

EXERCICES — CHAPITRE 12

Solution 1 –

1. L'équation différentielle homogène associée est $y' - 3y = 0$. Les solutions de cette équation homogène sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{3t}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On remarque que la fonction constante égale à $\frac{-2}{3}$ est une solution particulière de $y' - 3y = 2$.

L'ensemble des solutions de $y' - 3y = 2$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{-2}{3} + \lambda e^{3t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

2. L'équation différentielle homogène associée est $y' - 3t^2 y = 0$. $t \mapsto -t^3$ est une primitive de $t \mapsto -3t^2$ sur $\mathbb{R}$, donc les solutions de cette équation homogène sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{t^3}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On remarque que la fonction constante égale à $\frac{-1}{3}$ est une solution particulière de $y' - 3t^2 y = t^2$.

L'ensemble des solutions de $y' - 3t^2 y = t^2$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{-1}{3} + \lambda e^{t^3} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

3. L'équation différentielle homogène associée est $y' + ty = 0$. $t \mapsto \frac{1}{2}t^2$ est une primitive de $t \mapsto t$ sur $\mathbb{R}$, donc les solutions de cette équation homogène sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}t^2}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On va rechercher une solution sous forme polynomiale. Soient a, b, c des réels. On pose $f : t \mapsto at^2 + bt + c$, définie sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } y' + ty = t^3 &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 2at + b + t(at^2 + bt + c) = t^3 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, at^3 + bt^2 + (c + 2a)t + b = t^3 \end{aligned}$$

$$\text{Donc, si } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c + 2a = 0 \\ b = 0 \end{cases}, \text{ alors } f \text{ est solution de } y' + ty = t^3. \text{ On en déduit que } t \mapsto t^2 - 2$$

est une solution particulière de $y' + ty = t^3$

L'ensemble des solutions de $y' + ty = t^3$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^2 - 2 + \lambda e^{-\frac{1}{2}t^2} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

4. L'équation différentielle homogène associée est $y' + 2y = 0$. Les solutions de cette équation homogène sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-2t}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On va rechercher une solution sous forme exponentielle. Soit a un réel. On pose $f : t \mapsto ae^{2t}$, définie sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } y' + 2y = e^{2t} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 2ae^{2t} + 2ae^{2t} = e^{2t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 4a = 1 \end{aligned}$$

Donc $t \mapsto \frac{1}{4}e^{2t}$ est une solution particulière de $y' + 2y = e^{2t}$

L'ensemble des solutions de $y' + 2y = e^{2t}$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{4}e^{2t} + \lambda e^{-2t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

5. L'équation différentielle homogène associée est $y' - 5y = 0$. Les solutions de cette équation homogène sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{5t}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On va rechercher une solution sous forme exponentielle. Soit a un réel. On pose $f : t \mapsto ate^{5t}$, définie sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = a(5t + 1)e^{5t}.$$

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } y' - 5y = e^{5t} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, a(5t + 1)e^{5t} - 5ate^{5t} = e^{5t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (5at + a) - 5(at) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, a = 1 \end{aligned}$$

Donc $t \mapsto te^{5t}$ est une solution particulière de $y' - 5y = e^{5t}$

L'ensemble des solutions de $y' - 5y = e^{5t}$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (\lambda + t)e^{5t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

6. On note $(E_6) : y' - y = \sin(t)$.

L'équation différentielle homogène associée est $y' - y = 0$. Les solutions de cette équation homogène sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^t$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On va rechercher une solution sous forme trigonométrique. Soient a, b des réels. On pose $f : t \mapsto a \cos(t) + b \sin(t)$, définie sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = -a \sin(t) + b \cos(t).$$

$$f \text{ solution de } (E_6) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, -a \sin(t) + b \cos(t)$$

$$-a \cos(t) - b \sin(t) = \sin(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (b - a) \cos(t) + (-a - b) \sin(t) = \sin(t)$$

En prenant $a = b = \frac{-1}{2}$, cette dernière ligne est vérifiée. Donc $t \mapsto \frac{-1}{2}(\cos(t) + \sin(t))$ est une solution particulière de $y' - y = \sin(t)$

L'ensemble des solutions de $y' - y = \sin(t)$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^t - \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t)) \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Solution 2 –

$$1. y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + C e^{-2x}$$

$$2. y(x) = -\cos(x) + \sin(x) + C e^{-x}$$

$$3. y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) e^x + C e^x$$

$$4. y(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + C e^{-x}$$

Solution 3 –

1. On note $(E_1) : y' + (\tan(x))y = \sin(x)$.

L'équation différentielle homogène associée est $y' + (\tan(x))y = 0$. $x \mapsto -\ln(\cos(x))$ est une primitive de $\tan$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, donc les solutions de cette équation homogène

sont les fonctions $\begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{\ln(\cos(x))} \end{array}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est à dire les fonction $\begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \cos(x) \end{array}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On va rechercher une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante. On note $g : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et on pose $f : x \mapsto g(x) \cos(x)$. Alors f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f'(x) = g'(x) \cos(x) - g(x) \sin(x).$$

Alors, on a

$$f \text{ solution de } (E_1) \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, f'(x) + \tan(x)f(x) = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, g'(x) \cos(x) = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, g'(x) = \tan(x)$$

$x \mapsto -\ln(\cos(x))$ est une primitive de $\tan$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, donc

$f_p : \begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\ln(\cos(x)) \cos(x) \end{array}$ est une solution particulière de (E_1) .

L'ensemble des solutions de (E_1) est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda - \ln(\cos(x))) \cos(x) \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

2. On note $(E_2) : y' + (\tan(x))y = \cos^3(x)$.

L'équation différentielle homogène associée est la même que précédemment. Ses solutions sont les fonction $\begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \cos(x) \end{array}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On va rechercher une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante. On note $g : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et on pose $f : x \mapsto g(x) \cos(x)$. Alors f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f'(x) = g'(x) \cos(x) - g(x) \sin(x).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E_2) &\Leftrightarrow \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, f'(x) + \tan(x)f(x) = \cos^3(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, g'(x) \cos(x) = \cos^3(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, g'(x) = \cos^2(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, g'(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \end{aligned}$$

$x \mapsto \frac{1}{4}(2x + \sin(2x))$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, donc

$$f_p : \begin{cases} \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{4}(2x + \sin(2x)) \cos(x) \end{cases} \text{ est une solution particulière de } (E_2).$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(\lambda + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) \right) \cos(x) \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \neq 0$, donc l'équation de l'énoncé équivaut à

$$(E_3) \quad y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}.$$

L'équation différentielle homogène associée est $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 0$. $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est

une primitive de $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$, donc les solutions de cette équation homogène

sont les fonctions $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est à dire les fonction

$$\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda}{1+x^2} \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On va rechercher une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante. On note $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et on pose $f : x \mapsto \frac{g(x)}{1+x^2}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{g'(x)(1+x^2) - 2xg(x)}{(1+x^2)^2}.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E_3) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + \frac{2x}{1+x^2}f(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \frac{g'(x)(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 1 \end{aligned}$$

$x \mapsto x$ est une primitive de $x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$, donc

$$f_p : \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{1+x^2} \end{array} \text{ est une solution particulière de } (E_3).$$

L'ensemble des solutions de (E_3) est donc

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda + x}{1+x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Solution 4 –

1. $y(x) = \frac{C-x}{1+x^2}$
2. $y(x) = \sqrt{1+x^2}(C+x)$
3. $y(x) = \frac{C + \arctan x}{1+x^2}$

Solution 5 –

1. (a) L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{3x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

- (b) Recherche d'une solution particulière. On introduit $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $y : x \mapsto C(x)e^{3x}$. La fonction y est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = (C'(x) + 3C(x))e^{3x}$.

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_1) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 3y(x) = e^{2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, C'(x)e^{3x} = e^{2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, C'(x) = e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc si on choisit $C : x \mapsto -e^{-x}$, on obtient que la fonction définie par $y(x) = -e^{-x}e^{3x} = -e^{2x}$ est solution de (E_1) .

(c) Finalement, l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{3x} - e^{2x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

2. On a $(E_2) \iff y' + \frac{2}{x}y = 0$. Une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x}$ est $2\ln$, donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_2) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda}{x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

3. On a $(E_3) \iff y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

(a) Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\arcsin$, donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{\arcsin(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

(b) Une solution évidente est $x \mapsto -1$.

(c) Finalement, l'ensemble des solutions de (E_3) est

$$\left\{ \begin{array}{l}]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{\arcsin(x)} - 1 \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

4. On a $(E_4) \iff y' - \frac{x}{x^2-1}y = \frac{1+x-x^2}{x^2-1}$.

(a) Une primitive de $x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$ est $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(|x^2-1|)$, c'est-à-dire $x \mapsto \ln(\sqrt{1-x^2})$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\left\{ \begin{array}{l}]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \sqrt{1-x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

(b) Recherche d'une solution particulière. On introduit $C :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $y : x \mapsto C(x)\sqrt{x^2-1}$. La fonction y est dérivable et pour tout

$$x \in]-1; 1[, y'(x) = C'(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}C(x).$$

$$\begin{aligned} y \text{ sol. de } (E_4) &\iff \forall x \in I, y'(x) - \frac{x}{x^2-1}y(x) = \frac{1+x-x^2}{x^2-1} \\ &\iff \forall x \in I, C'(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}C(x) - \frac{x}{x^2-1}C(x)\sqrt{1-x^2} = \frac{1+x-x^2}{x^2-1} \\ &= \frac{1+x-x^2}{x^2-1} \\ &\iff \forall x \in I, C'(x) = \frac{(1+x-x^2)}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$\frac{1+x-x^2}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - x(1-x^2)^{-3/2}$$

donc si on choisit $C(x) = -\arcsin(x) - \sqrt{1-x^2}$, la fonction définie par $y(x) = -\arcsin(x)\sqrt{1-x^2} - 1$ est solution de (E_4) .

(c) Finalement, l'ensemble des solutions de (E_4) est

$$\left\{ \begin{array}{l}]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \sqrt{1-x^2} - \arcsin(x)\sqrt{1-x^2} - 1 \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

5. (a) Une primitive de $x \mapsto -\tan(x)$ est $x \mapsto \ln(|\cos(x)|)$, c'est-à-dire $x \mapsto \ln(\cos(x))$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\left\{ \begin{array}{l}]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda}{\cos(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

(b) Recherche d'une solution particulière. On introduit $C :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $y : x \mapsto \frac{C(x)}{\cos(x)}$. La fonction y est dérivable et pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $y'(x) = \frac{C'(x)\cos(x) + C(x)\sin(x)}{\cos(x)^2}$.

$$\begin{aligned} y \text{ sol. de } (E_5) &\iff \forall x \in I, y'(x) - y(x)\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)^3} \\ &\iff \forall x \in I, \frac{C'(x)}{\cos(x)} + \frac{C(x)\tan(x)}{\cos(x)} - \frac{C(x)\tan(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)^3} \\ &\iff \forall x \in I, C'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}. \end{aligned}$$

donc si on choisit $C : x \mapsto \tan(x)$, la fonction définie par $y(x) = \frac{\tan(x)}{\cos(x)}$ est solution de (E_5) .

(c) Finalement, l'ensemble des solutions de (E_5) est

$$\left\{ \begin{array}{l}]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda + \tan(x)}{\cos(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

6. On a $(E_6) \iff y' - \frac{1}{x \ln(x)} y = \frac{3}{x}$.

(a) Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(|\ln(x)|)$, c'est-à-dire $x \mapsto \ln(-\ln(x))$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\left\{ \begin{array}{l}]0; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\lambda \ln(x) \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l}]0; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \ln(x) \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

(b) Recherche d'une solution particulière. On introduit $C :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $y : x \mapsto C(x) \ln(x)$. La fonction y est dérivable et pour tout $x \in]0; 1[$, $y'(x) = C'(x) \ln(x) + \frac{C(x)}{x}$.

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_6) &\iff \forall x \in]0; 1[, \quad y'(x) - \frac{1}{x \ln(x)} y(x) = \frac{3}{x} \\ &\iff \forall x \in]0; 1[, \quad C'(x) \ln(x) + \frac{C(x)}{x} - \frac{C(x) \ln(x)}{x \ln(x)} = \frac{3}{x} \\ &\iff \forall x \in]0; 1[, \quad C'(x) = \frac{3}{x \ln(x)}. \end{aligned}$$

donc si on choisit $C : x \mapsto 3 \ln(-\ln(x))$, la fonction définie par $y(x) = 3 \ln(-\ln(x)) \ln(x)$ est solution de (E_6) .

(c) Finalement, l'ensemble des solutions de (E_6) est

$$\left\{ \begin{array}{l}]0; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \ln(x) - 3 \ln(-\ln(x)) \ln(x) \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

7. (a) L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{2x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

(b) Recherche d'une solution particulière. On introduit $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $y : x \mapsto C(x) e^{2x}$. La fonction y est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = C'(x) e^{2x} + 2C(x) e^{2x}$.

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_7) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - 2y(x) = \operatorname{sh}(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad C'(x) e^{2x} + 2C(x) e^{2x} - 2C(x) e^{2x} = \operatorname{sh}(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad C'(x) = \frac{e^{-x} + e^{-3x}}{2}. \end{aligned}$$

donc si on choisit $C : x \mapsto -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{6}$, la fonction définie par $y(x) = \left(-\frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{6}\right) e^{2x} = -\frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{6}$ est solution de (E_7) .

(c) Finalement, l'ensemble des solutions de (E_7) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{2x} - \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{6} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

8. On a $(E_8) \iff y' + \frac{x}{x^2 - 1} y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

(a) Une primitive de $x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}$ est $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(|x^2 - 1|)$, c'est-à-dire $x \mapsto \ln(\sqrt{x^2 - 1})$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\left\{ \begin{array}{l}]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 1}} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

(b) La fonction $x \mapsto 1$ est solution évidente.

(c) Finalement, l'ensemble des solutions de (E_8) est

$$\left\{ \begin{array}{l}]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 1}} + 1 \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Solution 6 –

1. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 5r + 6 = 0$, dont les racines réelles sont 2 et 3. L'ensemble des solutions à valeurs réelles de $y'' - 5y' + 6y = 0$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

2. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r = 0$, dont les racines réelles sont 0 et 3.
L'ensemble des solutions à valeurs réelles de $y'' - 3y' = 0$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda + \mu e^{3x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

3. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$, qui a une unique racine double réelle -2 .

L'ensemble des solutions à valeurs réelles de $y'' + 4y' + 4y = 0$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda + \mu x) e^{-2x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

4. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 2 = 0$, qui n'a pas de racines réelles, et qui a deux racines complexes conjuguées : $1 + i$ et $1 - i$.

L'ensemble des solutions à valeurs réelles de $y'' - 2y' + 2y = 0$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

Solution 7 –

1. On note $(E_1) : y'' + 2y' - 8y = e^{3t}$. L'équation homogène associée est $(E_{1,h}) : y'' + 2y' - 8y = 0$

L'équation caractéristique associée à $(E_{1,h})$ est $r^2 + 2r - 8 = 0$, dont les racines réelles sont -4 et 2 .

L'ensemble des solutions à valeurs réelles de $(E_{1,h})$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-4t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

Pour rechercher une solution particulière, on remarque que 3 n'est pas solution de l'équation caractéristique. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \alpha e^{3t}$. Alors f_α est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f_\alpha \text{ solution de } (E_1) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 9\alpha e^{3t} + 2 \cdot 3\alpha e^{3t} - 8\alpha e^{3t} = e^{3t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 9\alpha + 6\alpha - 8\alpha = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \alpha = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Ainsi, $f_{\frac{1}{7}}$ est une solution particulière de (E_1) . L'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-4t} + \frac{1}{7} e^{3t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

2. On note $(E_2) : y'' - 3y' + 4y = 2e^{4t}$. L'équation homogène associée est $(E_{2,h}) : y'' - 3y' + 4y = 0$

L'équation caractéristique associée à $(E_{2,h})$ est $r^2 - 3r + 4 = 0$, dont les racines réelles sont -1 et 4 .

L'ensemble des solutions à valeurs réelles de $(E_{2,h})$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{4t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

Pour rechercher une solution particulière, on remarque que 4 est solution simple de l'équation caractéristique. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \alpha t e^{4t}$. Alors f_α est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f'_\alpha(t) = \alpha(4t + 1) e^{4t}$$

$$f''_\alpha(t) = \alpha(16t + 8) e^{4t}$$

$$\begin{aligned} f_\alpha \text{ solution de } (E_2) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \alpha(16t + 8) e^{4t} - 3\alpha(4t + 1) e^{4t} + 4\alpha t e^{4t} = 2e^{4t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \alpha(16t + 8) - 3\alpha(4t + 1) + 4\alpha t = 2 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Ainsi, $f_{\frac{2}{5}}$ est une solution particulière de (E_2) . L'ensemble des solutions de (E_2) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{-t} + (\mu + \frac{2}{5}t) e^{4t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

3. On note $(E_3) : y'' - 10y' + 41y = \sin(t)$. L'équation homogène associée est $(E_{3,h}) : y'' - 10y' + 41y = 0$

L'équation caractéristique associée à $(E_{3,h})$ est $r^2 - 10r + 41 = 0$, qui n'a pas de racines réelles et a deux racines complexes conjuguées $5 + 4i$ et $5 - 4i$

L'ensemble des solutions à valeurs réelles de $(E_{3,h})$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{5t} (\lambda \cos(4t) + \mu \sin(4t)) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

Pour rechercher une solution particulière, on va utiliser que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t) = \text{Im}(e^{it})$. On cherche donc une solution particulière de

$$(E_{3,\mathbb{C}}) : y'' - 10y' + 41y = e^{it}$$

On remarque que i n'est pas solution de l'équation caractéristique. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \alpha e^{it}$. Alors f_α est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f'_\alpha(t) = \alpha i e^{it}$$

$$f''_\alpha(t) = -\alpha e^{it}$$

$$f_\alpha \text{ solution de } (E_3) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, -\alpha e^{it} - 10\alpha i e^{it} + 41\alpha t e^{it} = e^{it}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, -\alpha - 10\alpha i + 41\alpha t = 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{40 - 10i}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{4 + i}{170}$$

Ainsi, $f_{p,\mathbb{C}} : t \mapsto \frac{1}{170}(4 + i)e^{it}$ est une solution particulière de $(E_{3,\mathbb{C}})$.

Donc, $\text{Im}(f_{p,\mathbb{C}}) : t \mapsto \frac{1}{170}(4 \sin(t) + \cos(t))$ est une solution particulière de (E_3) .

L'ensemble des solutions à valeurs réelles de (E_3) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{5t}(\lambda \cos(4t) + \mu \sin(4t)) + \frac{1}{170}(4 \sin(t) + \cos(t)) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

4. On note $(E_4) : y'' - 2y' + 2y = \cos(t)e^t$. L'ensemble des solutions à valeurs réelles de $(E_{4,h})$ est (voir exercice 3)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On pose

$$(E_{4,\mathbb{C}}) : y'' - 2y' + 2y = e^{it}e^t = e^{(1+i)t}$$

Comme $\cos$ est la partie réelle de $t \mapsto e^{it}$, on va chercher une solution particulière de $(E_{4,\mathbb{C}})$ et sa partie réelle sera une solution de (E_4) .

Pour rechercher une solution particulière, on va utiliser que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t) = \text{Im}(e^{it})$.

On remarque que $1 + i$ est racine simple de l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \alpha t e^{(1+i)t}$. Alors f_α est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f'_\alpha(t) = \alpha((1+i)t + 1)e^{(1+i)t}$$

$$f''_\alpha(t) = \alpha((1+i)^2 t + (1+i) + (1+i))e^{(1+i)t} = 2\alpha(it + 1 + i)e^{(1+i)t}$$

$$f_\alpha \text{ solution de } (E_3) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 2\alpha(it + 1 + i)e^{(1+i)t} - 2\alpha((1+i)t + 1)e^{(1+i)t} + 2\alpha t e^{(1+i)t} = e^{(1+i)t}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 2\alpha(it + 1 + i) - 2\alpha((1+i)t + 1) + 2\alpha t = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 2i\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \alpha = \frac{-i}{2}$$

Ainsi, $f_{p,\mathbb{C}} : t \mapsto \frac{-i}{2}e^{(1+i)t}$ est une solution particulière de $(E_{4,\mathbb{C}})$.

Donc, $\text{Re}(f_{p,\mathbb{C}}) : t \mapsto \frac{1}{2}t e^t \sin(t)$ est une solution particulière de (E_4) .

L'ensemble des solutions à valeurs réelles de (E_4) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t(\lambda \cos(t) + (\mu + \frac{t}{2})) \sin(t) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

5. On note $(E_5) : y'' - 4y' + 3y = 2e^t - 3\cos(2t)$. L'équation homogène associée est $(E_{5,h}) : y'' - 4y' + 3y = 0$

L'équation caractéristique associée à $(E_{5,h})$ est $r^2 - 4r + 3 = 0$, qui a deux racines réelles : 1 et 3.

L'ensemble des solutions à valeurs réelles de $(E_{5,h})$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{3t} \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Pour rechercher une solution particulière, on va utiliser le principe de superposition. On définit

$$(E_{5,a}) : y'' - 4y' + 3y = e^t$$

$$(E_{5,b}) : y'' - 4y' + 3y = \cos(2t)$$

• On cherche une solution particulière de $(E_{5,a})$. On remarque que 1 est solution simple de l'équation caractéristique. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f_\alpha : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \alpha t e^t \end{matrix}$. Alors f_α est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f'_\alpha(t) = \alpha(t+1)e^t$$

$$f''_\alpha(t) = \alpha(t+2)e^t$$

$$\begin{aligned} f_\alpha \text{ solution de } (E_{5,a}) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \alpha(t+2)e^t - 4\alpha(t+1)e^t + 3\alpha t e^t = e^t \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \alpha(t+2) - 4\alpha(t+1) + 3\alpha t = 1 \\ &\Leftrightarrow -2\alpha = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $f_{p,a} : t \mapsto \frac{-1}{2} t e^t$ est une solution particulière de $(E_{5,a})$.

• On cherche une solution particulière de $(E_{5,b})$. On pose

$$(E_{5,b,\mathbb{C}}) : y'' - 4y' + 3y = e^{i2t}$$

On remarque que $2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose

$$f_\alpha : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \alpha e^{2it} \end{matrix}. \text{ Alors } f_\alpha \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } t \in \mathbb{R}$$

$$f'_\alpha(t) = 2i\alpha e^{2it}, \quad f''_\alpha(t) = -4\alpha e^{2it}$$

$$\begin{aligned} f_\alpha \text{ solution de } (E_{5,b,\mathbb{C}}) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, -4\alpha e^{2it} - 4 \times 2i\alpha e^{2it} + 3\alpha e^{2it} = e^{2it} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, -4\alpha - 8i\alpha + 3\alpha = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{-1-8i} = \frac{-1+8i}{65} \end{aligned}$$

Ainsi, $f_{p,b,\mathbb{C}} : t \mapsto \frac{-1+8i}{65} e^{2it}$ est une solution particulière de $(E_{5,b,\mathbb{C}})$.

Donc, $\text{Re}(f_{p,b,\mathbb{C}}) : t \mapsto \frac{1}{65}(-\cos(2t) - 8\sin(2t))$ est une solution particulière de $(E_{5,b})$. D'après le principe de superposition,

$$f_p : t \mapsto -t e^t + \frac{3}{65}(\cos(2t) + 8\sin(2t))$$

est une solution particulière de (E_5) .

L'ensemble des solutions à valeurs réelles de (E_5) est

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda - t)e^t + \mu e^{3t} + \frac{3}{65}(\cos(2t) + 8\sin(2t)) \end{matrix} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Solution 8 –

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, dont 1 est racine double. Les solutions générales de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x.$$

Comme 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1. Mais $y(x) = ax + b$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -2a + ax + b = x \iff \forall x \in \mathbb{R}, (a-1)x + (b-2a) = 0.$$

Un polynôme réel étant identiquement nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on en déduit que $a = 1$ et $b = 2$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x + (x+2).$$

Si on ajoute les conditions $y(0) = y'(0) = 0$, on obtient les équations

$$\lambda + 2 = 0 \text{ et } \lambda + \mu + 1 = 0,$$

soit $\lambda = -2$ et $\mu = 1$. La seule solution de l'équation est donc la fonction

$$x \mapsto (x-2)e^x + (x+2).$$

2. L'équation homogène $y'' + 9y = 0$ admet pour équation caractéristique associée $r^2 + 9 = 0$, dont les racines sont $3i$ et $-3i$. Les solutions réelles de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \cos(3x)$ et $t \mapsto \sin(3x)$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1, et on trouve $x \mapsto \frac{x+1}{9}$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto A \cos(3x) + B \sin(3x) + \frac{x+1}{9}.$$

La condition $y(0) = 0$ entraîne $A = -1/9$. Et la condition $y'(0) = 1$ entraîne $B = \frac{8}{27}$.

3. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto (A + Bx)e^x, A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour résoudre l'équation avec second membre, on linéarise $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$. Par le principe de superposition des solutions, on cherche d'abord une solution particulière qui correspond à $1/2$. La fonction constante égale à $1/2$ convient. On cherche ensuite une solution particulière convenant à $\cos(2x)$ (il suffira ensuite de multiplier par $-1/2$ pour trouver une solution convenant à $-\cos(2x)/2$). On cherche cette solution particulière sous la forme $y(x) = c \cos(2x) + d \sin(2x)$. On a alors

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (-3c - 4d) \cos(2x) + (4c - 3d) \sin(2x).$$

On cherche donc c et d solutions du système

$$\begin{cases} -3c - 4d = 1 \\ 4c - 3d = 0 \end{cases}$$

On trouve $c = -3/25$ et $d = -4/25$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$x \mapsto (A + Bx)e^x + \frac{1}{2} + \frac{3}{50} \cos(2x) + \frac{2}{25} \sin(2x), A, B \in \mathbb{R}$$

4. On commence par résoudre l'équation homogène $y'' - 4y' + 3y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$, dont les racines sont 1 et 3. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}$. Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = (ax + b)e^{-x}$. En dérivant, on trouve

$$y'(x) = (-ax + (-b + a))e^{-x}, y''(x) = (ax + (b - 2a))e^{-x}$$

et donc a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} 8a = 2 \\ 8b - 6a = 1 \end{cases}$$

On résout ce système, et on trouve qu'une solution particulière est donnée par $y_0(x) = \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-x}$. Finalement, les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-x} + \lambda e^x + \mu e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Solution 9 –

1. $t \mapsto \frac{1+t^2}{1-t^2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$\frac{1+t^2}{1-t^2} > 0 \iff t^2 < 1,$$

donc $t \mapsto \sqrt{\frac{1+t^2}{1-t^2}}$ est définie sur $] -1, 1[$. Elle y est strictement positive donc f est définie sur $] -1, 1[$.

Pour ce qui est de la dérivabilité, comme $\frac{1+t^2}{1-t^2} > 0$ pour tout $t \in] -1, 1[$, les théorèmes généraux nous assurent que $t \mapsto \sqrt{\frac{1+t^2}{1-t^2}}$ est dérivable sur $] -1, 1[$ et finalement, f l'est aussi.

Pour tout $t \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+t^2}{1-t^2}}} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+t^2}{1-t^2}}} \times \frac{2t(1-t^2) - (1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2} \\ &= \frac{1}{2\frac{1+t^2}{1-t^2}} \times \frac{2t - 2t^3 + 2t + 2t^3}{(1-t^2)^2} \\ &= \frac{1}{(1+t^2)} \times \frac{2t}{(1-t^2)} = \frac{2t}{1-t^4} \end{aligned}$$

2. (a) L'équation homogène associée à (E) est

$$(E_h) \quad x' - \frac{x}{t-1} = 0$$

$t \mapsto -\ln(1-t)$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t-1}$ sur $] -1, 1[$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$f: \begin{array}{ll}] -1, 1[& \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \lambda e^{\ln(1-t)} = \lambda(1-t) \end{array}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On va rechercher une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante. On note $k:] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et on pose $h: t \mapsto k(t)(1-t)$. Alors h est dérivable sur $] -1, 1[$ et pour tout $t \in] -1, 1[$,

$$h'(t) = k'(t)(1-t) - k(t).$$

Alors, on a en notant $I \in]-1; 1[$

h solution de (E)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \forall t \in I, f'(t) - \frac{1}{t-1}f(t) &= \frac{2t}{1+t+t^2+t^3} \\ \Leftrightarrow \forall t \in I, k'(t)(1-t) - k(t) - \frac{1}{t-1}k(t)(1-t) &= \frac{2t}{1+t+t^2+t^3} \\ \Leftrightarrow \forall t \in I, k'(t)(1-t) - k(t) + k(t) &= \frac{2t}{1+t+t^2+t^3} \\ \Leftrightarrow \forall t \in I, k'(t) &= \frac{2t}{(1+t+t^2+t^3)(1-t)} \\ \Leftrightarrow \forall t \in I, k'(t) = f'(t) &= \frac{2t}{1-t^4} \end{aligned}$$

On en déduit que $h : t \mapsto f(t)(1-t)$ est une solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\left\{ \begin{array}{l}]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (\lambda + f(t))(1-t) \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

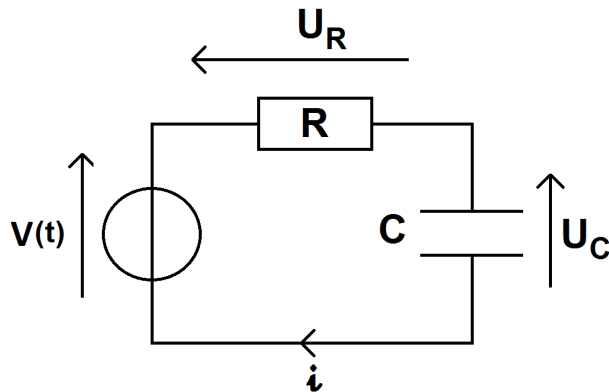
(b) Soit g une solution de (E) telle que $g(0) = 1$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in]-1, 1[$, $g(t) = (\lambda + f(t))(1-t)$.

$$1 = g(0) = (\lambda + \ln(1)) = \lambda.$$

Donc pour tout $t \in]-1; 1[$,

$$g(t) = (1 + f(t))(1-t).$$

Solution 10 – Le circuit décrit est le suivant



On a les relations suivantes pour tout $t \geq 0$

$$U_R(t) = RI(t)$$

$$Q(t) = CU_C(t)$$

1. La loi des mailles nous dit que pour tout $t \geq 0$, $e(t) = U_C(t) + U_R(t)$ et donc

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} + RI(t). \quad (E_1)$$

L'intensité étant la dérivée de la charge électrique,

$$V = \frac{Q(t)}{C} + R \frac{dQ}{dt}(t).$$

On va l'écrire de sorte à avoir un coefficient 1 devant la dérivée de Q .

$$\frac{V}{R} = \frac{Q}{RC} + Q'.$$

L'équation homogène associée est $0 = \frac{Q}{RC} + Q'$, donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{-\frac{t}{RC}} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

$Q_p : t \mapsto VC$ est une solution particulière de $\frac{V}{R} = \frac{Q}{RC} + Q'$, donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{-\frac{t}{RC}} + VC \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

La solution vérifiant que la charge du condensateur est nulle à l'état initial est alors

$$Q : t \mapsto VC(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

2. L'intensité étant la dérivée de la charge électrique, en dérivant l'équation (E₁), on obtient $V'(t) = \frac{Q'(t)}{C} + RI'(t)$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{R} V'(t) = \frac{I(t)}{RC} + I'(t) \quad (E_2)$$

Ici, V est la fonction $t \mapsto V_0 \sin(\omega t)$, donc $V' : t \mapsto \omega V_0 \cos(\omega t)$

L'équation homogène est la même. On cherche une solution particulière en passant en complexe.

$$\frac{\omega V_0}{R} e^{i\omega t} = \frac{I(t)}{RC} + I'(t) \quad (E_{2,\mathbb{C}})$$

On cherche une solution particulière de la forme $f : t \mapsto \alpha e^{i\omega t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g \text{ solution de } (E_{2,\mathbb{C}}) &\Leftrightarrow \forall t > 0, \frac{\omega V_0}{R} e^{it} = \frac{f(t)}{RC} + f'(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t > 0, \frac{\omega V_0}{R} e^{i\omega t} = \frac{\alpha e^{i\omega t}}{RC} + i\omega \alpha e^{i\omega t} \\ &\Leftrightarrow \forall t > 0, C\omega V_0 = \alpha(1 + \omega RCi) \\ &\Leftrightarrow \frac{C\omega V_0}{1 + \omega RCi} = \alpha \\ &\Leftrightarrow \frac{C\omega V_0}{1 + \omega^2 \tau^2} (1 - \omega \tau i) = \alpha \end{aligned}$$

en posant $\tau = RC$. Donc $f : t \mapsto \frac{C\omega V_0}{1 + \omega^2 \tau^2} (1 - \omega \tau i) e^{i\omega t}$ est une solution particulière de $(E_{2,\mathbb{C}})$. Pour tout $t \geq 0$,

$$f(t) = \frac{C\omega V_0}{1 + \omega^2 \tau^2} (\cos(\omega t) + \tau \omega \sin(\omega t) + i[\sin(\omega t) - \tau \omega \cos(\omega t)])$$

Ainsi, $\text{Re}(f) : t \mapsto \frac{C\omega V_0}{1 + \omega^2 \tau^2} (\cos(\omega t) + \tau \omega \sin(\omega t))$ est une solution particulière de (E_2) . L'ensemble des solutions de (E_2) est donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \lambda e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{C\omega V_0}{1 + \omega^2 \tau^2} (\cos(\omega t) + \tau \omega \sin(\omega t)) \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On détermine alors que la solution vérifiant $I(0) = I_0$ est

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{C\omega V_0}{1 + \omega^2 \tau^2} (\cos(\omega t) + \tau \omega \sin(\omega t) - e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{array}$$

Solution 11 –

1. On se place à un instant $t \geq dt$. On étudie l'évolution sur un petit instant dt .

Les intérêts ajoutés entre t et $t + dt$ sont $y(t)\tau dt$.

On rembourse $\rho(t) dt$. On a donc

$$y(t + dt) - y(t) = \tau y(t) dt - \rho(t) dt.$$

$$\frac{y(t + dt) - y(t)}{dt} = \tau y(t) - \rho(t).$$

En faisant tendre dt vers 0, on obtient

$$(E) \quad y'(t) = \tau y(t) - \rho(t).$$

2. L'équation homogène associée est $y' - \tau y = 0$ dont les solutions sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{\tau t}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soient α et β des réels et $f : t \mapsto \alpha t + \beta$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall t \geq 0, \alpha - \tau \alpha t - \tau \beta = -\alpha t - R \\ &\Leftrightarrow \forall t \geq 0, (a - \tau \alpha)t + (\alpha - \tau \beta + R) = 0 \end{aligned}$$

En prenant $\alpha = \frac{a}{\tau}$ et $\beta = \frac{a + R\tau}{\tau^2}$, on en déduit que $f_p : t \mapsto \frac{a}{\tau} t + \frac{a + R\tau}{\tau^2}$ est une solution particulière de (E) . L'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{a}{\tau} t + \frac{a + R\tau}{\tau^2} + \lambda e^{\tau t} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soit f la solution correspondant à la situation de l'énoncé et λ son paramètre. Alors $f(0) = S$ et $f(T) = 0$. Donc

$$\lambda + \frac{1}{\tau^2} (\tau R + a) = S, \quad \frac{a}{\tau} T + \frac{a + R\tau}{\tau^2} + \lambda e^{\tau T} = 0$$

$$\lambda = S - \frac{1}{\tau^2} (\tau R + a), \quad \frac{a}{\tau} T + \frac{a + R\tau}{\tau^2} + \left(S - \frac{1}{\tau^2} (\tau R + a) \right) e^{\tau T} = 0$$

$$\begin{aligned} a\tau T + (a + R\tau) + (\tau^2 S - (\tau R + a)) e^{\tau T} &= 0 \\ a(\tau T + 1 - e^{\tau T}) + R\tau(1 - e^{\tau T}) + \tau^2 S e^{\tau T} &= 0 \end{aligned}$$

Les remboursements sont constants lorsque $a = 0$, c'est à dire

$$R(1 - e^{\tau T}) + \tau S e^{\tau T} = 0$$

$$R = \frac{\tau S e^{\tau T}}{e^{\tau T} - 1}$$

Solution 12 –

1. D'après le principe fondamental de la dynamique (nous sommes bien dans un référentiel galiléen), on a $my'' = -ky$, donc

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0$$

L'équation caractéristique est $r^2 + \frac{k}{m} = 0$, donc les racines sont $i\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $-i\sqrt{\frac{k}{m}}$, donc les solutions de l'équation différentielle forment l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + \mu \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

Le mouvement est périodique, sinusoïdal.

2. Cette fois-ci, le principe fondamental de la dynamique nous donne $my'' = -ky - cy'$ et donc

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

L'équation caractéristique est $r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m} = 0$. Son discriminant est $\Delta = \frac{c^2 - 4km}{m^2}$. On distingue les cas selon le nombre de racines réelles :

- Si $c^2 - 4km > 0$, les racines sont

$$r_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \text{ Et } r_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$

donc les solutions de l'équation différentielle forment l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

r_1 et r_2 sont négatifs, donc le mouvement est amorti (régime transitoire puis régime stationnaire nul). Il y a trop de frottements pour avoir une oscillation.

- Si $c^2 - 4km = 0$, il y a une unique racine réelle

$$r_0 = \frac{-c}{2m}.$$

donc les solutions de l'équation différentielle forment l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

r_0 est négatif, donc le mouvement est amorti (régime transitoire puis régime stationnaire nul).

- Si $c^2 - 4km < 0$, les racines sont

$$r_1 = \frac{-c - i\sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \text{ Et } r_2 = \frac{-c + i\sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$

donc les solutions de l'équation différentielle forment l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{\frac{-c}{2m}t} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m}t\right) \right) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

r_0 est négatif et cette fois le mouvement est sinusoïdal amorti (sinus dans une enveloppe exponentielle décroissante).

Solution 13 –

1. D'après le principe fondamental de la dynamique, pour tout $t \geq 0$,

$$my''(t) = F(t) - ky(t)$$

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = \frac{F}{m} \sin(\alpha t)$$

en posant $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

2. L'équation homogène associée est

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

L'équation caractéristique est $r^2 + \omega^2 = 0$, donc les racines sont $i\omega$ et $-i\omega$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

Pour la recherche de solution particulière, on passe en complexe en on pose l'équation différentielle, car

$$(E_{\mathbb{C}}): \quad y'' + \omega^2 y = \frac{F}{m} e^{i\alpha t}$$

On suppose que $\omega \neq \alpha$. On cherche alors une solution sous la forme

$$f: t \mapsto \gamma e^{i\alpha t}$$

où γ est une constante complexe. f est deux fois dérivable et pour tout $t \geq 0$,

$$f'(t) = \gamma \alpha i e^{i\alpha t}$$

$$f''(t) = -\gamma \alpha^2 e^{i\alpha t}$$

$$f \text{ solution de } (E_C) \Leftrightarrow \forall t \geq 0, -\gamma \alpha^2 e^{i\alpha t} + \omega^2 \gamma e^{i\alpha t} = \frac{F}{m} e^{i\alpha t}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \geq 0, -\gamma \alpha^2 + \omega^2 \gamma = \frac{F}{m}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \geq 0, \gamma = \frac{F}{m(\omega^2 - \alpha^2)}$$

Donc $f : t \mapsto \frac{F}{m(\omega^2 - \alpha^2)} e^{i\alpha t}$ est une solution particulière de (E_C) . La partie réelle de f est

$$f_p : t \mapsto \frac{F}{m(\omega^2 - \alpha^2)} \cos(\alpha t).$$

C'est une solution particulière de (E) .

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) + \frac{F}{m(\omega^2 - \alpha^2)} \cos(\alpha t) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Lorsque α se rapproche de ω , alors $\omega^2 - \alpha^2$ est très petit et les oscillations sont de très fortes amplitudes. (Et éventuellement, ça fait boum)

Solution 14 –

1. g est deux fois dérivable car f l'est et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = g(x)(1 + e^x).$$

$$f'(x) = g'(x)(1 + e^x) + e^x g(x).$$

$$f''(x) = (1 + e^x)g''(x) + 2e^x g'(x) + e^x g(x)$$

$$\begin{aligned} & (1 + e^x)^2 f''(x) - 2e^x(1 + e^x)f'(x) - (3e^x + 1)f(x) \\ &= (1 + e^x)^2 [(1 + e^x)g''(x) + 2e^x g'(x) + e^x g(x)] \\ & \quad - 2e^x(1 + e^x)(g'(x)(1 + e^x) + e^x g(x)) - (3e^x + 1)g(x)(1 + e^x) \\ &= (1 + e^x)^3 g''(x) + [2e^x(1 + e^x)^2 - 2e^x(1 + e^x)^2] g'(x) \\ & \quad + [e^x(1 + e^x)^2 - 2(e^x)^2(1 + e^x) - 1 - 3(e^x)^2 - 4e^x] g(x) \\ &= (1 + e^x)^3 g''(x) + [-1 - 3e^x - 3(e^x)^2 - (e^x)^3] g(x) \\ &= (1 + e^x)^3 g''(x) - (1 + e^x)^3 g(x) \end{aligned}$$

2. On raisonne par équivalence.

$$f \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (1 + e^x)^2 f''(x) - 2e^x(1 + e^x)f'(x) - (3e^x + 1)f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (1 + e^x)^3 (g''(x) - g(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) - g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow g \text{ solution de } (F)$$

où (F) est l'équation différentielle $y'' - y = 0$.

3. L'ensemble des solutions de (F) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

D'après les questions précédentes, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda e^x + \mu e^{-x})(1 + e^x) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Solution 15 –

1. Posons $y : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Cette fonction est deux fois dérivable, avec $y' : x \mapsto 2ax + b$, $y'' : x \mapsto 2a$. Ainsi,

$$y \text{ est solution de l'équation différentielle} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2a + ax^2 + bx + c = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -6 \end{cases}$$

Finalement, $x \mapsto 3x^2 - 6$ est une solution de l'équation différentielle.

2. Les racines du polynôme caractéristique sont i et $-i$, donc l'ensemble des solutions de $y'' + y = 3x^2$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \sin(x) + \mu \cos(x) + 3x^2 - 6 \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Notons f l'unique solution du problème de Cauchy proposé. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f : x \mapsto \lambda \sin(x) + \mu \cos(x) + 3x^2 - 6$. La fonction f est dérivable et $f' : x \mapsto -\mu \sin(x) +$

$\lambda \cos(x) + 6x$. Par ailleurs,

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu - 6 = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

donc $f : x \mapsto 2 \sin(x) + 7 \cos(x) + 3x^2 - 6$.

Solution 16 –

1. Soient $x, t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{sh}(x) = t &\iff e^{-x}(e^{2x} - 1) = 2t \\ &\iff e^{2x} - 2te^x + t^2 = t^2 + 1 \\ &\iff (e^x - t)^2 = t^2 + 1 \\ &\iff e^x - t = \sqrt{t^2 + 1} \text{ Ou } e^x - t = -\sqrt{t^2 + 1} \\ &\iff x = t + \sqrt{t^2 + 1} \text{ Ou } x = t - \sqrt{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Or $t^2 + 1 \geq t^2$, donc par croissance de la racine carrée $\sqrt{t^2 + 1} \geq |t|$, puis $t + \sqrt{t^2 + 1} \geq 0$. De même, $-\sqrt{t^2 + 1} \leq -|t|$ puis $t - \sqrt{t^2 + 1} \leq t - |t| \leq 0$. Ainsi, l'unique solution de l'équation est $\ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$.

2. (a) z est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$z'(x) = \text{ch}(x) f'(\text{sh}(x))$$

z' est dérivable en tant que composée et produit de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$z''(x) = \text{ch}(x)^2 f''(\text{sh}(x)) + \text{sh}(x) f'(\text{sh}(x))$$

(b) On a, en utilisant la question 1,

$$\begin{aligned} (t^2 + 1) f''(t) + t f'(t) - f(t) &= t + \sqrt{t^2 + 1} \\ \iff (\text{sh}(x)^2 + 1) f''(\text{sh}(x)) + \text{sh}(x) f'(\text{sh}(x)) - f(\text{sh}(x)) &= e^x \\ \iff \text{ch}(x)^2 f''(\text{sh}(x)) + \text{sh}(x) f'(\text{sh}(x)) - f(\text{sh}(x)) &= e^x \\ \iff z''(x) - z(x) &= e^x \end{aligned}$$

3. Après calculs (rien de difficile, c'est une équation linéaire du second ordre standard), on obtient que l'ensemble des solutions de $z' - z = e^x$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{x e^x}{2} \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

4. **Analyse.** Soit f une solution de (E). Soit $x \in \mathbb{R}$, $t = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$. D'après 2.(b), z est solution de $z'' - z = e^x$, donc avec la question précédente on obtient qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $z(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{x e^x}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(t) &= z(x) \\ &= \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{x e^x}{2} \\ &= \lambda(t + \sqrt{t^2 + 1}) + \frac{\mu}{t + \sqrt{t^2 + 1}} + \frac{\ln(t + \sqrt{t^2 + 1})(t + \sqrt{t^2 + 1})}{2}. \end{aligned}$$

Synthèse. On vérifie que ces fonctions sont effectivement solution de (E) (il faut dériver... c'est long mais facile!).

L'ensemble des solutions de (E) est finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (\lambda + \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}))(t + \sqrt{t^2 + 1}) + \frac{\mu}{t + \sqrt{t^2 + 1}} \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Solution 17 –

1. Soit $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Posons $z : t \mapsto y(e^t)$. La fonction z est deux fois dérivable en tant que composée de fonctions deux fois dérivables et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$z'(t) = e^t y'(e^t) \quad \text{Et} \quad z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t = \ln(x)$. On a

$$\begin{aligned} x^2 y''(x) + 3x y'(x) + y(x) &= (x + 1)^2 \\ \iff e^{2t} y''(e^t) + 3e^t y'(e^t) + y(e^t) &= (e^t + 1)^2 \\ \iff (e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t)) + 2e^t y'(e^t) + y(e^t) &= (e^t + 1)^2 \\ \iff z''(t) + 2z'(t) + z(t) &= e^{2t} + 2e^t + 1. \end{aligned}$$

La racine (double) du polynôme caractéristique de $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$ étant égale à -1 , on en déduit que les solutions de l'équation homogène de (E') sont définies par $y(x) = (\lambda x + \mu) e^{-x}$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Après calculs (en utilisant le principe de superposition des solutions), on trouve que les solutions de $z'' + 2z' + z = e^{2t} + 2e^t + 1$ sont définies par $z(t) = (\lambda t + \mu) e^{-t} + \frac{e^{2t}}{9} + \frac{e^t}{2} + 1$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il s'ensuit que l'ensemble des solutions de l'équation de départ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\lambda \ln(x) + \mu}{x} + \frac{x^2}{9} + \frac{x}{2} + 1 \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. Soit $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Posons $z: t \mapsto y(\tan t)$. La fonction z est deux fois dérivable sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et, pour tout $t \in I$,

$$z'(t) = (1 + \tan(t)^2) y'(\tan(t))$$

$$z''(t) = \tan(t)^2 (1 + \tan(t)^2) y''(\tan(t)) + \tan(t) (1 + \tan(t)^2) 2y'(\tan(t)).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $t \in I$.

$$(1 + x^2) y''(x) + 2x(1 + x^2) y'(x) + 4y(x) = 0$$

$$\iff (1 + \tan(t)^2) y''(\tan(t)) + 2 \tan(t) (1 + \tan(t)^2) y'(\tan(t)) + 4y(\tan(t)) = 0$$

$$\iff z''(t) + 4z(t) = 0.$$

Les racines du polynôme $X^2 + 4 = 0$ étant égales à $2i$ et $-2i$, on obtient que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $z'' + 4z = 0$ est

$$\left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda \sin(2t) + \mu \cos(2t) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation de départ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \sin(2 \arctan(x)) + \mu \cos(2 \arctan(x)) \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Solution 18 –

1. z est deux fois dérivable et vérifie

$$z'(x) = (1 + e^x) y'(x) + e^x y(x), z''(x) = (1 + e^x) y''(x) + 2e^x y'(x) + e^x y(x).$$

Il est facile de vérifier que y vérifie l'équation différentielle de départ si et seulement si z vérifie l'équation différentielle

$$z'' + z = x e^x.$$

Or, on a ici une équation différentielle à coefficients constants facile à résoudre, dont les solutions sont les fonctions $z(x) = A \cos x + B \sin x + \frac{x-1}{2} e^x$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. Les fonctions y qui sont solutions de l'équation différentielle initiale sont donc les fonctions

$$y(x) = (1 + e^x)^{-1} \left(A \cos x + B \sin x + \frac{x-1}{2} e^x \right).$$

2. $z = xy$ est deux fois dérivable, et on a $z' = xy' + y$ et $z'' = xy'' + 2y'$. Ainsi, z vérifie l'équation

$$z'' + 2z' + z = 0$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$ dont -1 est racine double. Ainsi, z vérifie $\lambda x e^{-x} + \mu e^{-x}$. On en déduit que les solutions de l'équation initiale sur $]0, +\infty[$ ou sur $] -\infty, 0[$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu \frac{e^{-x}}{x}.$$

Soit maintenant y une solution sur $\mathbb{R}$. Alors, il existe des constantes $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-x} + \mu_1 \frac{e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ \lambda_2 e^{-x} + \mu_2 \frac{e^{-x}}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pour que y admette une limite en 0, il est nécessaire que $\mu_1 = \mu_2 = 0$, puis que $\lambda_1 = \lambda_2$ pour que les limites à droite et à gauche coïncident. Ainsi, puisque $x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-x}$$

Solution 19 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ avec $a_n \neq 0$ et $P: x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ une fonction polynomiale de degré n . P est dérivable deux fois en tant que fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \quad \text{Et} \quad P''(x) = \sum_{k=2}^n k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P \text{ vérifie } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 + 1) \sum_{k=2}^n k(k-1) a_k x^{k-2} - 2 \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=2}^n k(k-1) a_k x^k + \sum_{k=2}^n k k(k-1) a_k x^{k-2} \\ &\quad - 2 \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0. \end{aligned}$$

En particulier, le monôme de degré n de $x \mapsto \sum_{k=2}^n k(k-1)a_k x^k + \sum_{k=2}^n k k(k-1)a_k x^{k-2} - 2 \sum_{k=0}^n a_k x^k$ doit être nul, c'est-à-dire que $n(n-1)a_n - 2a_n = 0$, puis, comme $a_n \neq 0$, $n(n-1) - 2 = 0$, d'où $n^2 - n - 2 = 0$. Comme $n \in \mathbb{N}$, on en déduit $n = 2$.

2. D'après la question précédente, une solution polynomiale est de degré 2, donc on introduit $p : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. La fonction p est deux fois dérivable en tant que fonction polynomiale, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$p'(x) = 2ax + b \quad \text{Et} \quad p''(x) = 2a.$$

On a donc

$$\begin{aligned} p \text{ vérifie } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 + 1)2a - 2(ax^2 + bx + c) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad -2bx + 2a - 2c = 0 \\ &\iff \begin{cases} -2b &= 0 \\ 2a - 2c &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b &= 0 \\ a &= c \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on peut choisir $p : x \mapsto x + 1$ comme solution de l'équation (E).

3. Puisque p ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut poser $z = y/p$ et z est deux fois dérivable d'après le théorème de dérivation d'un quotient.
4. On reprend les notations précédentes avec $p : x \mapsto x^2 + 1$. On a

$$y' = p'z + pz' \quad \text{et} \quad y'' = p''z + 2p'z' + pz'',$$

d'où

$$\begin{aligned} py'' - 2y &= p(p''z + 2p'z' + pz'') - 2zp \\ &= p(2y + 2p'z' + pz'') - 2zp \\ &= p^2 z'' + 2p'pz' \\ &= p(pZ' + 2p'Z). \end{aligned}$$

Ainsi, comme p ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, y est solution de (E) si et seulement si $Z = z'$ est solution de l'équation

$$(E') : \quad (1 + t^2)Z' + 4tZ = 0.$$

5. Puisqu'une primitive de $t \mapsto \frac{4t}{1+t^2}$ est $t \mapsto 2\ln(1+t^2)$, les solutions de l'équation homogène (E') sont de la forme

$$Z : t \mapsto \frac{k}{(1+t^2)^2}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

D'après les questions précédentes, pour en déduire les solutions z de (E), on peut calculer

$$\int^x \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

On a

$$\int^x \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int^x \frac{dt}{1+t^2} - \int^x \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \arctan(x) - \int^x \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2}.$$

Or les fonctions définies par $u(t) = t$ et $v(t) = -\frac{1}{2(t^2+1)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc la formule d'intégration par parties donne :

$$\int^x \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2} = \left[\frac{-t}{2(t^2+1)} \right]^x + \int^x \frac{dt}{2(t^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan(x).$$

Donc :

$$\int^x \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto k_1 \left(\frac{t}{2} + \frac{t^2+1}{2} \arctan(t) \right) + k_2(1+t^2) \mid (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}.$$

Solution 20 –

1. **Analyse.** Soit f une solution de l'équation fonctionnelle. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\sin(2x) - f(-x)$$

avec $x \mapsto -\sin(2x) - f(-x)$ dérivable, donc f' est dérivable, c'est-à-dire que f est deux fois dérivable. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = -2\cos(2x) + f'(-x)$$

d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(-x) = f''(x) + 2\cos(2x)$. En utilisant l'équation fonctionnelle, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(2x) - f(x) = f''(x) + 2\cos(2x)$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) = \sin(2x) - 2\cos(2x)$$

- (a) Après calculs, on trouve qu'une solution de $y'' + y = \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$ est

$$x \mapsto -\frac{\sin(2x)}{3}.$$

(b) Après calculs, on trouve qu'une solution de $y'' + y = \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$ est

$$x \mapsto -\frac{\cos(2x)}{3}.$$

(c) Avec le principe de superposition des solutions, on obtient que

$$x \mapsto -\frac{\sin(2x)}{3} + \frac{2\cos(2x)}{3}$$

est une solution de : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) = \sin(2x) - 2\cos(2x)$

Ainsi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que f est la fonction

$$f : x \mapsto \lambda \sin(x) + \mu \cos(x) - \frac{\sin(2x)}{3} + \frac{2\cos(2x)}{3}.$$

2. **Synthèse.** Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Posons

$$f : x \mapsto \lambda \sin(x) + \mu \cos(x) - \frac{\sin(2x)}{3} + \frac{2\cos(2x)}{3}.$$

Cette fonction est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lambda \cos(x) - \mu \sin(x) - \frac{2\cos(2x)}{3} - \frac{4\sin(2x)}{3}.$$

Comme $\sin$ est impaire et $\cos$ est paire,

$$f'(-x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) - \frac{2\cos(2x)}{3} + \frac{4\sin(2x)}{3}.$$

Ainsi

$$(\star) \iff \forall x \in \mathbb{R}, \sin(2x) + (\lambda + \mu)(\sin(x) + \cos(x)) = \sin(2x)$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, (\lambda + \mu)(\sin(x) + \cos(x)) = 0$$

En évaluant en 0, cela implique que $\lambda + \mu = 0$. Réciproquement, si $\lambda + \mu = 0$, alors cette dernière ligne est vraie. D'où

$$(\star) \iff \lambda = -\mu$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation fonctionnelle est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \sin(x) - \lambda \cos(x) - \frac{\sin(2x)}{3} + \frac{2\cos(2x)}{3} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Solution 21 –

1. Notons $A(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, une primitive de e^{x^2} . On ne sait pas expliciter cette primitive.

Les solutions de $y' + e^{x^2} y = 0$ s'écrivent $f(x) = \lambda e^{-A(x)}$.

Si $x \geq 1$, on a par positivité de l'intégrale $A(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \geq 0$ et comme $e^{t^2} \geq 1$ alors

$$A(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \geq \int_0^x 1 dt = x$$

En conséquence :

$$0 \leq e^{-A(x)} \leq e^{-x}$$

Ainsi,

$$0 \leq |f(x)| \leq |\lambda| e^{-x}$$

et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

2. Supposons que y vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation, et posons $u(x) = y(x)^2 + e^{-x^2} y'(x)^2$. La fonction u est à valeurs positives, dérivable, et

$$u'(x) = 2y'(x)y(x) + e^{-x^2} 2y''(x)y'(x) - 2xe^{-x^2} y'(x)^2$$

en utilisant que $e^{-x^2} y''(x) = -y(x)$ (car y est solution de l'équation différentielle) on obtient :

$$u'(x) = -2xe^{-x^2} y^2.$$

Ainsi la fonction u est croissante sur $] -\infty; 0[$ et décroissante sur $] 0; +\infty[$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}, 0 \leq u(x) \leq u(0)$. Or $y^2(x) \leq u(x)$ par construction, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |y(x)| \leq \sqrt{u(0)} = \sqrt{y(0)^2 + y'(0)^2}$$

Solution 22 – Puisque $x \mapsto \int_0^x f(t) \sin(t) dt$ et $x \mapsto \int_{\pi/2}^x f(t) \cos(t) dt$ sont des primitives, ces fonctions sont dérivables donc F l'est aussi et, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sin(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt - \cos(x) f(x) \sin(x) \\ &\quad + \cos(x) \int_{\pi/2}^x f(t) \cos(t) dt + \sin(x) f(x) \cos(x) \\ &= \sin(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt + \cos(x) \int_{\pi/2}^x f(t) \cos(t) dt. \end{aligned}$$

On obtient de même que F' est dérivable et, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} F''(x) &= \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt + \sin^2(x) f(x) \\ &\quad - \sin(x) \int_0^x f(t) \cos(t) dt + \cos^2(x) f(x) \\ &= -F(x) + f(x) \end{aligned}$$

donc

$$F'' + F = f$$

Ainsi F est une solution de l'équation $(E) : y'' + y = f$. Par ailleurs, les solutions de l'équation homogène sont définies par $y(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi les solutions de (E) sont définies par $y(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + F(x)$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Soit f une solution du problème de Cauchy proposé (F est une solution puisque $F(0) = 0 = F(\frac{\pi}{2})$, donc il en existe au moins une). Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f : x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + F(x)$.

$$f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \iff \lambda = \mu$$

Donc l'ensemble cherché est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \cos(x) + \lambda \sin(x) + F(x) \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solution 23 –

1. **Analyse.** Soit f une solution de l'équation. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = f(x) + x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt.$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, puisque $t \mapsto t f(t)$ est continue, la fonction $x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto x f(x)$. De même, $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto f(x)$. Ainsi g est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = f'(x) + x f(x) + \int_0^x f(t) dt - x f(x) = f'(x) + \int_0^x f(t) dt.$$

La fonction g' est à son tour dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g''(x) = f''(x) + f(x).$$

Si f est solution de l'équation, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(x) = 0$ puisque dans ce cas la fonction g est constante égale à 1. Il existe alors deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a \cos(x) + b \sin(x).$$

2. **Synthèse :** Réciproquement, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f_{a,b} : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$.

• En évaluant la relation demandée en 0, on obtient

$$f_{a,b}(0) + 0 = 1$$

donc $f_{a,b}(0) = 1$, ce qui donne $a = 1$.

• Posons

$$g_{a,b} : x \mapsto f_{a,b}(x) + \int_0^x (x-t)f_{a,b}(t) dt.$$

La fonction $g_{a,b}$ est dérivable d'après le même argument que précédemment, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'_{a,b}(x) = f'_{a,b}(x) + \int_0^x f_{a,b}(t) dt = b - b \cos(x) + a \sin(x) + b \cos(x) - a \sin(x) = b.$$

Pour $f_{a,b}$ soit solution, il faut donc que $b = 0$.

• Finalement, l'unique solution possible du problème est la fonction cosinus et on vérifie rapidement qu'elle convient, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(x) + \int_0^x (x-t) \cos(t) dt &= \cos(x) + x \int_0^x \cos(t) dt - \int_0^x t \cos(t) dt \\ &= \cos(x) - x \sin(x) - \operatorname{Re} \left(\int_0^x t e^{it} dt \right). \end{aligned}$$

Or les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{e^{it}}{i}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc via la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^x t e^{it} dt = \left[-it e^{it} \right]_0^x + \int_0^x i e^{it} dt = -ix e^{ix} + \left[e^{it} \right]_0^x$$

donc

$$\operatorname{Re} \left(\int_0^x t e^{it} dt \right) = \operatorname{Re}(-ix e^{ix} + e^{ix} - 1) = x \sin(x) + \cos(x) - 1$$

puis

$$\cos(x) + \int_0^x (x-t) \cos(t) dt = \cos(x) - x \sin(x) - (x \sin(x) + \cos(x) - 1) = 1.$$

Finalement, $\cos$ est l'unique solution du problème.

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!