale, avec ses coefficients diagonaux non nuls, donc H est inversible et

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Solution 6 -

1. (a) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

(b) Supposons, par l'absurde, que A est inversible. Il existe alors une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_3$. On a alors ;

$$(AB)^3 = I_3^3 = I_3$$

Or, puisque A et B commutent, on a

$$(AB)^3 = A^3 B^3 = 0_3 \times B^3 = 0_3$$

Ainsi,

$$0_3 = I_3$$

ce qui est bien sûr absurde.

Conclusion : La matrice A n'est pas inversible.

2. (a) En développant le produit, on obtient :

$$(I - A)(I + A + A^2) = I + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I$$

(b) $I - A$ est donc inversible d'inverse $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

3. On a :

$$(I + A)(I - A + A^2) = I - A + A^2 + A - A^2 + A^3 = I$$

donc $I + A$ est inversible d'inverse $(I + A)^{-1} = I - A + A^2$.

Solution 7 -

1. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 9 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -4 \\ -3 & 7 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -4 \\ -3 & 7 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 5I_3$$

On a donc $A \times A^2 = 5I_3$. Et donc, $A \times \frac{1}{5}A^2 = I_3$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{5}A^2$. Plus précisément,

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 & 9 & -4 \\ -3 & 7 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

2. On a :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Supposons, par l'absurde, que B est inversible. Il existe alors une matrice A telle que $B \times A = A \times B = I_3$. On a alors ;

$$(BA)^3 = I_3^3 = I_3$$

Or, puisque B et A commutent, on a

$$(BA)^3 = B^3 A^3 = 0_3 \times A^3 = 0_3$$

Ainsi,

$$0_3 = I_3$$

ce qui est bien sûr absurde.

Conclusion : La matrice B n'est pas inversible.

Solution 8 –

1. (a) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 9 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Enfin,

$$-A^3 - 3A^2 - 3A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -9 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 & 3 & -9 \\ -24 & 12 & -15 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 15 & -9 & 9 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

(b) On vient de voir que $-A^3 - 3A^2 - 3A = I_3$. En factorisant par A à gauche de l'égalité, cela donne :

$$A \times (-A^2 - 3A - 3I_3) = I_3$$

Donc, A est inversible et $A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I_3$.

(a) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Et donc,

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3$$

(b) On vient de voir que $A^3 - A = 4I_3$. En factorisant par A à gauche, on obtient :

$$A(A^2 - A) = 4I_3$$

Donc,

$$A \times \frac{1}{4}(A^2 - A) = I_3$$

Donc, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - A)$.

Solution 9 –

1. Commençons par calculer C^2 et C^3 , on a :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha\gamma \\ 0 & \beta & \alpha + \beta\gamma \\ 1 & \gamma & \beta + \gamma^2 \end{pmatrix} \text{ et } C^3 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\gamma & \beta\alpha + \alpha\gamma^2 \\ \beta & \alpha + \beta\gamma & \beta^2 + \alpha\gamma + \beta\gamma^2 \\ \gamma & \beta + \gamma^2 & \alpha + 2\beta\gamma + \gamma^3 \end{pmatrix}$$

On effectue alors le calcul $C^3 - \gamma C^2 - \beta C - \alpha I_3$ et on obtient bien la matrice nulle.

2. Supposons $\alpha \neq 0$, on a alors :

$$C^3 - \gamma C^2 - \beta C = \alpha I_3$$

soit

$$C(C^2 - \gamma C - \beta I_3) = \alpha I_3$$

soit

$$C \times \frac{1}{\alpha}(C^2 - \gamma C - \beta I_3) = I_3.$$

Ainsi la matrice est inversible et son inverse vaut :

$$C^{-1} = \frac{1}{\alpha}(C^2 - \gamma C - \beta I_3) = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} -\beta & \alpha & 0 \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Supposons que $\alpha = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que C est inversible. On a alors :

$$C(C^2 - \gamma C - \beta I_3) = 0_3.$$

Or comme C est inversible, cela implique que : $C^2 - \gamma C - \beta I_3 = 0_3$ soit

$$C^2 = \gamma C + \beta I_3 = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \alpha\gamma \\ \gamma & \beta & \gamma\beta \\ 0 & \gamma & \gamma^2 + \beta \end{pmatrix}$$

En identifiant avec les coefficients de C^2 , on obtient notamment $1 = 0$, ce qui est absurde donc C n'est pas inversible.

Solution 10 –

1. Pour démontrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse, on peut soit utiliser la méthode de résolution d'un système linéaire, soit utiliser la méthode de Gauss-Jordan.

On utilise ici la méthode de Gauss-Jordan :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow 3L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -10 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 9 & 2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 9 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 2 & 0 & 1 & -9 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 9 & 2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{-6}L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 9 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{-2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{15}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 9 & 2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{15}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Donc, la matrice P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{15}{2} & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = 4 \\ x - y + 2z = -2 \\ -3x + 4y - 8z = 4 \end{cases} \iff AX = B \iff X = A^{-1}B$$

Pour trouver la solution du système (S_1) , il nous suffit donc de calculer $X = A^{-1}B$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{15}{2} & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

L'unique solution du système (S_1) est donc $(x; y; z) = (-4; -5; -\frac{3}{2})$.

De même, pour calculer la solution du système (S_2) , il nous suffit de faire le calcul suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{15}{2} & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{13}{2} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

L'unique solution du système (S_2) est donc $(x; y; z) = (3; \frac{13}{2}; \frac{7}{4})$.

Solution 11 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$, rappelons que toute matrice symétrique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie ${}^t B = B$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$${}^t({}^t A) = {}^t A {}^t({}^t A) = {}^t A A$$

Ainsi la matrice ${}^t A A$ est bien symétrique.

2. Soit X une matrice symétrique alors on a :

$${}^t({}^t A X + X A) = {}^t({}^t A X) + {}^t(X A) = {}^t X {}^t({}^t A) + {}^t A {}^t X = X A + {}^t A X \text{ car } X \text{ est symétrique.}$$

Ainsi la matrice ${}^t A X + X A$ est bien symétrique

3. Soit X une matrice antisymétrique, on a :

$${}^t({}^tAX + XA) = {}^t({}^tAX) + {}^t(XA) = {}^tX {}^t({}^tA) + {}^tA {}^tX = -XA - {}^tAX = -({}^tAX + XA)$$

Ainsi la matrice ${}^tAX + XA$ est bien antisymétrique

Solution 12 –

1.

$$\begin{aligned} R(\alpha)R(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \\ &= R(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente,

$$R(\theta)R(-\theta) = R(\theta - \theta) = R(0) = I_2$$

Donc $R(\theta)$ est d'inversible d'inverse $R(-\theta)$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n : « $R(\theta)^n = R(n\theta)$ »

Initialisation : $R(\theta)^0 = I_2$

$R(0 \cdot \theta) = R(0) = I_2$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose P_n vraie. D'après la question 1,

$$\begin{aligned} R((n+1)\theta) &= R(n\theta + \theta) \\ &= R(n\theta)R(\theta) \\ &= R(\theta)^n R(\theta) \\ &= R(\theta)^{n+1} \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(\theta)^n = R(n\theta)$

Soit n un entier négatif. Alors

$$R(n\theta) = R(-n\theta)^{-1} = (R(\theta)^{-n})^{-1} = R(\theta)^n.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $R(n\theta) = R(\theta)^n$.

Solution 13 – On procède par analyse-synthèse. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Analyse : Si $B = A + S$ avec S symétrique et A antisymétrique.

Alors ${}^tB = {}^tA + {}^tS = -A + S$. On en déduit (en sommant et soustrayant ces deux lignes) que

$$S = \frac{B + {}^tB}{2}, \quad A = \frac{B - {}^tB}{2}$$

Donc S et A sont uniques.

• Synthèse : On pose $S = \frac{B + {}^tB}{2}$, $A = \frac{B - {}^tB}{2}$. Alors

$$A + S = \frac{B - {}^tB}{2} + \frac{B + {}^tB}{2} = B$$

$${}^tS = \frac{{}^tB + {}^t({}^tB)}{2} = \frac{B + {}^tB}{2} = S$$

Donc S est symétrique.

$${}^tA = \frac{{}^tB - {}^t({}^tB)}{2} = \frac{{}^tB - B}{2} = -A$$

Donc A est antisymétrique.

Finalement B s'écrit bien sous la forme $A + S$ avec A antisymétrique et S symétrique de manière unique.

Solution 14 –

1. On commence par rappeler que par définition, $A^0 = B^0 = I_3$.

$$\text{La matrice } A \text{ étant diagonale, on a pour tout } k \in \mathbb{N}, A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}. B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Ensuite, pour tout } k \geq 3, B^k \text{ est la matrice nulle.}$$

2.

$$AB = 2I_3B = 2B = B(2I_3) = BA$$

Donc on peut appliquer la formule du binôme pour les matrices : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (A + B)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k \\ &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} A^{n-k} B^k \end{aligned}$$

car B^k est nulle pour $k \geq 3$. Donc, pour $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}(A+B)^n &= \binom{n}{0} A^n B^0 + \binom{n}{1} A^{n-1} B + \binom{n}{2} A^{n-2} B^2 \\ &= 2^n I_2 + n 2^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & n 2^{n-1} & n 2^n + 3n(n-1) 2^{n-3} \\ 0 & 2^n & 3n 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

De plus, $(A+B)^0 = I_3$ et $(A+B)^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution 15 –

1. On a bien sûr $A^0 = I_2$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2A.$$

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = 2^{n-1} A$.

C'est évidemment vrai au rang $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A^n = 2^{n-1} A$, alors

$$A^{n+1} = A^n A = 2^{n-1} A^2 = 2^{n-1} \cdot 2A = 2^n A$$

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = 2^{n-1} A$.

2. On a bien sûr $A^0 = I_3$. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$ De la même façon que précédemment, on

montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = 3^{n-1} A$.

3. On a bien sûr $A^0 = I_2$.

• Cas $a = b$. On remarque que

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ac \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 c \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n : \ll A^n = \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} c \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \gg$

Initialisation : $\begin{pmatrix} a^1 & 1 a^{1-1} c \\ 0 & a^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} = A$, donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P_n est vraie. Alors

$$\begin{aligned}A^{n+1} &= A^n A \\ &= \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} c \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n c + n a^n c \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1) a^n c \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} c \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

Autre méthode : On remarque $A = aI_2 + C$ avec $C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices C et aI_2 commutent (car la matrice identité commute avec toutes les matrices), donc d'après le binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aI_2)^{n-k} C^k$$

Or, $C^2 = 0$, et les puissances suivantes de C sont également nulles. On en déduit que

$$\begin{aligned}A^n &= (aI_2)^n C^0 + n(aI_2)^{n-1} C^1 \\ &= \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} c \\ 0 & a^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

• Cas $a \neq b$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & (a+b)c \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & (a^2 + ab + b^2)c \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n : \ll A^n = \begin{pmatrix} a^n & \frac{a^n - b^n}{a - b} c \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \gg$

Initialisation : $\begin{pmatrix} a^1 & \frac{a^1 - b^1}{a - b} c \\ 0 & b^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = A$, donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P_n est vraie. Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= \begin{pmatrix} a^n & c \frac{a^n - b^n}{a - b} \\ 0 & \frac{a^n - b^n}{b^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n c + c \frac{a^n - b^n}{a - b} b \\ 0 & \frac{a^n - b^n}{a^{n+1} b} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & c \frac{a^{n+1} - a^n b + a^n b - b^{n+1}}{a - b} \\ 0 & \frac{a^n - b^n}{a^{n+1} b} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & c \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \\ 0 & \frac{a^n - b^n}{a^{n+1} b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & \frac{a^n - b^n}{a - b} c \\ 0 & \frac{a^n - b^n}{b^n} \end{pmatrix}$.

Solution 16 –

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

- si $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $A^n = I_2$.
- si $n = 4k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors $A^n = A$.
- si $n = 4k + 2$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors $A^n = -I_2$.
- si $n = 4k + 3$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors $A^n = -A$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Il semblerait que pour tout $n \geq 1$, on ait $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$. Démontrons cette proposition par récurrence.

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ ».

Initialisation ($n = 1$) :

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Et} \quad \begin{pmatrix} 2^{1-1} & 0 & 2^{1-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{1-1} & 0 & 2^{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a :

$$A^{n+1} = A^n \times A$$

par hypothèse de récurrence, on sait que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} + 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2^{n-1} & 0 & 2 \times 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 \times 2^{n-1} & 0 & 2 \times 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, à savoir :

$$\forall n \geq 1, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il semblerait que pour tout $n \geq 1$, on ait $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrons cette proposition par récurrence.

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ».

Initialisation ($n = 1$) :

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a :

$$A^{n+1} = A^n \times A$$

par hypothèse de récurrence, on sait que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, à savoir :

$$\forall n \geq 1, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On a :

$$C^2 = C \times C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C^3 = C^2 \times C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On conjecture alors la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrons cette formule par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $C^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ».

Initialisation : ($n = 0$)

$$C^0 = I_2 \text{ et } \begin{pmatrix} 2^0 & 2^0 - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on veut montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi. On a :

$$\begin{aligned} C^{n+1} &= C^n \times C = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2^n & 2^n + 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est donc héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 17 – Montrons ce résultat par récurrence. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $J^n = 6^{n-1} J$ ».

Initialisation ($n = 1$) On a d'une part $J^1 = J$ et d'autre part $6^{1-1} J = J$. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} J^{n+1} &= J^n \times J \\ &= 6^{n-1} J \times J \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 6^{n-1} J^2 \end{aligned}$$

Calculons J^2 . On obtient $J^2 = 6J$. Ainsi :

$$J^{n+1} = 6^n J.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie à savoir : $J^n = 6^{n-1} J$.

Solution 18 –

1. Calculons A^2 , on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

On cherche alors deux réels λ et μ tels que :

$$\lambda A + \mu I_3 = A^2$$

soit

$$\begin{pmatrix} \lambda + \mu & -3\lambda & 6\lambda \\ 6\lambda & -8\lambda + \mu & 12\lambda \\ 3\lambda & -3\lambda & 4\lambda + \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Par identification, on obtient : $\lambda + \mu = 1$ et $6\lambda = -6$. On en déduit que :

$$\lambda = -1 \quad \text{et} \quad \mu = 2.$$

En conclusion, $A^2 = -A + 2I_3$.

2. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right)I_3$ ».

Initialisation ($n = 0$), on a d'une part $A^0 = I_3$ par convention. D'autre part, on pose $a_0 = \frac{1}{3}$ et on a :

$$\left(\frac{1}{3} - a_0\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_0\right)I_3 = I_3.$$

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= \left(\left(\frac{1}{3} - a_n \right) A + \left(\frac{2}{3} + a_n \right) I_3 \right) \times A \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \left(\frac{1}{3} - a_n \right) A^2 + \left(\frac{2}{3} + a_n \right) A \\ &= \left(\frac{1}{3} - a_n \right) (-A + 2I_3) + \left(\frac{2}{3} + a_n \right) A \quad \text{d'après la question 1} \\ &= \left(-\frac{1}{3} + a_n + \frac{2}{3} + a_n \right) A + \left(\frac{2}{3} - 2a_n \right) I_3 \\ &= \left(\frac{1}{3} - (-2a_n) \right) A + \left(\frac{2}{3} + (-2a_n) \right) I_3 \end{aligned}$$

On pose $a_{n+1} = -2a_n$ et on a alors :

$$A^{n+1} = \left(\frac{1}{3} - (a_{n+1}) \right) A + \left(\frac{2}{3} + (a_{n+1}) \right) I_3$$

La propriété est alors héréditaire.

Conclusion La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir : il existe une suite $(a_n)_n$ définie par $a_0 = \frac{1}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -2a_n$ telle que $A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right)I_3$.

3. La suite $(a_n)_n$ est définie par $a_0 = \frac{1}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -2a_n$. Elle est donc géométrique de raison -2 .

4. On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{3}(-2)^n$. Ainsi :

$$A^n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n \right) A + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n \right) I_3 = \frac{1 - (-2)^n}{3} A + \frac{2 + (-2)^n}{3} I_3$$

soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 + (-2)^n & 2 + (-2)^{n+1} \\ 2 + (-2)^{n+1} & -2 + 3(-2)^n & 4 - 4(-2)^n \\ 1 - (-2)^n & -1 + (-2)^n & 2 - (-2)^n \end{pmatrix}$$

Solution 19 –

1. On a :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^2 = 0_3$$

2. Montrons le résultat par récurrence, on pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1} B$ ».

Initialisation ($n = 0$) On a, d'une part, $A^0 = I_3$ par convention et d'autre part $2^0 I_3 + 0 \times 2^{0-1} B = I_3$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= (2^n I_3 + n2^{n-1} B) \times A \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (2^n I_3 + n2^{n-1} B) \times (B + 2I_3) \quad \text{car } B = A - 2I_3 \\ &= 2^n B + n2^{n-1} B^2 + 2^{n+1} I_3 + n2^n B \\ &= 2^{n+1} I_3 + (n+1)2^n B \quad \text{car } B^2 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir : $A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1} B$.

Solution 20 –

1. Pour $n = 4$,

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}, \quad SP = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 11 & 22 & 33 & 44 \\ 32 & 64 & 96 & 128 \\ 70 & 140 & 210 & 280 \end{pmatrix}.$$

2. On note $A = SP$. Les coefficients de A sont notés $(a_{i,j})$. Pour tout $(i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,k} = \sum_{j=1}^n s_{i,j} p_{j,k}$.

Or, $s_{i,j} = 0$ si $i < j$, donc

$$\begin{aligned} a_{i,k} &= \sum_{j=1}^i s_{i,j} p_{j,k} \\ &= \sum_{j=1}^i (i+j) j k \\ &= i k \sum_{j=1}^i j + k \sum_{j=1}^i j^2 \\ &= i k \frac{i(i+1)}{2} + k \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} \\ &= \frac{i k (i+1)}{6} (3i+2i+1) \end{aligned}$$

$$\text{Et donc } a_{i,k} = \frac{i k (5i+1)(i+1)}{6}.$$

Solution 21 – Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices carrées de taille $n \times n$.

$$\begin{aligned} {}^t(A+B) &= \sum_{i=1}^n (a_{i,i} + b_{i,i}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \sum_{i=1}^n b_{i,i} \\ &= {}^t(A) + {}^t(B) \end{aligned}$$

Les coefficients de (AB) sont les $\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,k}$, donc

$${}^t(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i}$$

De même,

$$\begin{aligned} {}^t(BA) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j} a_{j,i} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{i,j} a_{j,i} \quad \text{redécoupage} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} \quad \text{changement d'indice } i \leftrightarrow j \\ &= {}^t(AB) \end{aligned}$$

Solution 22 – 1. On commence par remarquer que si $D = P^{-1}MP$, alors en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} , on a $M = PDP^{-1}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose H_k : « $M^k = PD^kP^{-1}$ »

Initialisation : $M^0 = I_n$.

$PD^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$. Donc H_0 est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que H_k soit vraie. Alors

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^k M \\ &= PD^k P^{-1} P D P^{-1} \\ &= PD^k I_n D P^{-1} \\ &= PD^k D P^{-1} \\ &= PD^{k+1} P^{-1} \end{aligned}$$

Donc H_{k+1} est vraie.

2. (a) $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) D'après la question 1,

$$\begin{aligned} M^k &= PD^k P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^k \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + (-2)^k & 1 - (-2)^k \\ 2 + (-2)^{k+1} & 1 - (-2)^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solution 23 –

1. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pose P_n : « il existe deux nombres réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_2$ ».

Initialisation : En prenant $a_0 = 0$ et $b_0 = 0$, on a

$$a_0 A + b_0 I_2 = I_2 = A^0$$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose P_n vraie.

$$A^n = a_n A + b_n I_2$$

$$A^n A = (a_n A + b_n I_2) A$$

$$A^{n+1} = a_n A^2 + b_n A$$

Or, $A^2 = \begin{pmatrix} 25 & 36 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 6A - 5I_2$, donc

$$A^{n+1} = a_n(6A - 5I_2) + b_n A = (6a_n + b_n)A - 5a_n I_2$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Par récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. D'après la preuve précédente, on a que a et b vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 6a_n + b_n, \quad b_{n+1} = -5a_n$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} + b_{n+1} = 6a_{n+1} - 5a_n$$

$$b_{n+2} = -5a_{n+1} = -30a_n - 5b_n = 6b_{n+1} - 5b_n$$

a et b sont donc bien récurrentes d'ordre 2.

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 6r + 5 = 0$, dont les racines sont 1 et 5. Ainsi, il existe α et β réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha + \beta 5^n$$

On sait de plus que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, donc $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha + 5\beta = 1$, donc $\beta = \frac{1}{4}$ et $\alpha = -\frac{1}{4}$.

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{4}(5^n - 1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = -5a_{n-1} = \frac{5}{4}(1 - 5^{n-1})$$

(On remarque que l'expression $b_n = \frac{5}{4}(1 - 5^{n-1})$ est également valide en $n = 0$.)

3. D'après les questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = \frac{1}{4}(5^n - 1)A + \frac{5}{4}(1 - 5^{n-1})I_2$$

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5(5^n - 1) + 5(1 - 5^{n-1}) & 6(5^n - 1) \\ 0 & 5^n - 1 + 5(1 - 5^{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \times 5^n & 6(5^n - 1) \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & \frac{3}{2}(5^n - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 24 –

1. (a) On procède par récurrence.

Initialisation : En posant $a_0 = 0$, on a

$$\begin{pmatrix} 1+a_0 & a_0 & 0 \\ a_0 & 1+a_0 & 0 \\ a_0 & a_0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = A^0$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1+a_n & a_n & 0 \\ a_n & 1+a_n & 0 \\ a_n & a_n & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$A^n A = \begin{pmatrix} 1+a_n & a_n & 0 \\ a_n & 1+a_n & 0 \\ a_n & a_n & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3a_n & 1+3a_n & 0 \\ 1+3a_n & 2+3a_n & 0 \\ 1+3a_n & 1+3a_n & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $a_{n+1} = 1 + 3a_n$, on obtient bien la forme demandée.

- (b) a est une suite arithmético-géométrique.

Pour $c \in \mathbb{R}$, $c = 1 + 3c \iff c = \frac{-1}{2}$, donc on pose $z_n = a_n + \frac{1}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= a_{n+1} + \frac{1}{2} \\ &= 1 + 3a_n + \frac{1}{2} \\ &= 3\left(a_n + \frac{1}{2}\right) = 3z_n \end{aligned}$$

Donc w est géométrique de raison 3.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = 3^n z_0 = \frac{3^{n+1}}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Alors,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 2u_n + v_n \\ u_n + 2v_n \\ u_n + v_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = AX_n$$

Alors, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$:

I : $A^0 X_0 = I_n X_0 = X_0$.

H : Si pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$, alors

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a_n \\ a_n \\ a_n+1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \begin{cases} u_n &= \frac{1}{2}(3^{n+1} + 1) \\ v_n &= \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1) \\ w_n &= \frac{1}{2}(3^{n+1} + 1) \end{cases}$$

Solution 25 – On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Alors

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Donc (S) a une unique solution :

$$\left(\frac{a+3b+5c}{2}; \frac{a+b+c}{2}; \frac{a+5b+7c}{2} \right)$$

Solution 26 –

1. On applique la méthode de Gauss-Jordan pour prouver que P est inversible et pour déterminer son inverse. On obtient :

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. On a :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme D est une matrice diagonale, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

3. On montre la relation par récurrence (identique à celle de la question 3) de l'exercice 25 (cf corrigé).

Comme la matrice P est inversible, la relation $D^n = P^{-1} A^n P$ peut s'écrire $A^n = P D^n P^{-1}$. On effectue alors le produit matriciel $P D^n P^{-1}$. On obtient :

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 + (-1)^n + 2^{n+3} & 3 + 3(-1)^{n+1} & 6 + 2(-1)^n - 2^{n+3} \\ -3 + (-1)^{n+1} + 2^{n+2} & 3 + 3(-1)^{n+2} & 6 + 2(-1)^n - 2^{n+2} \\ -3 + (-1)^n + 2^{n+1} & 3 + 3(-1)^{n+1} & 6 + 2(-1)^n - 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons $A X_n$, on obtient, en utilisant la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$A X_n = \begin{pmatrix} 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

- (b) On montre le résultat par récurrence. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $X_n = A^n X_0$ ».

Initialisation ($n = 0$) On a, par convention, $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= A X_n \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= A \times A^n X_0 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} X_0 \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :

$$X_n = A^n X_0$$

- (c) Pour déterminer l'expression de u_n , on a seulement besoin de calculer le dernier coefficient de X_n .

On a $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a alors :

$$X_n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 + (-1)^n + 2^{n+3} & 3 + 3(-1)^{n+1} & 6 + 2(-1)^n - 2^{n+3} \\ -3 + (-1)^{n+1} + 2^{n+2} & 3 + 3(-1)^{n+2} & 6 + 2(-1)^n - 2^{n+2} \\ -3 + (-1)^n + 2^{n+1} & 3 + 3(-1)^{n+1} & 6 + 2(-1)^n - 2^{n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Cela ne sert à rien de faire tout le calcul car seul la ligne 3 de X_n nous intéresse, on obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{6} (3 + (-1)^{n+1} - 2^{n+1} + 3 + 3(-1)^{n+1} + 12 + 4(-1)^n - 2^{n+2}) \\ &= \frac{1}{6} (18 + 4(-1)^{n+1} - 4(-1)^{n+1} - 2^{n+1} - 2 \times 2^{n+1}) \\ &= \frac{1}{6} (18 - 3 \times 2^{n+1}) \\ &= 3 - 2^n \end{aligned}$$

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - 2^n$.

Solution 27 –

1. Un rapide calcul montre que $J^2 = nJ$.

On montre par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J^p = n^{p-1} J$.

C'est évidemment vrai au rang $p = 1$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $J^p = n^{p-1} J$, alors

$$J^{p+1} = J^p J = n^{p-1} J^2 = n^{p-1} \cdot nJ = n^p J$$

Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J^p = n^{p-1} J$.

2. (a) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors, en utilisant que $J^2 = nJ$,

$$(I_n + \alpha J)(I_n + \beta J) = I_n + \alpha J + \beta J + \alpha \beta J^2 = I_n + (\alpha + \beta + \alpha \beta n) J$$

Donc $(I_n + \alpha J)(I_n + \beta J) \in \mathcal{E}$.

Ainsi, $I_n + \alpha J$ admet un inverse dans $\mathcal{E}$ si et seulement si il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $(I_n + \alpha J)(I_n + \beta J) = I_n$, c'est-à-dire si et seulement si il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha + \beta + \alpha \beta n = 0$.

Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha + \beta + \alpha \beta n = 0 \iff \beta(1 + n\alpha) = -\alpha$$

Cette dernière équation n'a des solutions que si $\alpha \neq \frac{-1}{n}$. C'est donc la condition pour que $I_n + \alpha J$ ait un inverse dans $\mathcal{E}$.

- (b) Ici $A = 4I_n + J = 4(I_n + \frac{1}{4}J)$. Avec $n = 4$ et $\alpha = \frac{1}{4}$, d'après la question précédente,

$I_n + \frac{1}{4}J$ est inversible et $(I_n + \frac{1}{4}J)^{-1} = I_n - \frac{\alpha}{1 + n\alpha} J = I_n - \frac{1}{8} J$.

Donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4} (I_n - \frac{1}{8} J) = \frac{1}{4} I_n - \frac{1}{32} J = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

(c) Puisque I_4 et J commutent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A^n &= (4I_4 + J)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (4I_4)^{n-k} J^k \\ &= 4^n I_4 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (4I_4)^{n-k} J^k \\ &= 4^n I_4 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^{n-k} 4^{k-1} J \\ &= 4^n I_4 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \right) 4^{n-1} J \\ &= 4^n I_4 + \left(-1 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right) 4^{n-1} J \\ &= 4^n I_4 + (2^n - 1) 4^{n-1} J \end{aligned}$$

Solution 28 –

1. (a) Pour l'identité I_n on a trivialement $AI_n = A = I_n A$, donc $I_n \in \mathcal{C}(A)$.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $A^p \times A = A^{p+1} = A \times A^p$ donc $A^p \in \mathcal{C}(A)$.

(c) On a :

- $A(\lambda M) = \lambda(AM) = \lambda(MA) = (\lambda M)A$, donc $\lambda M \in \mathcal{C}(A)$.
- $A(M + N) = AM + AN = MA + NA = (M + N)A$, donc $M + N \in \mathcal{C}(A)$.
- comme M et N commutent avec A , on a

$$A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN) = M(NA) = (MN)A,$$

donc $MN \in \mathcal{C}(A)$.

(d) On a $M^{-1}(AM) = M^{-1}(MA)$ donc $(M^{-1}A)M = (M^{-1}M)A = A = (AM^{-1})M$, et en multipliant à droite par M^{-1} on obtient $M^{-1}A = AM^{-1}$. Donc $M^{-1} \in \mathcal{C}(A)$.

2. Par la question 1, $I_2 \in \mathcal{C}(A)$ et $A \in \mathcal{C}(A)$ (point (b) appliqué à $p = 1$). Comme $\mathcal{C}(A)$ est stable par combinaisons linéaires (point (c)), tout élément de la forme $\lambda I_2 + \mu A$ appartient à $\mathcal{C}(A)$. Donc $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}(A)$.

3. Calculons directement :

$$\begin{aligned} AM &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a+c & -3b+d \\ -4a+c & -4b+d \end{pmatrix}, \\ MA &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-4b & a+b \\ -3c-4d & c+d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Imposer $AM = MA$ donne le système d'équations obtenu en égalisant les quatre coefficients :

$$-3a+c = -3a-4b, \quad -3b+d = a+b, \quad -4a+c = -3c-4d, \quad -4b+d = c+d. \quad (1)$$

La première équation donne $c = -4b$. La deuxième équation donne $-3b+d = a+b$, donc $d = a+4b$. Les autres équations sont automatiquement satisfaites (on peut vérifier en remplaçant c, d par ces expressions). Ainsi

$$M \in \mathcal{C}(A) \iff c = -4b \quad \text{et} \quad d = a+4b$$

4. À partir des relations de (c) on peut écrire une matrice $M \in \mathcal{C}(A)$ sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -4b & a+4b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Il reste à remarquer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = 3I_2 + A$. Ainsi, En posant $\lambda = a+3b$ et $\mu = b$ on voit que $M = \lambda I_2 + \mu A \in \mathcal{E}$. Donc toute matrice du commutant appartient à $\mathcal{E}$, ce qui montre $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{E}$. Avec (b) on a l'égalité

$$\mathcal{C}(A) = \mathcal{E} = \{\lambda I_2 + \mu A \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Ceci achève la démonstration.

Solution 29 –

1. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $AB = C = (c_{ij})$, où $c_{ij} =$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

On a alors :

$$\|AB\| = \|C\| = \sum_{i,j} |c_{ij}| = \sum_{i,j} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|.$$

Par l'inégalité triangulaire, on sait que :

$$\left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik} b_{kj}| = \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}|.$$

En sommant sur i et j , on obtient :

$$\|AB\| \leq \sum_{i,j} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| = \sum_{i,k} |a_{ik}| \sum_j |b_{kj}|.$$

Or, $\sum_j |b_{kj}| \leq \|B\|$ et $\sum_{i,k} |a_{ik}| = \|A\|$, donc :

$$\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|.$$

2. (a) On procède par récurrence sur k .

Initialisation : Pour $k = 1$, on a :

$$A^1 - B^1 = A - B = \sum_{i=0}^0 A^i (A - B) B^{0-i}.$$

Hérédité : Supposons que la formule soit vraie pour un certain $k \geq 1$, c'est-à-dire :

$$A^k - B^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i (A - B) B^{k-1-i}.$$

Alors, pour $k + 1$:

$$A^{k+1} - B^{k+1} = A^{k+1} - AB^k + AB^k - B^{k+1} = A(A^k - B^k) + (A - B)B^k.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$A^{k+1} - B^{k+1} = A \left(\sum_{i=0}^{k-1} A^i (A - B) B^{k-1-i} \right) + (A - B)B^k.$$

En faisant un changement d'indice $j = i + 1$ puis en reconnaissant le terme pour $j = 0$, on obtient :

$$A^{k+1} - B^{k+1} = \sum_{i=0}^{k-1} A^{i+1} (A - B) B^{k-1-i} + (A - B)B^k = \sum_{j=0}^k A^j (A - B) B^{k-j}.$$

La formule est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- (b) Remarquons tout d'abord que si $\|B\| = 0$ alors $B = 0$ et l'inégalité demandée est une conséquence directe de l'inégalité de la question 1. On se place donc dans le cas où $\|B\| \neq 0$.

D'après la question précédente, on a :

$$A^k - B^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i (A - B) B^{k-1-i}.$$

En utilisant l'inégalité de la question 1, on obtient :

$$\|A^k - B^k\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|A^i\| \|A - B\| \|B\|^{k-1-i}.$$

Or, $\|A^i\| \leq \|A\|^i$ et $\|B\|^{k-1-i} \leq \|B\|^{k-1-i}$, donc :

$$\|A^k - B^k\| \leq \|A - B\| \sum_{i=0}^{k-1} \|A\|^i \|B\|^{k-1-i}.$$

La somme $\sum_{i=0}^{k-1} \|A\|^i \|B\|^{k-1-i}$ est une somme géométrique de raison $\frac{\|A\|}{\|B\|} \neq 1$, donc :

$$\sum_{i=0}^{k-1} \|A\|^i \|B\|^{k-1-i} = \|B\|^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\|A\|}{\|B\|} \right)^i = \|B\|^{k-1} \frac{\left(\frac{\|A\|}{\|B\|} \right)^k - 1}{\frac{\|A\|}{\|B\|} - 1}.$$

En simplifiant, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{k-1} \|A\|^i \|B\|^{k-1-i} = \frac{\|A\|^k - \|B\|^k}{\|A\| - \|B\|}.$$

En divisant par $\|A - B\| > 0$, on a donc finalement :

$$\frac{\|A^k - B^k\|}{\|A - B\|} \leq \frac{\|A\|^k - \|B\|^k}{\|A\| - \|B\|}.$$

Solution 30 – Je vais utiliser la méthode du pivot de Gauss. Mais avant tout, je remarque que les deux premières lignes se ressemblent. À l'aide des opérations élémentaires, je vais me ramener à une équation plus simple pour L_2 en lui retirant L_1 :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + 3y + 8z = 4 \\ 4x - y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ 10z = -1 \\ 4x - y + 4z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

✎ En $x : 2 - 2 = 0$, en $y : 3 - 3 = 0$, en $z : 8 - (-2) = 10$ et pour le terme constant : $4 - 5 = -1$.

À ce moment, j'ai déjà fait disparaître deux coefficients de mon système. En passant cette ligne en dernière position, il ne me restera plus qu'un terme à faire disparaître pour obtenir un système triangulaire.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ 4x - y + 4z = 0 \\ 10z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ 4x - y + 4z = 0 \\ 10z = -1 \end{cases} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

Pour faire disparaître le terme en x de la deuxième ligne, il me suffit de retirer $2L_1$ à L_2 .

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ 4x - y + 4z = 0 \\ 10z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ -7y + 8z = -10 \\ 10z = -1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

✎ En $x : 4 - 2 \times 2 = 0$, en $y : -1 - 2 \times 3 = -7$, en $z : 4 - 2 \times (-2) = 8$ et enfin : $0 - 2 \times 5 = -10$.

Je me retrouve avec un système triangulaire, que je sais désormais résoudre.

La troisième équation me donne

$$z = -\frac{1}{10}.$$

En remplaçant z dans la deuxième équation, j'obtiens

$$-7y - \frac{8}{10} = -10 \iff -7y = -10 + \frac{4}{5} = -\frac{46}{5} \iff y = \frac{46}{35}.$$

Et en remplaçant y et z dans la première équation, j'obtiens

$$2x + \frac{3 \times 46}{35} + \frac{2}{10} = 5 \iff 2x + \frac{138+7}{35} = 5 \iff 2x = 5 - \frac{29}{7} = \frac{6}{7} \iff x = \frac{3}{7}.$$

Ainsi l'unique solution de ce système est $\left(\frac{3}{7}, \frac{46}{35}, -\frac{1}{10}\right)$.

Solution 31 – J'applique la méthode du pivot de Gauss.

J'ai mon pivot en x sur la première ligne, je m'attache donc à faire disparaître les termes en x des lignes suivantes. Pour L_2 , il me suffit de retirer L_1 à L_2 .

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

En $x : 1-1=0$, en $y : -1-1=-2$, en $z : 0-(-1)=1$ et pour le terme constant : $0-0=0$.

Pour L_3 , de la même manière, je retire L_1 à L_3 .

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

En $x : 1-1=0$, en $y : 4-1=3$, en $z : 1-(-1)=2$ et pour le terme constant : $0-0=0$.

À ce moment, avant de fixer mon pivot en y à la deuxième ligne, je remarque qu'en ajoutant L_3 à L_2 , j'obtiens un coefficient égal à 1 pour mon pivot, ce qui est préférable.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

En $y : -2+3=1$, en $z : 1+2=3$ et pour le terme constant : $0+0=0$.

Enfin, pour obtenir un système triangulaire, je n'ai plus qu'à faire disparaître le terme en y de la troisième ligne : je retire donc $3L_2$ à L_3 .

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ -7z = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

En $y : 3-3 \times 1=0$, en $z : 2-3 \times 3=-7$ et pour le terme constant : $0-3 \times 0=0$.

Dès lors, comme mon système est triangulaire, je sais qu'il existe une unique solution.

Comme mon système de départ est homogène, je savais déjà que la solution $(0,0,0)$ était solution. Maintenant je sais aussi qu'il s'agit de l'unique solution. La résolution habituelle du système triangulaire me donne d'ailleurs $z = 0$, puis $y = 0$ et enfin $x = 0$. Ainsi

$$S = \{(0,0,0)\}.$$

Solution 32 – J'applique la méthode du pivot de Gauss.

J'ai mon pivot en x sur la première ligne, je m'attache donc à faire disparaître les termes en x des lignes suivantes. Pour L_2 , il me suffit de retirer L_1 à L_2 .

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -2y - 3z = -4 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

En $x : 1-1=0$, en $y : -1-1=-2$, en $z : -1-2=-3$ et pour le terme constant : $1-5=-4$.

Pour L_3 , de la même manière, je retire L_1 à L_3 .

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -2y - 3z = -4 \\ x + z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -2y - 3z = -4 \\ -y - z = -2 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

En $x : 1-1=0$, en $y : 0-1=-1$, en $z : 1-2=-1$ et pour le terme constant : $3-5=-2$.

Avant de fixer mon pivot en y à la deuxième ligne, je remarque que le coefficient en y sur la troisième ligne est plus petit. J'échange donc ces deux lignes.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -2y - 3z = -4 \\ -y - z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -y - z = -2 \\ -2y - 3z = -4 \end{cases} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

Pour simplifier les calculs, je retire le « - » de mon deuxième pivot en remplaçant L_2 par $-L_2$.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -y - z = -2 \\ -2y - 3z = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ y + z = 2 \\ -2y - 3z = -4 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

Enfin, pour obtenir un système triangulaire, je n'ai plus qu'à faire disparaître le terme en y de la troisième ligne : j'ajoute donc $2L_2$ à L_3 .

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ y + z = 2 \\ -2y - 3z = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ y + z = 2 \\ -z = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

En $y : -2+2 \times 1=0$, en $z : -3+2 \times 1=-1$ et pour le terme constant : $-4+2 \times 2=0$.

Je me retrouve avec un système triangulaire, que je sais désormais résoudre.

La troisième équation me donne

$$z = 0.$$

En remplaçant z dans la deuxième équation, j'obtiens

$$y + 0 = 2 \iff y = 2.$$

Et en remplaçant y et z dans la première équation, j'obtiens

$$x + 2 + 2 \times 0 = 5 \iff x = 5 - 2 = 3.$$

Ainsi l'unique solution de ce système est $(3, 2, 0)$.

Solution 33 – J'applique la méthode du pivot de Gauss.

J'ai mon pivot en x sur la première ligne, je m'attache donc à faire disparaître les termes en x des lignes suivantes. Pour L_2 , il me suffit de retirer L_1 à L_2 .

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y - z = -2 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

☞ En $x : 1 - 1 = 0$, en $y : 2 - 1 = 1$, en $z : 1 - 2 = -1$ et pour le terme constant : $1 - 3 = -2$.

Pour retirer le terme en x de L_3 , de manière similaire, je retire $2L_1$ à L_3 .

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y - z = -2 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y - z = -2 \\ -y - 3z = -6 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

☞ En $x : 2 - 2 \times 1 = 0$, en $y : 1 - 2 \times 1 = -1$, en $z : 1 - 2 \times 2 = -3$ et pour le terme constant : $0 - 2 \times 3 = -6$.

J'ai mon pivot en y sur la deuxième ligne, il ne me reste plus qu'à ajouter L_2 à L_3 pour obtenir un système triangulaire.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y - z = -2 \\ -y - 3z = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y - z = -2 \\ -4z = -8 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

☞ En $y : -1 + 1 = 0$, en $z : -3 + (-1) = -4$ et pour le terme constant : $-6 + (-2) = -8$.

Je me retrouve avec un système triangulaire, que je sais désormais résoudre.

La troisième équation me donne

$$z = \frac{-8}{-4} = 2.$$

En remplaçant z dans la deuxième équation, j'obtiens

$$y - 2 = -2 \iff y = -2 + 2 = 0.$$

Et en remplaçant y et z dans la première équation, j'obtiens

$$x + 0 + 2 \times 2 = 3 \iff x = 3 - 4 = -1.$$

Ainsi l'unique solution de ce système est $(-1, 0, 2)$.

Solution 34 –

1. Soient x, y, z des réels. Alors

$$\begin{aligned} (S_1) &\iff \begin{cases} \boxed{1}x + 2y - z = 1 \\ -y + 2z = 1 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{1}x + 2y - z = 1 \\ \boxed{-1}y + 2z = 1 \\ \boxed{-2}z = -2 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ &\iff \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(S_1) possède une unique solution : $(0; 1; 1)$.

2. Soient x, y, z des réels. Alors

$$\begin{aligned} (S_2) &\iff \begin{cases} \boxed{1}x + 2y + 3z = 1 \\ -y - 4z = -3 \\ -2y - 8z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{1}x + 2y + 3z = 1 \\ \boxed{-1}y - 4z = -3 \\ 0 = 6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_3 \end{array} \end{aligned}$$

(S_2) ne possède pas de solution.

3. Soient x, y, z des réels. Alors

$$\begin{aligned} (S_3) &\iff \begin{cases} -8y + 5z = 7 \\ -8y + 5z = 7 \\ \boxed{1}x + 3y - 2z = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{-8}y + 5z = 7 \\ 0 = 0 \\ \boxed{1}x + 3y - 2z = -2 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} y = \frac{5}{8}\lambda - \frac{7}{8} \\ x = \frac{1}{8}\lambda + \frac{5}{8} \\ z = \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (S_3) est $\left\{ \left(\frac{1}{8}\lambda + \frac{5}{8}; \frac{5}{8}\lambda - \frac{7}{8}; \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

4. Soient x, y, z des réels. Alors

$$(S_4) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x + y + z = 3 \\ y + 2z = -2 \\ 2y + 5z = -5 \\ 3y + 9z = -3 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x - z = 5 \\ \boxed{1}y + 2z = -2 \\ z = -1 \\ 3z = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x - z = 5 \\ \boxed{1}y + 2z = -2 \\ \boxed{1}z = -1 \\ 0 = 6 \end{cases} \quad L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3$$

(S_4) ne possède pas de solution.

5. Soient x, y des réels. Alors

$$(S_5) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2}x - y = 0 \\ -4y = 2 \\ -2y = -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2}x - y = 0 \\ \boxed{-4}y = 2 \\ 0 = -6 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$$

(S_5) ne possède pas de solution.

6. Soient x, y, z des réels. Alors

$$(S_6) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -5y + 3z = -2 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{3+2\lambda}{5} \\ y = \frac{2+3\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S_6) est $\left\{ \left(\frac{3+2\lambda}{5}; \frac{2+3\lambda}{5}; \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Solution 35 –

1. Soient x, y, z des réels.

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x + 2y - z = a \\ -3y + 3z = b - a \\ -6y + 6z = c - a \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2}x + 3z = a + 2b \\ \boxed{-3}y + 3z = b - a \\ 0 = c - a - 2(b - a) \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2}x + 3z = a + 2b \\ \boxed{-3}y + 3z = b - a \\ 0 = c + a - 2b \end{cases}$$

Si $a + c - 2b \neq 0$, alors (S_1) n'a pas de solution.

Si $a + c - 2b = 0$, alors le système a une infinité de solutions (car sa réduite de Gauss possède une inconnue auxiliaire).

Bonus : Si $a + c - 2b = 0$, $(S_1) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{a+2b}{3} - \lambda \\ y = \frac{a-b}{3} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

L'ensemble des solutions est $\left\{ \left(\frac{a+2b}{3} - \lambda; \frac{a-b}{3} + \lambda; \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

2. Soient x, y, z des réels.

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x + y + z = b \\ -2y + 2z = 2 - b \\ -(1+a)y + (1-a)z = 3 - ab \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2}x + 4z = 2 + b \\ \boxed{-2}y + 2z = 2 - b \\ -4az = -ab - 2a + b + 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow 2L_3 - (1+a)L_2 \\ L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \end{matrix}$$

On veut utiliser le $-4az$ de la dernière ligne comme pivot.

• Si $a = 0$:

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x + 4z = b + 2 \\ \boxed{-1}y + z = 3 \\ 0 = -4 - b \end{cases}$$

▷ **Si $b \neq -4$:** Alors la dernière ligne du système est fautive et
le système n'a pas de solutions.

▷ **Si $b = -4$:**

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x & + & 4z & = & -2 \\ \boxed{-1}y & + & z & = & 3 \end{cases}$$

Le système (S_2) possède une infinité de solutions (car il y a une inconnue auxiliaire).

- **Si $a \neq 0$:** Le système possède autant de pivots que d'inconnues et d'équations.
Le système a donc une unique solution

Bonus :

Si $a = 0$ et $b = -4$:

$$(S_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x & = & -2\lambda - 1 \\ y & = & \lambda - 3 \\ z & = & \lambda \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{(-2\lambda; \lambda - 3; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Si $a \neq 0$, la solution est

$$\left(\frac{2b+8}{4a}; \frac{3ab-2a-b-4}{4a}; \frac{ab+2a-b-4}{4a} \right).$$

Solution 36 –

1. Soient x, y des réels.

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x & + & (1-m^2)y & = & m-1 \\ \boxed{1}x & + & my & = & 1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$$

On voudrait utiliser $(1-m^2)y$ comme pivot (ou alors on voudrait diviser par $1-m^2$), il faut donc traiter à part le cas où $1-m^2$ s'annule.

▷ **Si $m = -1$:**

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 & = & -2 \\ x & - & y & = & 1 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution.

▷ **Si $m = 1$:**

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x & + & 0 & = & 0 \\ y & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \begin{cases} y & = & \lambda \\ x & = & 1 - \lambda \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{(1-\lambda; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

▷ **Si $m \notin \{-1; 1\}$:** En divisant la première ligne par $1-m^2$,

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x & + & \boxed{1}y & = & \frac{-1}{1+m} \\ \boxed{1}x & + & my & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = & \frac{-1}{1+m} \\ x & = & \frac{1+m}{1+m} \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$$

Le système a une unique solution, $\left(\frac{1+2m}{1+m}; \frac{-1}{1+m}\right)$

2. Soient x, y, z des réels.

$$(S_2) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - mL_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} \boxed{1}x & - & y & + & z & = & 2 \\ & 2y & - & (m+1)z & = & m-3 \\ (1+m)y & - & 2mz & = & m^2 - 2m - 1 \end{cases} \xrightarrow[L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2]{L_3 \leftarrow 2L_3 - (1+m)L_2} \begin{cases} \boxed{2}x & + & (1-m)z & = & m+1 \\ \boxed{2}y & - & (m+1)z & = & m-3 \\ (m-1)^2 z & = & (m-1)^2 \end{cases}$$

▷ **Si $m = 1$:** Alors,

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2}x & & & = & 2 \\ \boxed{2}y & - & 2z & = & -2 \\ & 0 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & \lambda - 1 \\ z & = & \lambda \end{cases}$$

Le système a pour ensemble de solutions $\{(1; \lambda - 1; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

▷ **Si $m \neq 1$:** Alors,

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (1-m)z = m+1 \\ 2y - (m+1)z = m-3 \\ 1z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2m \\ 2y = 2m-2 \\ 1z = 1 \end{cases}$$

le système a une unique solution $(m; m-1; 1)$.

3. Soient x, y des réels.

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 1x + y = m+2 \\ (m-1)y = m^2-2m-5 \\ -(1+m)y = -2(m+1) \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{matrix}$$

On veut prendre comme pivot le coefficient de la dernière ligne.

▷ **Si $m = -1$:**

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ -2y = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Si $m = -1$, le système (S_3) a une unique solution : $(0, 1)$.

▷ **Si $m \neq -1$:**

$$(S_3) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{-1}{m+1} L_3} \begin{cases} x + y = m+2 \\ (m-1)y = m^2-2m-5 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - (m-1)L_2} \begin{cases} x + y = m+2 \\ 0 = m^2-4m-3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ce système a des solutions si et seulement si $m^2 - 4m - 3 = 0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 28$ et ses solutions sont $\frac{4+2\sqrt{7}}{2} = 2+\sqrt{7}$

et $\frac{4-2\sqrt{7}}{2} = 2-\sqrt{7}$. Donc :

• **Si $m \in \{2+\sqrt{7}; 2-\sqrt{7}\}$:**

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m+2 \\ 0 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Le système possède une unique solution : $(m; 2)$.

• **Si non :** $0 \neq m^2 - 4m - 3$ et la deuxième ligne du système est fautive donc le système n'a pas de solution.

4. Soient x, y, z des réels.

$$(S_4) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} 1x + my - mz = m \\ (4-2m)y - (4-2m)z = 1-2m \end{cases}$$

▷ **Si $m = 2$:** Alors la dernière ligne s'écrit $0 = 1$.

Donc (S_4) n'a pas de solution.

▷ **Si $m \neq 2$:**

$$(S_4) \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{4-2m} L_2} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{m(1+z-y)}{1-2m} \\ y - z = \frac{1-2m}{4-2m} \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{3m}{4-2m} \\ y = \lambda + \frac{1-2m}{4-2m} \\ z = \lambda \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{ \left(\frac{3m}{4-2m}; \lambda + \frac{1-2m}{4-2m}; \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!