

EXERCICES — CHAPITRE 11

Exercice 1 (♦) – Calculez une primitive des fonctions suivantes sur les intervalles indiqués.

Cet exercice ne nécessite ni intégration par parties, ni changement de variable.

$f_1 : t \mapsto (2t^2 + 3t + 1) \quad \text{sur } \mathbb{R}$	$f_2 : t \mapsto (t + 1)\sqrt{t} \quad \text{sur }]0; +\infty[$
$f_3 : t \mapsto \frac{(1+t)^2}{\sqrt{t}} \quad \text{sur }]0; +\infty[$	$f_4 : t \mapsto \sin(t) \exp(\cos(t) + 1/2) \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$f_5 : t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)} \quad \text{sur }]0; 1[\text{ puis }]1; +\infty[$	$f_6 : t \mapsto \sin^4(t) \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$f_7 : t \mapsto \cos^3(t) \sin(t) \quad \text{sur } \mathbb{R}$	$f_8 : t \mapsto \cos(3t) \sin(2t) \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$f_9 : t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{1-e^t}} \quad \text{sur }]-\infty; 0[$	$f_{10} : t \mapsto \frac{t}{1+t^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$f_{11} : t \mapsto \frac{1}{t(1+(\ln(t))^2)} \quad \text{sur }]0; +\infty[$	$f_{12} : t \mapsto \exp(3t) \cos(2t) \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$f_{13} : x \mapsto \frac{x}{2x^2 + 4x + 9} \quad \text{sur } \mathbb{R}$	$f_{14} : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$f_{15} : t \mapsto \frac{2t+3}{t^2-5t+6} \quad \text{sur }]2; 3[$	$f_{16} : x \mapsto \frac{x}{x^2+6x+9} \quad \text{sur }]-3; +\infty[$
$f_{17} : x \mapsto \frac{2}{x^2+x+1} \quad \text{sur } \mathbb{R}$	$f_{18} : x \mapsto \frac{x^4}{x^2-4} \quad \text{sur }]-\infty; -2[$
$f_{19} : x \mapsto \frac{3x^3+1}{x^2+2x+1} \quad \text{sur }]-\infty; -1[$	$f_{20} : x \mapsto \frac{x^3-3x+1}{x^2+2x+2} \quad \text{sur } \mathbb{R}$

Exercice 2 (♦) – Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

$f_1 : x \mapsto x \sin(3x^2 + 1) \quad \text{sur } \mathbb{R}$	$f_2 : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 2)^3} \quad \text{sur }]0; +\infty[$
$f_3 : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{sur }]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$	$f_4 : x \mapsto \cos(x)(1 + \sin(x))^3 \quad \text{sur }]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
$f_5 : x \mapsto x^2 \exp(x^3) \quad \text{sur } \mathbb{R}$	$f_6 : x \mapsto \frac{\ln x}{x} \quad \text{sur }]0; +\infty[$
$f_7 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \quad \text{sur }]1; +\infty[$	$f_8 : x \mapsto \tan^2(x) + \sin^2(x) \quad \text{sur }]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

$$f_9 : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^{2x}} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f_{11} : x \mapsto \frac{1}{3+x^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f_{13} : x \mapsto \frac{2}{x^2+4x+6} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f_{15} : x \mapsto \sin(2x) e^x \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f_{17} : x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f_{19} : x \mapsto \cos^2(2x) \sin(3x) \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f_{21} : x \mapsto e^{3x+1} \cos^2(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f_{23} : x \mapsto \frac{3x+4}{1+x^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f_{10} : x \mapsto \cos^4(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f_{12} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4x(-1-x)}} \quad \text{sur }]-1; 0[$$

$$f_{14} : x \mapsto \frac{1}{\text{ch}(x)} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f_{16} : x \mapsto \frac{1}{x+x(\ln x)^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$f_{18} : x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)}} \quad \text{sur }]0; \frac{\pi}{2}[$$

$$f_{20} : x \mapsto \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\sin(3x)}} \quad \text{sur }]0; \frac{\pi}{3}[$$

$$f_{22} : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)+1}} \quad \text{sur } \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$$

$$f_{24} : x \mapsto \frac{2}{x^2-5x+6} \quad \text{sur }]2; 3[.$$

Exercice 3 (♠) – Calculer simultanément les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(t) dt}{\sin(t) + \cos(t)} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t) dt}{\sin(t) + \cos(t)},$$

en calculant leur somme et leur différence.

Exercice 4 (♦) – Calculer les intégrales suivantes en reconnaissant sous l'intégrale une forme classique $u'(t)f'(u(t))$, éventuellement à une constante multiplicative près.

1. $\int_0^1 t e^{t^2} dt$	2. $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan(t)}{\cos^2(t)} dt$	3. $\int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))} dt$
4. $\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt$	5. $\int_0^{\pi/2} \sin(t) \cos^5(t) dt$	6. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\tan(t) + \tan^3(t)) dt$
7. $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt$	8. $\int_0^{-1} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt$	9. $\int_0^1 e^t \sqrt{1+e^t} dt$

Exercice 5 (♦) – Calculer les intégrales suivantes en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^3 \frac{\ln(x)}{x^2} dx & I_2 &= \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)} dx \\ I_3 &= \int_0^1 t^2 \exp(t) dt & I_4 &= \int_0^{\pi/2} t \sin(t) dt \\ I_5 &= \int_1^2 (\ln(x))^2 dx & I_6 &= \int_0^1 x \operatorname{Arctan}(x) dx \\ I_7 &= \int_1^e x^2 \ln(1+x) dx & I_8 &= \int_0^{1/2} \operatorname{Arcsin}(t) dt \\ I_9 &= \int_0^1 (t+1) \operatorname{ch}(t) dt & I_{10} &= \int_0^1 \operatorname{Arctan}(t) dt \end{aligned}$$

Exercice 6 (♥) – Calculer la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de la fonction

$$f : t \mapsto t e^t \cos(2t).$$

Exercice 7 (♥) – Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les primitives des fonctions suivantes (on intégrera par parties).

$$\begin{aligned} g_1 : t &\mapsto t^\alpha \ln(t) \quad \text{sur }]0; +\infty[& g_2 : t &\mapsto (t^2 + t + 1) e^{\alpha t} \quad \text{sur } \mathbb{R} \\ g_3 : t &\mapsto (t^2 + t) \sin(\alpha t) \quad \text{sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 8 (♦) –

En intégrant deux fois par parties, calculer la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_1^{\exp(\pi)} \sin(\ln(x)) dx.$$

Exercice 9 (♥) – Effectuer les changements de variable indiqués dans les intégrales suivantes. On ne demande pas de calculer l'intégrale obtenue.

$$\begin{aligned} \int_1^3 \operatorname{ch}(x^2 - 1) dx \quad (x = t - 1) & \quad \int_0^2 x^3 \cos(x^2) dx \quad (y = x^2) \\ \int_1^4 \sin(\sqrt{t}) dt \quad (u = \sqrt{t}) & \quad \int_{-1}^3 \frac{1}{\operatorname{ch}(w)} dw \quad (x = \exp(w)) \\ \int_1^4 \frac{\exp(x)}{1+x} dx \quad (x = \ln(u)) & \quad \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \quad (x = \cos(u)) \\ \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx \quad (u = \sqrt{x+1}) & \quad \int_{3/2}^{5/2} \frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} dx \quad (x = 2 + \sin(t)) \end{aligned}$$

Exercice 10 (♦) – Calculer les intégrales suivantes avec un changement de variable :

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_1^2 \exp(\sqrt{x}) dx & J_2 &= \int_0^1 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt \quad (\text{poser } t = \tan(u)) \\ J_3 &= \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x)) dx & & (\text{poser } x = \pi/4 - u) \\ J_4 &= \int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt \quad (u = \sqrt{t}) & J_5 &= \int_0^{\operatorname{sh}(1)} \sqrt{1+u^2} du \quad (u = \operatorname{sh}(x)) \\ J_6 &= \int_{-3}^{-4} \frac{x}{x^4 - x^2 - 2} dx \quad (u = x^2) & J_7 &= \int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt \quad (s = \exp(t)) \end{aligned}$$

Exercice 11 (♥) –

Calculer la primitive sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$.
(Utiliser la fonction exponentielle pour faire un changement de variable.)

Exercice 12 (♠) – Les intégrales de Wallis.

Pour tout entier naturel p , on pose $I_p = \int_0^{\pi/2} (\cos(\theta))^p d\theta$.

1. Calculer I_0 et I_1 .

2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_p = \int_0^{\pi/2} (\sin(v))^p dv$.

(On pourra effectuer le changement de variable $v = \frac{\pi}{2} - \theta$.)

3. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{p+2} = \frac{p+1}{p+2} I_p$.

(On pourra écrire $I_{p+2} = \int_0^{\pi/2} (\cos(\theta))^{p+1} \cos(\theta) d\theta$ et intégrer par parties.)

4. En déduire la valeur de I_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 (♠) – Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$, en précisant sur quel(s) intervalle(s) c'est une primitive.

Exercice 14 (♠) – Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{3 + \operatorname{ch}(x)}$, en précisant sur quel(s) intervalle(s) c'est une primitive.

Exercice 15 (♥) –

1. Déterminer des nombres réels a , b et c tels que pour tout nombre réel x distinct de -7 ,

$$\frac{1}{(7+x)(1+x^2)} = \frac{a}{7+x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

2. En posant $u = \tan(t)$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{7 + \tan(t)}.$$

Exercice 16 (♠) – L'objectif de cet exercice est de déterminer tous les triplets réels (α, β, γ) tels que, pour toute fonction polynomiale réelle P de degré inférieur ou égal à 2, on ait

$$\int_2^4 P(t) dt = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4). \quad (1)$$

1. Supposons qu'il existe (α, β, γ) tel que tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifie (1).

(a) Donner la valeur de $\int_2^4 x^2 dx$, puis exprimer $\int_2^4 x^2 dx$ en fonction de α, β, γ .

(b) Reprendre la question précédente avec $\int_2^4 x dx$, puis avec $\int_2^4 1 dx$.

(c) Résoudre le système (S) $\begin{cases} 4\alpha + 9\beta + 16\gamma &= 56/3 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma &= 6 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 2 \end{cases}.$

2. Conclure.

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!