

EXERCICES — CHAPITRE 10

Exercice 1 (♦) – Étudier la convergence des suites dont le terme général s'écrit :

$$\begin{array}{lll}
 a_n = 3^{1/n} & b_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n & c_n = \frac{n!}{2^n} \\
 d_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n} & e_n = \frac{2 + 3\cos(n)}{n + 1} & f_n = n + 2\sin(n^2) \\
 g_n = 2n + (-1)^n n & h_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & i_n = 3\sqrt{n^2+1} - 5n \\
 j_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1} & k_n = \frac{n - n\ln n}{n + \ln n} & \ell_n = \frac{e^{2n} + 3}{(e^n + 5)^2} \\
 m_n = \frac{2^n}{n^6 + n^3 + 1} & o_n = \left(n^2 + \frac{1}{n}\right)e^{-n^2} & p_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \quad (a, b \in \mathbb{R}_+^*) \\
 q_n = n^{1/\ln n} & r_n = (\ln n)^{1/n} & s_n = \frac{E(n/2)}{n}
 \end{array}$$

Exercice 2 (♠) – Soit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\exists \alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq \alpha.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3 (♥) – Montrer que les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont les termes généraux sont définis pour tout $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{3n^2}$$

sont adjacentes.

Exercice 4 (♣) – On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 5 (♣) – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0.7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer par récurrence que $u_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 6 (♥) – Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1-x)^3 + x$.

On définit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $a_{n+1} = g(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_0 = 0.4$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n , $0 < a_n < 1$.
2. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 7 (♦) –

1. On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$, et pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$$

Montrer que l'on définit ainsi deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs.

On pourra procéder par récurrence sur n en montrant que, pour tout entier naturel n , les réels a_n et b_n sont bien définis et strictement positifs.

2. Calculer a_1 et vérifier que $b_1 = \sqrt{3}$.
3. (a) Établir, pour tout entier naturel n , l'égalité suivante

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} (b_n - a_n)$$

- (b) En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $a_n < b_n$.
- (c) Utiliser l'inégalité précédente pour justifier que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- (d) Montrer que $b_n = \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}$, puis établir la stricte décroissance de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. (a) Justifier, pour tout entier naturel n , l'inégalité : $b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ En déduire l'encadrement suivant : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}$
- (b) En utilisant les résultats obtenus à la question 4, établir, pour tout entier naturel n , les inégalités suivantes : $a_n < b_0$ et $b_n > a_0$

- (c) Dédurre de tout ce qui précède que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes. et ont même limite. On note ℓ cette limite commune.
- (d) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$a_n \leq \ell \leq b_n$$

5. La limite commune ℓ aux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'un des quatre réels suivants :

$$(1) \frac{\sqrt{3}}{\pi} \quad (2) \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \quad (3) \frac{3}{\pi} \quad (4) 3$$

Déterminer ℓ en justifiant votre réponse.

Exercice 8 (♠) – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

- Montrer que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 9 (♠) –

- Justifier que lorsqu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors la suite $(x_{2n} - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- En déduire que la suite (S_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, est divergente.

Exercice 10 (♣) – Étudier la convergence et calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 1.$$

Exercice 11 (♠) – Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a + ib$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}$) et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n + 2\overline{u_n})$. Cette suite est-elle convergente, et si oui, quelle est sa limite?

Exercice 12 (♥) – On considère les suites réelles (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{3}y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = -\frac{1}{3}x_n + \frac{1}{2}y_n.$$

Montrer que la suite (z_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + iy_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire la convergence de (x_n) et (y_n) .

Exercice 13 (♠) – On définit la suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$z_0 \in \mathbb{C} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|).$$

- Etudier cette suite lorsque z_0 est un réel négatif
- Etudier cette suite lorsque z_0 est un réel positif
- Montrer que si z_0 est un nombre complexe non réel, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n est un nombre complexe non réel.
- On suppose désormais que z_0 est un complexe non réel. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, où $r_n \in]0; +\infty[$ et $\theta_n \in]-\pi; \pi[\setminus \{0\}$.
 - Montrer que la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique. Préciser sa raison et exprimer son terme général en fonction de n et θ_0 .
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = r_0 \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = 2^n r_n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)$. Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. En déduire l'expression de r_n en fonction de n .
 - Montrer que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel $r_0 \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}$.

Exercice 14 (♥) – Déterminer, si elles existent, les limites des suites dont les termes généraux sont :

$$\begin{array}{lll} 1. & u_n = \left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}} \right)^n & 2. & v_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{i\frac{n\pi}{3}} & 3. & w_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2} e^{i\frac{n\pi}{3}} \\ 4. & y_n = (n+1) e^{i(2+\frac{1}{n})} & 5. & z_n = \left(1 + \frac{i\pi}{n} \right)^n \end{array}$$

Exercice 15 (Théorème de Césaro) (♠) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$.

- Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et de même monotonie que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .
- Donner un exemple où la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge mais où la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge.

Exercice 16 (♠) – On définit la fonction $f : x \mapsto e^x + x$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution réelle. On notera x_n cette solution.
- Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie est monotone.
- En déduire qu'elle admet une limite et la déterminer.

Exercice 17 (♠) – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos(n)$ et $v_n = \sin(n)$.

1. Pour tout entier n , exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n , v_n , u_1 et v_1 .
2. On suppose que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers x et y . Déterminer alors leurs limites x et y .
3. En déduire qu'elles sont toutes deux divergentes.

Exercice 18 (♥) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1$$

1. Quel est le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. Étudier la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 19 (♥) – 1. Montrer que $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{2}$ admet un unique point fixe ℓ dans $\mathbb{R}$.

2. Étudier la suite récurrente définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cos(u_n)$.

Exercice 20 (♠) – On pourra utiliser la calculatrice quand nécessaire. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (2x + 1)e^{-x}.$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions de signes contraires dans $\mathbb{R}$. On note a la solution positive. Montrer que a appartient à l'intervalle $I = [1; \frac{5}{4}]$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

2. Montrer que I est un intervalle stable par f .
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Pour quelle valeur de n , u_n est une valeur approchée de a à 10^{-4} près?

Exercice 21 (♠) – Étudier la convergence de la suite définie par

$$u_0 = \frac{7}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

On pourra admettre que $x \mapsto \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$ possède un unique point fixe.

Exercice 22 (Suite de Héron) (♥) – On considère la suite u définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right).$$

Étudier la nature de cette suite et préciser sa limite éventuelle.

Exercice 23 (♥) – Introduisons $f : x \mapsto x - \ln x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. (a) Étudier la fonction f et tracer sa courbe, ainsi que la droite d'équation $y = x$.
(b) Montrer que $f(\mathbb{R}_+^*) \subset [1; +\infty[$ (cela revient à montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 1$).
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit u la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n)$.
(a) À l'aide des graphes précédemment tracés, représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite u dans le cas $a = 2$. Émettre une conjecture sur le comportement de u dans les cas $a < 1$ et $a \geq 1$.
(b) Pour quelle valeur de a la suite u est-elle constante?
(c) Dans cette question, on suppose $a > 1$.
i. Montrer que tous les termes de la suite sont supérieurs à 1.
ii. Montrer que la suite u est monotone.
iii. En déduire sa nature, et la valeur de sa limite.
(d) On suppose à présent que $a < 1$. Quelle est la nature de la suite?

Exercice 24 (♠) – Soit f et g deux fonctions définies et continues sur le segment $[0; 1]$, à valeurs dans $[0; 1]$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Le but de l'exercice est de démontrer que les graphes de f et g ont un point commun.

Pour cela, on suppose qu'il n'existe pas de nombre réel α appartenant à $[0; 1]$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

1. Démontrer que f admet au moins un point fixe sur $[0; 1]$. Par suite, a désigne un point fixe de f .
2. Montrer que la fonction $f - g$ est de signe constant.
3. On introduit la suite u définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$.
(a) Démontrer que pour tout entier naturel n , u_n est un point fixe de f .
(b) En déduire que la suite u est monotone.
(c) Montrer que la suite u converge, vers un nombre réel de $[0; 1]$, noté ℓ .
(d) Démontrer que ℓ est à la fois un point fixe de f et de g .
4. Conclure.

Exercice 25 (♠) – Montrer que la partie A définie par

$$A = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n \right\}$$

est dense dans $[0, 1]$.

De manière équivalente à la définition de partie dense dans $\mathbb{R}$, on dit qu'une partie A d'un segment $[a, b]$ est dense dans $[a, b]$ si entre deux éléments quelconques de $[a, b]$, il existe toujours au moins un élément de A , ou de manière équivalente si tout élément de $[a, b]$ est limite d'une suite d'éléments de A .

Exercice 26 (♠) – On appelle *suite de Cauchy* toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq N, \quad |u_p - u_q| < \varepsilon$$

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2. (a) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
(b) À l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass, en déduire que toute suite de Cauchy est convergente.

Remarque culturelle : cette propriété s'appelle la complétude de $\mathbb{R}$ (elle peut aussi s'étendre sans difficulté à $\mathbb{C}$) et est fondamentale pour de nombreuses applications en Analyse.

Quelques vidéos pour se cultiver:

Suites récurrentes complexes et... fractales :

🇬🇧 [Beyond the Mandelbrot set, intro to holomorphic dynamics](#) - - 3Blue1Brown 🇬🇧

♣ Du trèfle à brouter...

♠ Qui s'y frotte s'y pique!

♥ À connaître par cœur.

♦ Calculatoire, risque de rester sur le carreau!