

EXERCICES — CHAPITRE 11

Solution 1 – On note F_i une des primitives de f_i pour i de 1 à 20, définie sur le même intervalle que f_i .

1. $F_1 : t \mapsto \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t.$

2. $F_2 : t \mapsto \frac{2}{5}t^{5/2} + \frac{2}{3}t^{3/2}.$

3. Pour tout $t > 0$, $f_3(t) = \frac{1+2t+t^2}{\sqrt{t}} = t^{-1/2} + 2t^{1/2} + t^{3/2}$, donc une primitive de f_3 est

$$F_3 : t \mapsto 2t^{1/2} + \frac{4}{3}t^{3/2} + \frac{2}{5}t^{5/2}.$$

4. $F_4 : t \mapsto -\exp(\cos(t) + \frac{1}{2}).$

5. $F_5 : t \mapsto \ln(-\ln(t))$ sur $]0, 1[.$

$F_5 : t \mapsto \ln(\ln(t))$ sur $]1, +\infty[.$

On a reconnu une forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = \ln$.

6. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sin^4(t) &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^4 \\ &= \frac{1}{16} (e^{it} - e^{-it})^4 \\ &= \frac{1}{16} (e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{-4it}) \\ &= \frac{1}{8} (\cos(4t) - 4\cos(2t) + 3) \end{aligned}$$

On en déduit une primitive :

$$F_6 : t \mapsto \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \sin(4t) - 2\sin(2t) + 3t \right).$$

7. $F_7 : t \mapsto \frac{-1}{4} \cos(t)^4.$

On a reconnu une forme $u'u^3$ avec $u = \cos$.

8. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(3t) \sin(2t) &= \left(\frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} \right) \left(\frac{e^{2it} - e^{-i2t}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{4i} (e^{5it} - e^{it} + e^{-it} - e^{-5it}) \\ &= \frac{1}{2} (\sin(5t) - \sin(t)) \end{aligned}$$

On en déduit une primitive :

$$F_8 : t \mapsto \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{5} \cos(5t) + \cos(t) \right)$$

9. $F_9 : t \mapsto -2\sqrt{1-e^t}.$

On a reconnu une forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}.$

10. $F_{10} : \frac{1}{2} \ln(1+t^2).$

On a reconnu une forme $\frac{u'}{u}.$

11. $F_{11} : t \mapsto \text{Arctan}(\ln(t)).$

On a reconnu une forme $\frac{u'}{1+u^2}$ avec $u = \ln$.

12. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_{12}(t) = \Re e \left(e^{3t} e^{2it} \right) = \Re e \left(e^{(3+2i)t} \right).$$

$t \mapsto e^{(3+2i)t}$ a comme primitive sur $\mathbb{R}$ $t \mapsto \frac{1}{(3+2i)} e^{(3+2i)t}$. Pour tout réel t , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(3+2i)} e^{(3+2i)t} &= \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} e^{(3+2i)t} \\ &= \frac{3-2i}{13} e^{(3+2i)t} \\ &= e^{3t} \frac{3-2i}{13} e^{2it} \\ &= e^{3t} \frac{3-2i}{13} (\cos(2t) + i \sin(2t)) \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle de cette expression, on obtient une primitive de f_{12}

$$F_{12} : t \mapsto e^{3t} \left(\frac{3}{13} \cos(2t) + \frac{2}{13} \sin(2t) \right).$$

13. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{x}{2x^2+4x+9} &= \frac{1}{4} \frac{4x+4}{2x^2+4x+9} - \frac{1}{2x^2+4x+9} \\ &= \frac{1}{4} \frac{4x+4}{2x^2+4x+9} - \frac{1}{7 \left(\sqrt{\frac{2}{7}}x + \sqrt{\frac{2}{7}} \right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{4} \frac{4x+4}{2x^2+4x+9} - \frac{1}{\sqrt{14} \left(\sqrt{\frac{2}{7}}x + \sqrt{\frac{2}{7}} \right)^2 + 1}\end{aligned}$$

On en déduit une primitive de f_{13} :

$$F_{13} : x \mapsto \frac{1}{4} \ln(2x^2+4x+9) - \frac{1}{\sqrt{14}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{2}{7}}x + \sqrt{\frac{2}{7}}\right).$$

14. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

On en déduit une primitive de f_{14} :

$$F_{14} : x \mapsto x - \operatorname{Arctan}(x).$$

15. Pour tout $t \in]2; 3[$,

$$\frac{2t+3}{t^2-5t+6} = \frac{2t+3}{(t-2)(t-3)} = \frac{-7}{t-2} + \frac{9}{t-3}.$$

On en déduit une primitive de f_{15} :

$$F_{15} : t \mapsto -7 \ln(t-2) + 9 \ln(3-t). \text{ (On a bien fait attention au signe des arguments des logarithmes)}$$

16. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,

$$\frac{x}{x^2+6x+9} = \frac{x}{(x+3)^2} = \frac{x+3-3}{(x+3)^2} = \frac{1}{x+3} - \frac{3}{(x+3)^2}.$$

On en déduit une primitive de f_{16} sur $]3; +\infty[$:

$$F_{16} : x \mapsto \ln(x+3) + \frac{3}{x+3}.$$

17. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{2}{x^2+x+1} = 2 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{8}{3} \frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1}$$

On en déduit une primitive de f_{17} sur $\mathbb{R}$:

$$F_{17} : x \mapsto \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

18. Pour tout $x \in]-\infty, -2[$,

$$\begin{aligned}\frac{x^4}{x^2-4} &= \frac{(x^2+4)(x^2-4)+16}{x^2-4} \\ &= (x^2+4) + \frac{16}{x^2-4} \\ &= x^2+4 + \frac{16}{(x-2)(x+2)} \\ &= x^2+4 + \frac{4}{x-2} - \frac{4}{x+2}\end{aligned}$$

On en déduit une primitive de f_{18} sur $] -\infty; -2[$:

$$F_{18} : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 4x + 4 \ln(2-x) - 4 \ln(-2-x). \text{ (On a bien fait attention au signe des arguments des logarithmes)}$$

19. Pour tout $x \in]-\infty, -1[$,

$$\begin{aligned}\frac{3x^3+1}{x^2+2x+1} &= \frac{3(x-2)(x^2+2x+1)+9x+7}{x^2+2x+1} \\ &= 3(x-2) + \frac{9x+7}{x^2+2x+1} \\ &= 3(x-2) + \frac{9}{2} \times \frac{2x+2-\frac{4}{9}}{(x+1)^2} \\ &= 3(x-2) + \frac{9}{2} \times \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

On en déduit une primitive de f_{19} sur $] -\infty; -1[$:

$$F_{19} : x \mapsto \frac{3}{2}x^2 - 6x + 9 \ln(-1-x) + \frac{2}{(1+x)} \cdot \text{(On a bien fait attention au signe de l'argument du logarithme)}$$

20. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{x^3-3x+1}{x^2+2x+2} &= \frac{(x^2+2x+2)(x-2)-x+5}{x^2+2x+2} \\ &= x-2 - \frac{1}{2} \frac{2x+2-12}{x^2+2x+2} \\ &= x-2 - \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{6}{x^2+2x+2} \\ &= x-2 - \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{6}{(x+1)^2+1}\end{aligned}$$

On en déduit une primitive de f_{20} sur $\mathbb{R}$:

$F_{20} : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 2) + 6\operatorname{Arctan}(x + 1)$ (On a bien fait attention au signe de l'argument du logarithme)

Solution 2 –

1. Une primitive de f_1 est $x \mapsto -\frac{1}{6}\cos(3x^2 + 1)$.

2. Une primitive de f_2 est $x \mapsto \frac{-1}{6(x^3 + 3x + 2)^2}$. (Forme $\frac{u'}{u^3}$)

3. Une primitive de f_3 est $x \mapsto -\ln|\cos(x)|$.

4. Une primitive de f_4 est $x \mapsto \frac{1}{4}(1 + \sin x)^4$.

5. Une primitive de f_5 est $x \mapsto \frac{1}{3}e^{x^3}$.

6. Une primitive de f_6 est $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x)^2$. (Forme $u'u$)

7. Une primitive de f_7 est $x \mapsto \frac{1}{2}\arcsin(x^2)$.

8. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\tan^2(x) + \sin^2(x) = \tan^2(x) + 1 - \cos^2(x) = \tan^2(x) - \frac{1 + \cos(2x)}{2},$$

donc une primitive de f_8 est $x \mapsto -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \tan(x)$.

9. Une primitive de f_9 est $x \mapsto \arctan(e^x)$.

10. Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut linéariser $\cos^4(x)$:

$$\cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8},$$

donc une primitive de f_{10} est $x \mapsto \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3x}{8}$.

11. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{3+x^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2},$$

donc une primitive de f_{11} est $x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$.

12. Soit $x \in]-1; 0[$.

$$-4x^2 - 4x = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \frac{1}{4} = 1 - 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2,$$

puis,

$$\frac{1}{\sqrt{4x(-1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(2x+1)^2}},$$

donc une primitive de f_{12} est $x \mapsto \frac{1}{2}\arcsin(2x + 1)$.

13. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2 = 2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right),$$

donc une primitive de f_{13} est $x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)$.

14. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{e^{-x}(1 + e^{2x})} = \frac{2e^x}{1 + (e^x)^2},$$

donc une primitive de f_{14} est $x \mapsto 2\arctan(e^x)$.

15. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int^x \sin(2x) e^x dx &= \int^x \Im m(e^{x(1+2i)}) dx \\ &= \Im m\left(\frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i}\right) + c \\ &= e^x \Im m\left(\frac{(\cos(2x) + i\sin(2x))(1-2i)}{5}\right) + c \end{aligned}$$

(où $c \in \mathbb{R}$), donc une primitive de f_{15} est $x \mapsto \frac{e^x}{5}(-2\cos(2x) + \sin(2x))$.

16. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{x + x\ln(x)^2} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \ln(x)^2},$$

donc une primitive de f_{16} est $x \mapsto \arctan(\ln(x))$.

17. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\sin(2x)}{1 + \cos^2(x)} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1 + \cos^2(x)} = -\frac{(1 + \cos^2(x))'(x)}{1 + \cos^2(x)},$$

donc une primitive de f_{17} est $x \mapsto -\ln(1 + \cos^2(x))$.

18. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)}} = \frac{\tan'(x)}{\sqrt{\tan(x)}},$$

donc une primitive de f_{18} est $x \mapsto 2\sqrt{\tan(x)}$.

19. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos^2(2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4x),$$

puis,

$$\cos^2(2x) \sin(3x) = \frac{1}{2} \sin(3x) + \frac{1}{2} \cos(4x) \sin(3x).$$

Or,

$$\cos(4x) \sin(3x) = \frac{1}{2} (\sin(7x) + \sin(x)),$$

donc une primitive de f_{19} est $x \mapsto -\frac{1}{6} \cos(3x) - \frac{1}{28} \cos(7x) + \frac{1}{4} \cos(x)$.

20. Une primitive de f_{20} est $x \mapsto \frac{2}{3} \sqrt{\sin(3x)}$.

21. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x),$$

donc

$$e^{3x+1} \cos^2(x) = \frac{1}{2} e^{3x+1} + \frac{1}{2} \Re e(e^{3x+1+2ix}),$$

puis une primitive F_{21} de f_{21} est définie par

$$F_{21}(x) = \frac{1}{6} e^{3x+1} + \frac{1}{2} \Re e \left(\frac{e^{3x+1+2ix}}{3+2i} \right) = \frac{1}{6} e^{3x+1} + \frac{e^{3x+1}}{26} \Re e(e^{2ix}(3-2i)) \frac{1}{6}.$$

Finalement, $x \mapsto e^{3x+1} + \frac{1}{26} e^{3x+1} (3 \cos(2x) + 2 \sin(2x))$ est une primitive de f_{21} .

22. Soit $x \in]e^{-1}; +\infty[$.

$$f_{22}(x) = \frac{\ln'(x)}{\sqrt{\ln(x)+1}},$$

donc une primitive de f_{22} est $x \mapsto 2\sqrt{\ln(x)+1}$.

23. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{3x+4}{1+x^2} = \frac{3}{2} \frac{2x}{1+x^2} + 4 \frac{1}{1+x^2},$$

donc une primitive de f_{23} est $x \mapsto \frac{3}{2} \ln(1+x^2) + 4 \arctan(x)$.

24. Une racine évidente de $X^2 - 5X + 6$ est 2, et le produit des racines vaut 6 (cf. relations coefficients/racines), donc l'autre racine est 3. D'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$,

$$\frac{2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-2} - \frac{A}{x-3}.$$

Cette relation se réécrit, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$,

$$\frac{2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{Ax - 3A - Ax + 2A}{x^2 - 5x + 6}.$$

On en déduit $-A = 2$, puis $A = -2$.

Donc une primitive de f_{24} est $x \mapsto -2 \ln|2-x| + 2 \ln|x-3|$.

Solution 3 – On a :

$$I + J = \int_0^{\pi/4} 1 \, dt = \frac{\pi}{4}$$

$$I - J = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(t) - \sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} \, dt = \left[\ln(\cos t + \sin t) \right]_0^{\pi/4} = \ln(\sqrt{2}),$$

donc,

$$\begin{cases} I + J &= \pi/4 \\ I - J &= \ln(\sqrt{2}) \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 2I &= \pi/4 + \sqrt{2} \\ I - J &= \ln(\sqrt{2}) \end{cases}.$$

Finalement, $I = \frac{\pi}{8} + \frac{\ln(\sqrt{2})}{2}$ et $J = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln(\sqrt{2})}{2}$.

Solution 4 –

1. Forme $u' e^u$

$$\int_0^1 t e^{t^2} \, dt = \left[\frac{1}{2} e^{t^2} \right]_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2}.$$

2. Forme $\frac{u'}{u^3}$.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan(t)}{\cos^2(t)} \, dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)} \, dt = \left[\frac{1}{2 \cos(t)^2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2 \frac{2}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

3. Forme $\frac{u'}{u}$.

$$\int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))} \, dt = [\ln(1+\ln(t))]_1^e = \ln(1+1) - \ln(1+0) = \ln 2$$

4. Forme $\frac{u'}{u}$.

$$\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \, dt = [\ln(|\sin(t)|)]_{-\pi/2}^{-\pi/4} = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(1) = \frac{-1}{2} \ln(2)$$

5. Forme $u'u^5$.

$$\int_0^{\pi/2} \sin(t) \cos^5(t) dt = \left[-\frac{1}{6} \cos(t)^6 \right]_0^{\pi/2} = 0 + \frac{1}{6}.$$

6. Forme $u'u$ avec $u = \tan$.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\tan(t) + \tan^3(t)) dt &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \tan^2(t)) \tan(t) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \tan(t)^2 \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

7. Forme $\frac{u'}{u}$

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt = [\ln(1+e^t)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2).$$

8. Forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

$$\int_0^{-1} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt = \int_0^{-1} \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}} dt = [\sqrt{t^2+1}]_0^{-1} = \sqrt{2} - 1.$$

9. $u'u^{\frac{1}{2}}$

$$\int_0^1 e^t \sqrt{1+e^t} dt = \left[\frac{2}{3} (1+e^t)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} ((1+e)^{3/2} - 2\sqrt{2}).$$

Solution 5 –

1. On définit $u: \begin{matrix} [1,3] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{-1}{x} \end{matrix}$ et $v: \begin{matrix} [1,3] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{matrix}$.

u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,3]$ donc, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= [u(x)v(x)]_1^3 - \int_1^3 u(x)v'(x) dx \\ &= \left[\frac{-\ln(x)}{x} \right]_1^3 - \int_1^3 \frac{-1}{x} \times \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{-\ln(3)}{3} - \left[\frac{1}{x} \right]_1^3 \\ &= \frac{2 - \ln(3)}{3} \end{aligned}$$

2. On définit $u: \begin{matrix} [0, \frac{\pi}{4}] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{matrix}$ et $v: \begin{matrix} [0, \frac{\pi}{4}] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{matrix}$.

u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $u'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$ et $v'(x) = 1$, donc, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} I_2 &= [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} u(x)v'(x) dx \\ &= [x \tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) \times 1 dx \\ &= \frac{\pi}{4} \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - [\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

3. On définit $u: \begin{matrix} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \exp(t) \end{matrix}$ et $v: \begin{matrix} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^2 \end{matrix}$.

u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$, $u'(t) = \exp(t)$ et $v'(t) = 2t$, donc, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} I_3 &= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t) dt \\ &= [\exp(t)t^2]_0^1 - \int_0^1 \exp(t)2t dt \\ &= e - \int_0^1 \exp(t)2t dt. \end{aligned}$$

On définit $u_1: \begin{matrix} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \exp(t) \end{matrix}$ et $v_1: \begin{matrix} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2t \end{matrix}$.

u_1 et v_1 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$, $u_1'(t) = \exp(t)$ et

$v'(t) = 2$, donc, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} I_3 &= e - \left[u_1(t) v_1(t) \right]_0^1 - \int_0^1 u_1(t) v_1'(t) dt \\ &= e - [\exp(t) 2t]_0^1 + \int_0^1 \exp(t) 2 dt \\ &= e - 2e + 2 [\exp(t)]_0^1 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

4. On définit $u: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ et $v: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ par $t \mapsto -\cos(t)$ et $t \mapsto t$.

u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $u'(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = 1$, donc, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} I_4 &= [u(t) v(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t) v'(t) dt \\ &= [-t \cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt \\ &= [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

5. On définit $u: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ et $v: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ par $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)^2$.

u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$ et pour tout $x \in [1, 2]$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2 \frac{\ln(x)}{x}$, donc, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} I_5 &= [u(x) v(x)]_1^2 - \int_1^2 u(x) v'(x) dx \\ &= [x \ln(x)^2]_1^2 - \int_1^2 2 \ln(x) dx \\ &= 2(\ln(2))^2 - 2[x \ln(x) - x]_1^2 \\ &= 2(\ln(2))^2 - 2(2 \ln(2) - 2 - (\ln(1) - 1)) \\ &= 2(\ln(2) - 1)^2 \end{aligned}$$

6. On définit $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$.

u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $u'(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, donc, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} I_6 &= [u(x) v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x) v'(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctan}(x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\operatorname{Arctan}(1)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} [x - \operatorname{Arctan}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

7. On définit $u: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ et $v: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{1}{3} x^3$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.

u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$ et pour tout $x \in [1, e]$, $u'(x) = x^2$ et $v'(x) = \frac{1}{1+x}$, donc, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} I_7 &= [u(x) v(x)]_1^e - \int_1^e u(x) v'(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \ln(1+x) \right]_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e \frac{x^3}{1+x} dx \\ &= \frac{1}{3} (e^3 \ln(1+e) - \ln(2)) - \frac{1}{3} \int_1^e \frac{(x^2 - x + 1)(x - 1) - 1}{1+x} dx \\ &= \frac{1}{3} (e^3 \ln(1+e) - \ln(2)) - \frac{1}{3} \int_1^e \left(x - 1 - \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} (e^3 \ln(1+e) - \ln(2)) - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} x^2 - x - \ln(1+x) \right]_1^e \\ &= \frac{1}{3} \left((e^3 + 1) \ln(1+e) - 2 \ln(2) - \frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2} - e + \frac{5}{6} \right) \end{aligned}$$

8. On définit $u: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ et $v: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ par $t \mapsto t$ et $t \mapsto \operatorname{Arcsin}(t)$.

u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ et pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) =$

$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, donc, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} I_8 &= [u(t)v(t)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} u(t)v'(t) dt \\ &= [t \operatorname{Arcsin}(t)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{aligned}$$

9. On définit $u: \begin{matrix} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \operatorname{sh}(t) \end{matrix}$ et $v: \begin{matrix} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t+1 \end{matrix}$.

u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$, $u'(t) = \operatorname{ch}(t)$ et $v'(t) = 1$, donc, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} I_9 &= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t) dt \\ &= [(t+1)\operatorname{sh}(t)]_0^1 - \int_0^1 \operatorname{sh}(t) dt \\ &= 2\operatorname{sh}(1) - [\operatorname{ch}(t)]_0^1 \\ &= 2\operatorname{sh}(1) - \operatorname{ch}(1) + 1 \\ &= \operatorname{sh}(1) - e^{-1} + 1 \end{aligned}$$

10. On définit $u: \begin{matrix} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t \end{matrix}$ et $v: \begin{matrix} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \operatorname{Arctan}(t) \end{matrix}$.

u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) =$

$\frac{1}{1+t^2}$, donc, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} I_{10} &= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t) dt \\ &= [t \operatorname{Arctan}(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= \operatorname{Arctan}(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} [\ln(1+t^2)]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

Solution 6 – La primitive de f qui s'annule en 0 est

$$F: x \mapsto \int_0^x f(t) dt.$$

On va poser $g: t \mapsto te^t \cos(2t) = te^{t(1+2i)}$. On a alors $f = \Re e(g)$. On va donc déterminer G la primitive de g qui s'annule en 0, car alors $\Re e(G) = F$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x g(t) dt \\ &= \int_0^x te^{t(1+2i)} dt \end{aligned}$$

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \frac{1}{1+2i} e^{(1+2i)t}$ et $v(t) = t$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = e^{(1+2i)t}$ et $v'(t) = 1$. En intégrant par parties, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G(x) &= \left[\frac{t}{1+2i} e^{(1+2i)t} \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{1+2i} e^{(1+2i)t} dt \\ &= \frac{x}{1+2i} e^{(1+2i)x} - \left[\frac{1}{(1+2i)^2} e^{(1+2i)t} \right]_0^x \\ &= e^{(1+2i)x} \left(\frac{x}{1+2i} - \frac{1}{(1+2i)^2} \right) + \frac{1}{(1+2i)^2} \\ &= e^{(1+2i)x} \left(\frac{x(1+2i) - 1}{(1+2i)^2} \right) + \frac{1}{4i-3} \\ &= e^x e^{2ix} \left(\frac{(x(1+2i) - 1)(-4i-3)}{(4i-3)(-4i-3)} \right) + \frac{-4i-3}{4i-3(-4i-3)} \\ &= e^x (\cos(2x) + i \sin(2x)) \left(\frac{(3+5x) + i(-10x+4)}{25} + \frac{-4i-3}{25} \right) \\ &= e^x (\cos(2x) + i \sin(2x)) \frac{(3+5x) + i(-10x+4)}{25} + \frac{-4i-3}{25} \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{e^x}{25} (\cos(2x)(3+5x) + \sin(2x)(10x-4)) - \frac{3}{25}.$$

Solution 7 –

1. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $G_1(x) = \int_1^x g_1(t) dt$. Alors G_1 est une primitive de g_1 sur $]0, +\infty[$.

• Si $\alpha = -1$, alors pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$G_1(x) = \int_1^x g_1(t) dt = \left[\frac{1}{2} (\ln(t))^2 \right]_1^x = \frac{1}{2} \ln(x)^2$$

Donc $x \mapsto (\ln(x))^2$ est une primitive de g_1 sur $]0, +\infty[$

• Si $\alpha \neq -1$, alors pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$G_1(x) = \int_1^x t^\alpha \ln(t) dt$$

On pose, pour tout $t \in]0, +\infty[$, $u(t) = \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1}$ et $v(t) = \ln(t)$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$, $u'(t) = t^\alpha$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$. En intégrant par parties,

on a

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \left[\frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \ln(t) \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \ln(x) - \int_1^x \frac{1}{\alpha+1} t^\alpha dt \\ &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \ln(x) - \frac{1}{\alpha+1} \left[\frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \right]_1^x \\ &= \frac{1}{\alpha+1} \left(x^{\alpha+1} \ln(x) - \frac{x^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} \right) \end{aligned}$$

En éliminant le terme constant, on a toujours une primitive de g_1 . Donc

$$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\ln(x) - \frac{1}{\alpha+1} \right)$$

est une primitive de g_1 sur $]0, +\infty[$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on $G_2(x) = \int_0^x g_2(t) dt$. Alors G_2 est une primitive de g_2 sur $\mathbb{R}$.

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$ et $v(t) = t^2 + t + 1$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = e^t$ et $v'(t) = 2t + 1$. En intégrant par parties, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G_2(x) &= \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} (t^2 + t + 1) \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} (2t + 1) dt \\ &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} (x^2 + x + 1) - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \int_0^x e^{\alpha t} (2t + 1) dt \end{aligned}$$

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_1(t) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$ et $v_1(t) = 2t + 1$. Alors u_1 et v_1 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_1'(t) = e^t$ et $v_1'(t) = 2$. En intégrant par parties, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G_2(x) &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} (x^2 + x + 1) - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} (2t + 1) \right]_0^x + \frac{1}{\alpha} \int_0^x \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} 2 dt \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(e^{\alpha x} (x^2 + x + 1) - 1 - \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} (2x + 1) + \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \right]_0^x \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(e^{\alpha x} (x^2 + x + 1) - \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} (2x + 1) + \frac{2}{\alpha^2} e^{\alpha x} \right) + c \end{aligned}$$

où c est une constante réelle. En réorganisant les termes et en supprimant le terme constant, on en déduit que

$$t \mapsto \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \left(x^2 + x \left(1 - \frac{2}{\alpha} \right) + \left(1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} \right) \right)$$

est une primitive de g_2 sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on $G_3(x) = \int_0^x g_3(t) dt$. Alors G_2 est une primitive de g_3 sur $\mathbb{R}$.

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = \frac{-1}{\alpha} \cos(\alpha t)$ et $v(t) = t^2 + t$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = \sin(\alpha t)$ et $v'(t) = 2t + 1$. En intégrant par parties, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G_3(x) &= \left[\frac{-1}{\alpha} \cos(\alpha t)(t^2 + t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{-1}{\alpha} \cos(\alpha t)(2t + 1) dt \\ &= \frac{-(x^2 + x)}{\alpha} \cos(\alpha x) + \frac{1}{\alpha} \int_0^x \cos(\alpha t)(2t + 1) dt \end{aligned}$$

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_1(t) = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t)$ et $v_1(t) = 2t + 1$. Alors u_1 et v_1 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_1'(t) = \cos(\alpha t)$ et $v_1'(t) = 2$. En intégrant par parties, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G_3(x) &= \frac{-(x^2 + x)}{\alpha} \cos(\alpha x) + \frac{1}{\alpha} \left(\left[\frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t)(2t + 1) \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t) 2 dt \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(-(x^2 + x) \cos(\alpha x) + \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x)(2x + 1) - \frac{2}{\alpha} \left[\frac{-1}{\alpha} \cos(\alpha t) \right]_0^x \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(-(x^2 + x) \cos(\alpha x) + \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x)(2x + 1) + \frac{2}{\alpha^2} \cos(\alpha x) \right) + c \end{aligned}$$

où c est une constante réelle. En réorganisant les termes et en supprimant le terme constant, on en déduit que

$$t \mapsto \frac{1}{\alpha} \left(\left(-x^2 - x + \frac{2}{\alpha^2} \right) \cos(\alpha x) + \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x)(2x + 1) \right)$$

est une primitive de g_3 sur $\mathbb{R}$.

Solution 8 – On pose, pour tout $x \in [1, e^\pi]$, $u(x) = x$ et $v(x) = \sin(\ln(x))$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e^\pi]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$. En intégrant par parties, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} I &= [x \sin(\ln(x))]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} x \frac{1}{x} \cos(\ln(x)) dx \\ &= - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x)) dx \end{aligned}$$

On pose, pour tout $x \in [1, e^\pi]$, $u_1(x) = x$ et $v_1(x) = \cos(\ln(x))$. Alors u_1 et v_1 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e^\pi]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_1'(x) = 1$ et $v_1'(x) = \frac{-\sin(\ln(x))}{x}$. En intégrant par parties, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} I &= - [x \cos(\ln(x))]_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} x \frac{1}{x} (-\sin(\ln(x))) dx \\ &= -e^\pi \cos(\ln(e^\pi)) + \cos(0) - \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x)) dx \\ &= e^\pi + 1 - I \\ 2I &= e^\pi + 1 \end{aligned}$$

D'où $I = \frac{e^\pi + 1}{2}$.

Solution 9 –

1. On effectue le changement de variable $x = t - 1$.
 x prend les valeurs de 1 à 3.
 t prend les valeurs de 2 à 4.
2. La fonction $\varphi : t \mapsto t - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2; 4]$.
3. On a $dx = dt$.
4. et

$$\text{ch}(x^2 - 1) dx = \text{ch}((t - 1)^2 - 1) dt = \text{ch}(t^2 - 2t) dt$$

5. donc

$$\int_1^3 \text{ch}(x^2 - 1) dx = \int_2^4 \text{ch}(t^2 - 2t) dt$$

1. On effectue le changement de variable $y = x^2$.
 x prend les valeurs de 0 à 2.
 y prend les valeurs de 0 à 4.

2. La fonction $\varphi : x \mapsto x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 2]$.

3. On a $dy = 2x dx$.

4. et

$$x^3 \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} y \cos(y) dy.$$

5. donc

$$\int_0^2 x^3 \cos(x^2) dx = \int_0^4 \frac{1}{2} y \cos(y) dy.$$

3. 1. On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (et donc $t = u^2$)
 t prend les valeurs de 1 à 4.
 u prend les valeurs de 1 à 2.

2. La fonction $\varphi : x \mapsto x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; 2]$.

3. On a $dt = 2u du$.

4. et

$$\sin(\sqrt{t}) dt = \sin(u) 2u du$$

5. donc

$$\int_1^2 \sin(\sqrt{t}) dt = \int_1^2 2 \sin(u) u du.$$

4. 1. On effectue le changement de variable $x = \exp w$
 w prend les valeurs de -1 à 3 .
 u prend les valeurs de e^{-1} à e^3 .
 2. La fonction $\varphi : x \mapsto \exp(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1; 3]$.
 3. On a $dx = e^w dw$.
 4. et

$$\frac{1}{\operatorname{ch}(w)} dw = \frac{2}{e^w + e^{-w}} dw = \frac{2e^w dw}{(e^w)^2 + 1} = \frac{2 dx}{x^2 + 1}$$

5. donc

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{\operatorname{ch}(w)} dw = \int_{e^{-1}}^{e^3} \frac{2 dx}{x^2 + 1}.$$

5. 1. On effectue le changement de variable $x = \ln(u)$ (et donc $u = \exp(x)$)
 x prend les valeurs de 1 à 4.
 u prend les valeurs de e^1 à e^4 .
 2. La fonction $\varphi : x \mapsto \exp(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; 4]$.
 3. On a $dx = \frac{du}{u}$.

4. et

$$\frac{e^x}{1+x} dx = \frac{u}{1+\ln(u)} \frac{du}{u} = \frac{du}{1+\ln(u)}$$

5. donc

$$\int_1^4 \frac{e^x}{1+x} dx = \int_e^{e^4} \frac{du}{1+\ln(u)}.$$

6. 1. On effectue le changement de variable $x = \cos(u)$
 x prend les valeurs de 0 à $\frac{1}{2}$.
 u prend les valeurs de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{3}$.
 2. La fonction $\varphi : u \mapsto \cos(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$.
 3. On a $dx = -\sin(u) du$
 4. et

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \sqrt{\frac{1-\cos(u)}{1+\cos(u)}} (-\sin(u)) du \\ &= \sqrt{\tan(u/2)^2} (-\sin(u)) du \\ &= \tan(u/2) (-\sin(u)) du \end{aligned}$$

5. donc

$$\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int_{\pi/2}^{\pi/3} \tan(u/2) (-\sin(u)) du.$$

7. 1. On effectue le changement de variable $u = \sqrt{x+1}$ (et donc $x = u^2 - 1$)
 x prend les valeurs de 0 à 1.
 u prend les valeurs de 1 à $\sqrt{2}$.
 2. La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{x+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.
 3. On a $du = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$ et donc $2u du = dx$.
 4. et

$$\frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx = \frac{u^2-1}{1+u} 2u du = 2(u-1)u du.$$

5. donc

$$\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} 2(u-1)u du.$$

8. 1. On effectue le changement de variable $x = 2 + \sin(t)$.

x prend les valeurs de $\frac{3}{2}$ à $\frac{5}{2}$.

t prend les valeurs de $-\frac{\pi}{6}$ à $\frac{\pi}{6}$.

2. La fonction $\varphi : t \mapsto 2 + \sin(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.

3. On a $\cos(t) dt = dx$.

4. et

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} dx &= \frac{2 + \sin(t)}{\sqrt{(2 + \sin(t) - 1)(3 - 2 - \sin(t))}} \cos(t) dt \\ &= \frac{2 + \sin(t)}{\sqrt{(1 + \sin(t))(1 - \sin(t))}} \cos(t) dt \\ &= \frac{2 + \sin(t)}{\sqrt{1 - \sin(t)^2}} \cos(t) dt \\ &= \frac{2 + \sin(t)}{\sqrt{\cos(t)^2}} \cos(t) dt = (2 + \sin(t)) dt \end{aligned}$$

5. donc

$$\int_{3/2}^{5/2} \frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} dx = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (2 + \sin(t)) dt$$

Solution 10 –

1. ➤ On effectue le changement de variable $u = \sqrt{x}$.

x prend les valeurs de 1 à 2.

u prend les valeurs de 1 à $\sqrt{2}$.

- La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; 2]$.

- On a $du = dx \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et donc $2u du = dx$

- et

$$\exp(\sqrt{x}) dx = \exp(u) 2u du$$

- donc

$$\int_1^2 \exp(\sqrt{x}) dx = \int_1^{\sqrt{2}} \exp(u) 2u du$$

Les fonctions $\exp$ et $u \mapsto u$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \sqrt{2}]$ et de dérivées respectives

$\exp$ et $u \mapsto 2$. En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} \exp(\sqrt{x}) dx &= [2u \exp(u)]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \exp(u) 2 du \\ &= 2\sqrt{2} e^{\sqrt{2}} - 2e - [2 \exp(u)]_1^{\sqrt{2}} \\ &= 2\sqrt{2} e^{\sqrt{2}} - 2e - 2e^{\sqrt{2}} + 2e \\ J_1 &= 2(\sqrt{2} - 1) e^{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

2. ➤ On effectue le changement de variable $t = \tan(u)$.

t prend les valeurs de 0 à 1.

u prend les valeurs de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

- La fonction $\varphi : u \mapsto \tan(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{4}]$.

- On a $dt = (1 + \tan(u)^2) du$ et donc $dt = (1 + t^2) du$ et $\frac{1}{1 + t^2} dt = du$

- et

$$\frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2} dt = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} du = \frac{1 - \tan(u)^2}{1 + \tan(u)^2} du.$$

- donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2} dt &= \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \tan(u)^2}{1 + \tan(u)^2} du \\ &= \int_0^{\pi/4} \cos(2u) du \\ &= \left[\frac{\sin(2u)}{2} \right]_0^{\pi/4} \\ J_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. ➤ On effectue le changement de variable $x = \frac{\pi}{4} - u$.

x prend les valeurs de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

u prend les valeurs de $\frac{\pi}{4}$ à 0.

- La fonction $\varphi : u \mapsto \frac{\pi}{4} - u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{4}]$.

- On a $dx = -du$

▷ et

$$\begin{aligned}\ln(1 + \tan(x)) \, dx &= -\ln(1 + \tan(\frac{\pi}{4} - u)) \, du \\ &= -\ln\left(1 + \frac{\tan(\frac{\pi}{4}) - \tan(u)}{1 + \tan(\frac{\pi}{4})\tan(u)}\right) du \\ &= -\ln\left(1 + \frac{1 - \tan(u)}{1 + \tan(u)}\right) du \\ &= -\ln\left(\frac{2}{1 + \tan(u)}\right) du \\ &= (\ln(1 + \tan(u)) - \ln(2)) \, du\end{aligned}$$

▷ donc

$$\begin{aligned}J_3 &= \int_{\pi/4}^0 (\ln(1 + \tan(u)) - \ln(2)) \, du \\ &= -\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(u)) \, du + \int_0^{\pi/4} \ln(2) \, du \\ &= -J_3 + \ln(2) \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\text{D'où } J_3 = \frac{\ln(2)\pi}{8}.$$

4. ▷ On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

t prend les valeurs de 1 à 2.

u prend les valeurs de 1 à $\sqrt{2}$.

▷ La fonction $\varphi : u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; \sqrt{2}]$.

▷ On a $du = dt \frac{1}{2\sqrt{t}}$ et donc $2u \, du = dt$

▷ et

$$\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \, dt = \frac{\ln(u^2)}{u} 2u \, du = 4 \ln(u) \, du,$$

▷ donc

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \, dt &= \int_1^{\sqrt{2}} 4 \ln(u) \, du \\ &= 4 [u \ln(u) - u]_1^{\sqrt{2}} \\ &= 4\sqrt{2} \ln(\sqrt{2}) - 4\sqrt{2} + 4 \\ J_4 &= 2\sqrt{2} \ln(2) - 4\sqrt{2} + 4\end{aligned}$$

5. ▷ On effectue le changement de variable $u = \text{sh}(x)$.

u prend les valeurs de 0 à $\text{sh}(1)$.

x prend les valeurs de 0 à 1.

▷ La fonction sh est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.

▷ On a $du = \text{ch}(x) \, dx$

▷ et

$$\sqrt{1 + u^2} \, du = \sqrt{1 + \text{sh}(x)^2} \, \text{ch}(x) \, dx = \sqrt{\text{ch}(x)^2} \, \text{ch}(x) \, dx = \text{ch}(x)^2 \, dx$$

▷ donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\text{sh}(1)} \sqrt{1 + u^2} \, du &= \int_0^1 \text{ch}(x)^2 \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (\text{ch}(2x) + 1) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sh}(2x)}{2} + x \right]_0^1 \\ J_5 &= \frac{1}{4} \text{sh}(2) + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

6. ▷ On effectue le changement de variable $u = x^2$.

x prend les valeurs de -3 à -4 .

u prend les valeurs de 9 à 16.

▷ La fonction $\varphi : x \mapsto x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-4, -3]$.

▷ On a $du = 2x \, dx$

▷ et

$$\frac{x}{x^4 - x^2 - 2} \, dx = \frac{1}{2(u^2 - u - 2)} \, du,$$

▷ donc

$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^{-4} \frac{x}{x^4 - x^2 - 2} dx &= \int_9^{16} \frac{1}{2(u^2 - u - 2)} du \\
 &= \frac{1}{2} \int_9^{16} \frac{1}{(u-2)(u+1)} du \\
 &= \frac{1}{2} \int_9^{16} \left(\frac{\frac{1}{3}}{u-2} + \frac{\frac{-1}{3}}{u+1} \right) du \\
 &= \frac{1}{6} \int_9^{16} \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+1} \right) du \\
 &= \frac{1}{6} [\ln(u-2) - \ln(u+1)]_9^{16} \\
 &= \frac{1}{6} (\ln(14) - \ln(17) - \ln(7) + \ln(10)) \\
 J_6 &= \frac{\ln(20/17)}{6}
 \end{aligned}$$

7. ▷ On effectue le changement de variable $s = \exp(t)$.

t prend les valeurs de 0 à 1.

s prend les valeurs de 1 à e .

▷ La fonction $\varphi : t \mapsto \exp(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

▷ On a $ds = \exp(t) dt$

▷ et

$$\frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt = \frac{e^t}{e^t + 1} e^t dt = \frac{s}{s + 1} ds.$$

▷ donc

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt &= \int_1^e \frac{s}{s + 1} ds \\
 &= \int_1^e \left(1 - \frac{1}{s + 1} \right) ds \\
 &= [s - \ln(s + 1)]_1^e \\
 J_7 &= e - \ln(e + 1) - 1 + \ln(2)
 \end{aligned}$$

Solution 11 – La primitive recherchée est $f : \begin{matrix}]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_1^x \frac{1}{e^t - 1} dt \end{matrix}$.

Soit $x \in]0, +\infty[$.

▷ On effectue le changement de variable $s = \exp(t)$.

t prend les valeurs de 1 à x .

s prend les valeurs de e à $\exp(x)$.

▷ La fonction $\varphi : t \mapsto \exp(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'extrémités 1 et x .

▷ On a $ds = \exp(t) dt$, autrement dit $\frac{ds}{s} = dt$.

▷ et

$$\frac{1}{e^t - 1} dt = \frac{1}{u - 1} \frac{1}{u} du.$$

▷ donc

$$\begin{aligned}
 \int_1^x \frac{1}{e^t - 1} dt &= \int_e^{e^x} \frac{1}{u - 1} \frac{1}{u} du \\
 &= \int_e^{e^x} \left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u} \right) du \\
 &= [\ln(u - 1) - \ln(u)]_e^{e^x} \\
 &= \ln(e^x - 1) - \ln(e^x) - \ln(e - 1) + \ln(e) \\
 &= 1 - x + \ln\left(\frac{e^x - 1}{e - 1}\right)
 \end{aligned}$$

Donc $f : x \mapsto 1 - x + \ln\left(\frac{e^x - 1}{e - 1}\right)$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$ qui s'annule en 1.

Solution 12 –

1.

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot d\theta = \frac{\pi}{2}. \\
 I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta = [\sin(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.
 \end{aligned}$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$.

▷ On effectue le changement de variable $v = \frac{\pi}{2} - \theta$. (on a donc $\theta = \frac{\pi}{2} - v$

θ prend les valeurs de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

v prend les valeurs de $\frac{\pi}{2}$ à 0.

▷ La fonction $\varphi : \theta \mapsto \frac{\pi}{2} - \theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

▷ On a $dv = -d\theta$

▷ et

$$(\cos(\theta))^p d\theta = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\right)^p (-dv) = -\sin(v)^p dv.$$

▷ donc

$$\begin{aligned} I_p &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -(\sin(v))^p dv \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(v))^p dv. \end{aligned}$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. $u = \cos^{p+1}$ et $v = \sin$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_{p+2} &= [\cos(\theta)^{p+1} \sin(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(\theta))(p+1)(\cos(\theta))^p \sin(\theta) d\theta \\ &= (p+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^p \sin(\theta)^2 d\theta \\ &= (p+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^p (1 - \cos(\theta)^2) d\theta \\ &= (p+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^p d\theta - (p+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^{p+2} d\theta \\ &= (p+1)I_p - (p+1)I_{p+2} \\ (p+2)I_{p+2} &= (p+1)I_p \\ I_{p+2} &= \frac{p+1}{p+2} I_p \end{aligned}$$

4. Soit p entier naturel. Alors

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots \times 5 \times 3 \times 1}{2p(2p-2)(2p-4)\cdots \times 4 \times 2} I_0 \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots \times 5 \times 3 \times 1}{2p(2p-2)(2p-4)\cdots \times 4 \times 2} \times \frac{2p(2p-2)(2p-4)\cdots \times 4 \times 2}{2p(2p-2)(2p-4)\cdots \times 4 \times 2} I_0 \\ &= \frac{(2p)!}{\left(\prod_{k=1}^{2p} 2k\right)^2} I_0 \\ &= \frac{p!}{(2^p \prod_{k=1}^p k)^2} I_0 \\ &= \frac{p!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Coté impair, on a plutôt

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p(2p-2)(2p-4)\cdots \times 4 \times 2}{(2p+1)(2p-1)(2p-3)\cdots \times 5 \times 3 \times 1} I_1 \\ &= \frac{2p(2p-2)(2p-4)\cdots \times 4 \times 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots \times 5 \times 3 \times 1} \times \frac{2p(2p-2)(2p-4)\cdots \times 4 \times 2}{2p(2p-2)(2p-4)\cdots \times 4 \times 2} I_1 \\ &= \frac{\left(\prod_{k=1}^{2p} 2k\right)^2}{(2p+1)!} I_1 \\ &= \frac{(2^p \prod_{k=1}^p k)^2}{(2p+1)!} I_1 \\ &= \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

Solution 13 – On pose $F : x \mapsto \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{\sin(x)} dx$ définie sur $]0, \pi[$. Alors, pour tout $x \in]0, \pi[$, à l'aide d'une formule de trigonométrie,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{1 + \tan(x/2)^2}{2 \tan(x/2)} dx \\ &= [\ln(\tan(x/2))]_{\frac{\pi}{2}}^x \\ &= \ln(\tan(x/2)) - \ln(\tan(\pi/4)) \\ &= \ln(\tan(x/2)) \end{aligned}$$

Donc $F : x \mapsto \ln(\tan(x/2))$ est une primitive de $\frac{1}{\sin}$ sur $]0, \pi[$.

Par 2π -périodicité, c'est aussi une primitive sur tout intervalle de la forme $]0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque : En utilisant l'imparité, on peut obtenir que $x \mapsto \ln(-\tan(x/2))$ est une primitive sur tous les intervalles de la forme $]-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Finalement, $x \mapsto \ln(|\tan(x/2)|)$ est une primitive de $\frac{1}{\sin}$ sur tout intervalle de la forme $]0 + k\pi, \pi + k\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Solution 14 – $f : x \mapsto \frac{1}{3 + \operatorname{ch}(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$F : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{3 + \operatorname{ch}(t)} dt$ est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On pose $x \in \mathbb{R}$ et on cherche donc à calculer $\int_0^x \frac{1}{3 + \operatorname{ch}(t)} dt$.

▷ On effectue le changement de variable $u = \exp(t)$.

t prend les valeurs de 0 à x .

u prend les valeurs de 1 à $\exp(x)$.

▷ La fonction $\varphi : t \mapsto \exp(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'extrémités 1 et x .

▷ On a $du = \exp(t) dt$

▷ et

$$\frac{1}{3 + \operatorname{ch}(t)} dt = \frac{2 dt}{6 + e^t + e^{-t}} = \frac{2 e^t dt}{6 e^t + (e^t)^2 + 1} = \frac{2 du}{6u + u^2 + 1}.$$

▷ donc

$$\int_0^x \frac{1}{3 + \operatorname{ch}(t)} dt = \int_1^{e^x} \frac{2 du}{u^2 + 6u + 1}$$

Le trinôme $u^2 + 6u + 1$ possède deux racines réelles, $-3 - 2\sqrt{2}$ et $-3 + 2\sqrt{2}$. On a pour tout $u > 1$,

$$\frac{2 du}{u^2 + 6u + 1} = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}}{u - (-3 - 2\sqrt{2})} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{u - (-3 + 2\sqrt{2})}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_1^{e^x} \frac{2 du}{u^2 + 6u + 1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[-\ln(u - (-3 - 2\sqrt{2})) + \ln(u - (-3 + 2\sqrt{2})) \right]_1^{e^x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[-\ln(u + 3 + 2\sqrt{2}) + \ln(u + 3 - 2\sqrt{2}) \right]_1^{e^x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln \left(\frac{u + 3 - 2\sqrt{2}}{u + 3 + 2\sqrt{2}} \right) \right]_1^{e^x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln \left(\frac{e^x + 3 - 2\sqrt{2}}{e^x + 3 + 2\sqrt{2}} \right) - \ln \left(\frac{4 - 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} \right) \right] \end{aligned}$$

On en déduit que $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(1 + \frac{-4\sqrt{2}}{e^x + 3 + 2\sqrt{2}} \right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Solution 15 –

1. Soient a, b, c des réels. Alors, pour tout x différent de -7 , on a

$$\frac{a}{7+x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{a+ax^2+7bx+7c+bx^2+cx}{(7+x)(1+x^2)} = \frac{a+7c+(7b+c)x+(a+b)x^2}{(7+x)(1+x^2)}$$

On s'intéresse au système (S) $\begin{cases} a+7c = 1 \\ 7b+c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases}$. Si (S) est vérifié, alors le numérateur de

la ligne précédente est constant égal à 1 et la relation de l'énoncé est vérifiée. Or

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -b+7c = 1 \\ 7b+c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50c = 7 \\ 7b+c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{7}{50} \\ b = \frac{-7}{50} \\ a = \frac{7}{50} \end{cases}$$

Ainsi, $a = \frac{1}{50}$, $b = \frac{-1}{50}$ et $c = \frac{7}{50}$ conviennent.

2. (a) On fait le changement de variable $u = \tan(t)$, donc $t = \arctan(u)$.

t prend les valeurs de 0 à $\frac{\pi}{6}$.

u prend les valeurs de 0 à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(b) $t \mapsto \tan(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

(c) On a $dt = \frac{du}{1+u^2}$.

(d) On a

$$\frac{dt}{7+\tan(t)} = \frac{du}{(7+u)(1+u^2)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{7+\tan(t)} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{du}{(7+u)(1+u^2)} \\ &= \frac{1}{50} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{du}{7+u} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{u du}{u^2+1} + 7 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{du}{u^2+1} \right) \\ &= \frac{1}{50} \left([\ln(7+u)]_0^{\sqrt{3}/3} - \frac{1}{2} [\ln(u^2+1)]_0^{\sqrt{3}/3} + 7[\arctan(u)]_0^{\sqrt{3}/3} \right) \\ &= \frac{1}{50} \left(\ln\left(7 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \ln(7) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{7\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Solution 16 –

1. (a) On a $\int_2^4 x^2 dx = \frac{56}{3}$ et $\int_2^4 x^2 dx = 2^2\alpha + 3^2\beta + 4^2\gamma = 4\alpha + 9\beta + 16\gamma$.
- (b) On a $\int_2^4 x dx = 6$ et $\int_2^4 x dx = 2\alpha + 3\beta + 4\gamma$. De même, $\int_2^4 dx = 2$ et $\int_2^4 dx = \alpha + \beta + \gamma$.
- (c) On a

$$\begin{aligned} (S) \iff & \begin{cases} 5\beta + 12\gamma = 32/3 & L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ \boxed{1}\beta + 2\gamma = 2 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ \boxed{1}\alpha + \beta + \gamma = 2 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \boxed{2}\gamma = 2/3 & L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2 \\ \boxed{1}\beta + 2\gamma = 2 & \\ \boxed{1}\alpha - \gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \boxed{2}\gamma = 2/3 & \\ \boxed{2}\beta = 8/3 & L_2 \leftarrow 2L_2 - 2L_1 \\ \boxed{2}\alpha = 2/3 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc l'unique solution du système est $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

2. *Analyse.* Supposons qu'il existe (α, β, γ) solution du problème. Les questions 1.(a) et 1.(b) assurent que α , β et γ sont solutions du système présenté en 1.(c). Dans cette

même question, on a obtenu $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{4}{3}$ et $\gamma = \frac{1}{3}$.

Synthèse. Posons $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{4}{3}$ et $\gamma = \frac{1}{3}$. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P: x \mapsto ax^2 + bx + c$. On a d'une part

$$\int_2^4 P(t) dt = a \int_2^4 t^2 dt + b \int_2^4 t dt + c \int_2^4 dt = \frac{56a}{3} + 6b + 2c.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) &= \frac{1}{3}(4a + 2b + c) + \frac{4}{3}(9a + 3b + c) + \frac{1}{3}(16a + 4b + c) \\ &= \frac{1}{3}(4a + 36a + 16a + 2b + 12b + 4b + c + 4c + c) \\ &= \frac{56a}{3} + 6b + 2c. \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs proposées pour α , β et γ sont effectivement solution du problème.

Conclusion. Finalement, l'unique triplet réel (α, β, γ) tel que, pour toute fonction polynomiale réelle P de degré inférieur ou égal à 2, on ait $(??)$, est $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

♣ Du trèfle à brouter...

♥ À connaître par cœur.

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!