

EXERCICES — CHAPITRE 12

Exercice 1 (♣) – Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{lll} (E_1) : y' - 3y = 2 & (E_2) : y' - 3t^2 y = t^2 & (E_3) : y' + ty = t^3, \\ (E_4) : y' + 2y = e^{2t} & (E_5) : y' - 5y = e^{5t} & (E_6) : y' - y = \sin t. \end{array}$$

Exercice 2 (♥) – Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2$
2. $y' + y = 2 \sin(x)$
3. $y' - y = (x+1)e^x$
4. $y' + y = x - e^x + \cos(x)$

Exercice 3 (♣) – Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle précisé :

1. $y' + (\tan x)y = \sin x$ sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$
2. $y' + (\tan x)y = \cos^3 x$ sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$
3. $(1+x^2)y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 (♥) – Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $(x^2+1)y' + 2xy + 1 = 0$
2. $(x^2+1)y' - xy = (x^2+1)^{3/2}$
3. $(x^2+1)^2 y' + 2x(x^2+1)y = 1$

Exercice 5 (♥) – Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles I indiqués.

$$\begin{array}{ll} (E_1) : y' - 3y = e^{2x} \text{ sur } I = \mathbb{R}; & (E_2) : xy' + 2y = 0 \text{ sur } I = \mathbb{R}_+^*; \\ (E_3) : \sqrt{1-x^2}y' - y = 1 \text{ sur } I =]-1; 1[; & \\ (E_4) : (x^2-1)y' - xy = 1+x-x^2 \text{ sur } I =]-1; 1[; & \\ (E_5) : y' - y \tan x = \frac{1}{\cos(x)^3} \text{ sur } I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[; & (E_6) : y' x \ln x - y = 3 \ln x \text{ sur } I =]0; 1[; \\ (E_7) : y' - 2y = \operatorname{sh}(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}; & (E_8) : (x^2-1)y' + xy = x \text{ sur } I =]1; +\infty[; \end{array}$$

Exercice 6 (♣) – Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y'' - 3y' = 0, \quad y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y'' - 2y' + 2y = 0$$

Exercice 7 (♥) – Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} (E_1) : y'' + 2y' - 8y = e^{3t} & (E_2) : y'' - 3y' - 4y = 2e^{4t} \\ (E_3) : y'' - 10y' + 41y = \sin(t) & (E_4) : y'' - 2y' + 2y = \cos(t)e^t \\ (E_5) : y'' - 4y' + 3y = 2e^t - 3\cos 2t & \end{array}$$

Exercice 8 (♥) – Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = x, y(0) = y'(0) = 0;$
2. $y'' + 9y = x + 1, y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1;$
3. $y'' - 2y' + y = \sin^2(x)$
4. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$

Exercice 9 (♦) – On considère la fonction $f : t \mapsto \ln \left(\sqrt{\frac{1+t^2}{1-t^2}} \right)$

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $] -1; 1[$. Expliciter $f'(t)$ pour tout $t \in] -1; 1[$.
2. Soit l'équation différentielle d'inconnue x :

$$(E) : x' - \frac{x}{t-1} = \frac{2t}{1+t+t^2+t^3}.$$

- (a) Résoudre (E) sur $] -1, 1[$.
- (b) Déterminer la solution g de (E) sur $] -1, 1[$ telle que $g(0) = 1$.

Exercice 10 (♥) – Un circuit électrique se compose en série d'un condensateur de capacité C et d'une résistance R , alimentés par un générateur de force électromotrice V . On note $Q(t)$ la charge du condensateur et $I(t)$ l'intensité du courant au cours du temps t .

1. Montrer que $t \mapsto Q(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V$$

et résoudre celle-ci sachant que la charge initiale du condensateur est nulle et V est constante.

2. Montrer que $t \mapsto I(t)$ vérifie l'équation

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt}$$

et calculer $I(t)$ sachant qu'à l'instant $t = 0$ l'intensité du courant vaut I_0 et que $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$.

Exercice 11 (♠) – On emprunte un capital $S > 0$ sur une durée $T > 0$, au taux d'intérêt $\tau > 0$. Le remboursement est linéaire, progressif ou dégressif, c'est à dire que le remboursement par unité de temps est de la forme $\rho(t) = at + R$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $R > 0$.

1. En supposant l'unité de temps petite devant T , montrer que le capital restant dû à l'instant t (que l'on notera $y(t)$) vérifie l'équation différentielle

$$y' - \tau y + \rho = 0.$$

2. Résoudre cette équation et trouver la relation qui lie R et a . Déterminer la valeur de R pour que les remboursements par unité de temps soient constants.

Exercice 12 (Oscillation d'un ressort) (♠) – Nous allons décrire le mouvement d'une masse m fixée à l'extrémité d'un ressort (en position verticale) de raideur k qu'on étire d'une longueur y_0 et qu'on lâche. On repère la position de la masse par son ordonnée $y(t)$ sur un axe vertical orienté vers le haut et dont l'origine est la position d'équilibre du ressort avec la masse à son extrémité.

1. On suppose dans cette question qu'il n'y a pas de force de frottement. Montrer que $y(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$my'' + ky = 0$$

et la résoudre. À quel type de mouvement a-t-on affaire?

2. On suppose maintenant que la masse est plongée dans un liquide qui provoque une force de frottement opposée au mouvement et proportionnelle à la vitesse, valant $-cy'$. Montrer que l'équation différentielle régissant le mouvement de la masse est

$$my'' + cy' + ky = 0$$

et la résoudre en distinguant trois cas selon la valeur de $c^2 - 4km$. À quel type de mouvement a-t-on affaire dans chacun des cas?

Exercice 13 (♠) – (Oscillations forcées ou pourquoi ne pas défilier au pas sur un pont)
Un bloc de masse m , attaché à un ressort de raideur k , est soumis à une force extérieure $\vec{F}$ s'exerçant dans l'axe du ressort et dont l'intensité au temps t est donnée par $F(t) = F \sin(\alpha t)$ où F et α sont des nombres réels positifs.

1. Justifier que le déplacement $y(t)$ du bloc au temps t satisfait l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = \frac{F}{m} \sin(\alpha t)$$

où ω est une constante dans $\mathbb{R}_+^*$ que l'on exprimera en fonction des données.

2. Résoudre l'équation différentielle. Qu'arrive-t-il si la valeur de α est proche de ω ?

Exercice 14 (♠) – On considère l'équation différentielle :

$$(E): (1 + e^x)^2 y'' - 2e^x(1 + e^x)y' - (3e^x + 1)y = 0$$

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable. On considère la fonction $g: x \mapsto \frac{f(x)}{1 + e^x}$.

1. Après avoir justifié rapidement que g est deux fois dérivable, exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les quantités $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ puis $(1 + e^x)^2 f''(x) - 2e^x(1 + e^x)f'(x) - (3e^x + 1)f(x)$ en fonction de $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.
2. Montrer que f est une solution de (E) SI, ET SEULEMENT SI g est une solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants notée (F).
3. Résoudre (F) puis (E).

Exercice 15 (♥) –

1. Montrer que l'équation différentielle $y'' + y = 3x^2$ admet une solution de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
2. En déduire l'unique solution du problème de Cauchy

$$y'' + y = 3x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Exercice 16 (♦) – Le but de cet exercice est la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)y'' + ty' - y = t + \sqrt{t^2 + 1}. \quad (E)$$

1. Démontrer que pour tous nombres réels x et t ,

$$\operatorname{sh}(x) = t \iff x = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right).$$

2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On introduit la fonction $z: \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(\operatorname{sh}(x)) \end{matrix}$.
 - (a) Montrer que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer z' et z'' à l'aide de f' et f'' .
 - (b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $t = \operatorname{sh}(x)$. Montrer que

$$(t^2 + 1)f''(t) + tf'(t) - f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1} \iff z''(x) - z(x) = e^x.$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $z'' - z = e^x$.
4. Conclure.

Exercice 17 (♥) – Résoudre les équations différentielles suivantes avec les changements de variables indiqués.

1. $x^2 y'' + 3x y' + y = (x+1)^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en effectuant le changement de variable $t = \ln x$.
2. $(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en effectuant le changement de variable $t = \arctan(x)$.

Exercice 18 (♥) – Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $(1+e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x + 1)y = xe^x$ en posant $z(x) = (1+e^x)y(x)$;
2. $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$, en posant $z(x) = xy(x)$.

Exercice 19 (♠) – Soit (E) l'équation $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$.

1. Montrer que si (E) admet une solution polynomiale de degré 2, alors elle est nécessairement de degré deux.
2. Trouver une solution polynomiale non nulle p de (E) .
3. Justifier qu'une fonction y deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme $y = p \times z$, où z est une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer qu'une fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable est solution de (E) si et seulement si la fonction $Z = z'$ (où z est définie comme à la question précédente) est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre un (E') à préciser.
5. Résoudre (E) .

Exercice 20 (♠) – Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(\star) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f'(-x) = \sin(2x).$$

On pourra raisonner par analyse-synthèse en commençant par montrer que de telles applications sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21 (♠) –

1. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + e^{x^2}y = 0$ tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + e^{x^2}y = 0$ est bornée. (**Indication** : étudier la fonction auxiliaire $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2}y'(x)^2$.)

Exercice 22 (♠) – Soit $f : [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Le but de cet exercice est de trouver les solutions définies sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ du problème différentiel suivant :

$$y'' + y = f, \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

On introduit pour cela la fonction

$$F : \begin{array}{ll} [0; \frac{\pi}{2}] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto -\cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt + \sin(x) \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t) \cos(t) dt \end{array}$$

Montrer que F est deux fois dérivable. Exprimer $F + F''$ en fonction de f , puis conclure.

Exercice 23 (♠) – Déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1.$$

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!