9 | Compléments sur les réels

It can be of no practical use to know that π is irrational, but if we can know, it surely would be intolerable not to know.

Edward Charles Titchmarsh (1899-1963)

Introduction : les lacunes de $\mathbb{Q}$

Lorsque l'on définit les ensembles de nombres classiques, on commence par le plus petit : $\mathbb{N}$. On lui ajoute ensuite les opposés des entiers pour former $\mathbb{Z}$, et il est naturel de rajouter les inverses des entiers non-nuls (et en fait tous les quotients) pour obtenir $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire l'ensemble des quotients d'entiers, de dénominateurs strictement positifs.

Depuis l'antiquité, on sait pourtant qu'il existe des longueurs constructibles simplement à l'aide de longueurs entières et pourtant non rationnelles. C'est le cas de $\sqrt{2}$ qui est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont chacun des côtés de l'angle droit mesure l'unité de longueur. Cette insuffisance de $\mathbb{Q}$ en entraîne d'autres.

- ▷ On peut montrer que les deux suites u et v de nombres rationnels définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ ont une limite qui est $\sqrt{2}$. Leur limite n'est donc pas un nombre rationnel.
- ▷ La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & x^2 - 2 \end{array}$ prend des valeurs positives et négatives, et pourtant, elle ne s'annule pas. Autrement dit, le théorème des valeurs intermédiaires est faux pour les fonctions de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$!

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$, permettant par exemple de repérer par leur abscisse tous les points d'une droite munie d'un repère $(O, \vec{\imath})$ (appelée droite réelle).

Culture : $\mathbb{R}$ peut-être construit comme ensemble des limites possibles des suites de $\mathbb{Q}$ convergentes, bien que cela nécessite de définir ce qu'est une suite convergente autrement qu'en disant que c'est une suite ayant une limite.

I – Parties majorées, minorées, minimum, maximum

Définition 9.1 – Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- **Partie majorée :** On dit que A est **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in A, \quad a \leqslant M.$
  Un tel réel M est appelé **UN majorant** de A. On dit aussi que A est **majorée par** M ou encore que M **majore** A.
- **Partie minorée :** On dit que A est **minorée** si : $\exists m \in \mathbb{R}, q \quad \forall a \in A, \quad m \leqslant a.$
  Un tel réel m est appelé **UN minorant** de A. On dit aussi que A est **minorée par** m ou encore que m **minore** A.
- **Partie bornée :** On dit que A est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, *i.e* si :

$$\exists K \geqslant 0, \quad \forall a \in A, \quad |a| \leqslant K$$

Exemple 9.2 – Les nombres réels -3 et 8 sont respectivement un minorant et un majorant de l'intervalle $]1;2]$. Le nombre 2 est le plus grand élément de l'intervalle $]1,2]$ mais celui-ci n'a pas de plus petit élément.

ATTENTION ! On ne parle jamais « du » majorant d'une partie majorée de $\mathbb{R}$ mais bien toujours d' **UN** majorant car une telle partie en possède toujours plein. Tout réel supérieur ou égal à un majorant est lui-même un majorant.

Exemple 9.3 – L'intervalle $]-\infty, 1]$ est majoré par 1, mais aussi par 2 ou e^{100}... Il n'est en revanche pas minoré.

Définition 9.4 – Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- **Plus grand élément :** On appelle **plus grand élément de** A ou **maximum** de A tout élément de A qui majore A.
- **Plus petit élément :** On appelle **plus petit élément de** A ou **minimum** de A tout élément de A qui minore A.

Théorème 9.5

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, celui-ci est unique. On peut donc l'appeler **LE** plus grand (resp. petit) élément de A et le noter $\max A$ (resp. $\min A$).

Démonstration.

□

ATTENTION ! Le plus grand/petit élément est unique… **S'IL EXISTE !**

Exemple 9.6 – L'intervalle $[0,1[$ admet 0 comme plus élément mais **N'A PAS** de plus grand élément.

Démonstration.

□

Théorème 9.7 – Deux propriétés de $\mathbb{N}$

1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
2. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Démonstration.

1. Soit A une partie de $\mathbb{N}$, vide ou non. Supposons par contraposition que A ne possède pas de plus petit élément. Aucun élément de A ne peut alors minorer A. Nous allons alors montrer par récurrence que A est minoré par n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en découlera comme voulu que A est vide.

   Initialisation : A est minoré par 0 car toute partie de $\mathbb{N}$ l'est.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que A est minoré par n. Par hypothèse, A ne possède pas de plus petit élément, donc $n \notin A$, donc $a > n$ pour tout $a \in A$. Mais ceci revient à dire, puisque nous travaillons avec des **ENTIERS**, que $a \geqslant n+1$ pour tout $a \in A$. En d'autres termes, A est minorée par $n+1$.

2. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$. Par hypothèse, l'ensemble des majorants **ENTIERS** de A est non vide, donc possède un plus petit élément m d'après 1.
   - Supposons d'abord que $m = 0$. Dans ce cas, $a \leqslant m = 0$ pour tout $a \in A$, donc $a = 0$ car $a \in \mathbb{N}$. Puisque A est non vide, cela montre que $A = \{0\}$, et donc A admet 0 comme plus grand élément.
   - À présent, si $m \neq 0$: $m - 1 \in \mathbb{N}$. Par définition de m, $m - 1$ ne majore donc pas A, donc $m - 1 < a$ pour un certain $a \in A$. Or, l' **INÉGALITÉ D'ENTIERS** $m - 1 < a \leqslant m$ est en fait une **ÉGALITÉ** : $m = a$, donc $m \in A$. Ainsi, m est un élément de A qui majore A, *i.e* le plus grand élément de A.

□

II – Borne supérieure, borne inférieure

1 – Définition

Nous avons vu que $[0,1[$ n'admet pas de plus grand élément, pourtant sa borne 1 est quelque chose de cet ordre - mais quoi ? Comment décrire conceptuellement ce réel qui n'est pas dans $[0,1[$ mais qui n'est pas n'importe qui pour $[0,1[$? Ce qui rend le majorant 1 si particulier pour $[0,1[$, c'est qu'il est le meilleur majorant qu'on pouvait espérer, le plus petit possible - d'où la définition suivante.

Définition 9.8 (Borne supérieure, borne inférieure) – Soit A une partie **non-vide** de $\mathbb{R}$.

- Si A est majorée, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A (s'il existe) est appelé la **borne supérieure** de A. On la note $\sup(A)$. Si A n'est pas majorée, sa borne supérieure est $+\infty$.
- Si A est minorée, le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A (s'il existe) est appelé la **borne inférieure** de A. On la note $\inf(A)$. Si A n'est pas minorée, sa borne inférieure est $-\infty$.

La différence essentielle entre plus grand élément de borne supérieure, c'est que la borne supérieure, quand elle existe, n'appartient pas forcément à l'ensemble considéré.

Exemple 9.9 – Montrons proprement que $[0,1[$ admet 1 pour borne supérieure.

Démonstration.

□

En résumé, $[0,1[$ possède une borne supérieure, mais **PAS** de plus grand élément. Inversement, une partie de $\mathbb{R}$ peut-elle posséder un plus grand élément mais **PAS** de borne supérieure ? Eh bien non.

Théorème 9.10 – Propriété de la borne supérieure

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels possède la **propriété de la borne supérieure**, c'est-à-dire :

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure **finie**.

Par symétrie, le théorème suivant est également vrai.

Théorème 9.11 – Propriété de la borne inférieure

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure **finie**.

Ces deux théorèmes sont admis. Comme un ensemble non-majoré a pour borne supérieure $+\infty$ et qu'un ensemble non-minorée a pour borne inférieure $-\infty$, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 9.12 – Existence des bornes supérieures et inférieures

Toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide admet une borne inférieure et une borne supérieure.

Finissons par le résultat suivant qui résume le lien entre plus grand (resp. petit) élément et borne supérieure (resp. inférieure).

Proposition 9.13 – Liens entre bornes et éléments extrémaux

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. Si A possède un plus grand élément alors A possède une borne supérieure et $\max(A) = \sup(A)$.
2. Si A possède un plus petit élément alors A possède une borne inférieure et $\min(A) = \inf(A)$.
3. Si A possède une borne supérieure et si $\sup(A) \in A$ alors A possède un plus grand élément et $\max(A) = \sup(A)$.
4. Si A possède une borne inférieure et si $\inf(A) \in A$ alors A possède un plus petit élément et $\min(A) = \inf(A)$.

Démonstration. On démontre 1 et 3. Les preuves de 2 et 4 sont similaires.

□

La propriété de la borne supérieure est un pur résultat d' **EXISTENCE** et ne raconte rien d'intéressant sur la **VALEUR** des bornes supérieures. Telle borne supérieure existe, c'est magique, mais la propriété n'en dit pas plus. Nous n'avons pas eu besoin de la propriété de la borne supérieure pour montrer que $\sup[0,1[= 1$ car nous avions à l'avance une idée très claire de la valeur de cette borne, mais il arrivera souvent que nous n'ayons aucune idée précise de ce genre.

La propriété de la borne supérieure sera alors notre lueur dans l'obscurité, la petite magie qui fera surgir des êtres de nulle part et nous permettra d'avancer. Directement ou non, c'est de lui que nous allons déduire tous les grands théorèmes d'analyse du programme de MPSI - théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes, théorème de Bolzano-Weiertstrass, théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, théorème de Heine et construction de l'intégrale.

Par exemple, faites l'effort d'oublier que vous manipulez des racines carrées depuis des lustres. La racine carrée d'un réel positif a est par définition l'unique réel positif r pour lequel $r^2 = a$, mais cette définition est un théorème d'existence et d'unicité avant d'être une définition. L'unicité est claire, car pour tous $r, r' \geqslant 0$, si $r^2 = r'^2$, alors $r = \pm r'$, donc $r = r'$ par positivité. Mais l'existence, qui nous la garantit ? Si vous y réfléchissez bien, vous avez accepté l'existence des racines carrées sans même vous en rendre compte alors qu'elle n'a rien d'évident, et elle découle en fait de la propriété de la borne supérieure.

Fixons $a \geqslant 0$. J'affirme que l'ensemble $R = \left\{r \geqslant 0 \mid r^2 \leqslant a\right\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Si on part du principe qu'on connaît les racines carrées, alors évidemment $R = [0, \sqrt{a}]$, mais si on se donne au contraire pour mission de les définir, on sera content de pouvoir poser par définition $\sqrt{a} = \sup R$.

- Tout d'abord, R est non vide car il contient 0 .
- Ensuite, R est majoré par $a+1$ car pour tout $r \in R$: $\quad r^2 \leqslant a \leqslant a+1 \overset{a+1\geqslant 1}{\leqslant} (a+1)^2, \quad$ donc $(a+1-r)(a+1+r) \geqslant 0$, donc $a+1-r \geqslant 0$, et enfin $r \leqslant a+1$.

La propriété de la borne supérieure nous permet ainsi de poser $\sqrt{a} = \sup\left\{r \geqslant 0 \mid \quad r^2 \leqslant a\right\}$, et nous tenons là une vraie définition propre de la racine carrée.

III – Droite réelle achevée, intervalles

1 – La droite réelle achevée : $\overline{\mathbb{R}}$

La propriété de la borne supérieure est un outil puissant mais présente tout de même un gros inconvénient. On aurait préféré l'énoncé suivant : « TOUTE partie de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. » Que manque-t-il à $\mathbb{R}$ pour que ce résultat soit vrai ? Pourquoi $\mathbb{R}$ lui-même, par exemple, n'a-t-il pas de borne supérieure ? Réponse : parce qu'il n'a pas de majorant. Eh bien rajoutons-en ! Donnons-nous pour cela deux objets mathématiques quelconques extérieurs à $\mathbb{R}$ et notons-les $+\infty$ et $-\infty$. Peu importe qui ils sont, ce qui compte, ce sont les règles de calcul que nous allons leur imposer. En principe, ces règles devraient vous paraître naturelles.

Définition 9.14 – On appelle **droite numérique achevée** l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ où $-\infty$ et $+\infty$ sont deux objets non réels ayant la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent sur $\overline{\mathbb{R}}$ en complétant par les opérations suivantes

$$\begin{gathered}
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x + (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad x + (-\infty) = -\infty \\
(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\text{si } x > 0, \qquad x \times (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = -\infty \\
\text{si } x < 0, \qquad x \times (+\infty) = -\infty \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = +\infty \\
(+\infty) \times (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) \times (+\infty) = -\infty \qquad (-\infty) \times (-\infty) = +\infty.
\end{gathered}$$

Attention : Les opérations $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times (+\infty)$ et $0 \times (-\infty)$ ne sont pas définies.

La remarque qui suit est légèrement hors programme, mais néanmoins éclairante. Dans le nouveau monde $\overline{\mathbb{R}}$, rien ne nous empêche de définir comme nous l'avons fait dans $\mathbb{R}$ les notions de majorant/minorant, plus grand/petit élément et borne supérieure/inférieure. Il n'est pas trop dur de montrer que les majorants/plus grands éléments/bornes supérieures que nous calculons DANS $\mathbb{R}$ sont encore des majorants/plus grands éléments/bornes supérieures DANS $\overline{\mathbb{R}}$, mais certaines parties qui n'avaient PAS de majorant/plus grand élément/borne supérieure se trouvent maintenant en avoir.

- L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est majoré par $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et y admet même $+\infty$ pour borne supérieure alors qu'il n'était pas majoré DANS $\mathbb{R}$.
- L'ensemble vide admet tout élément de $\overline{\mathbb{R}}$ pour majorant DANS $\overline{\mathbb{R}}$, or $\overline{\mathbb{R}}$ admet $-\infty$ pour plus petit élément DANS $\overline{\mathbb{R}}$, donc $\varnothing$ admet $-\infty$ pour borne supérieure !

Plus généralement, dans le nouveau monde $\overline{\mathbb{R}}$ — merci $\overline{\mathbb{R}}$! — la propriété de la borne supérieure s'énonce avec plus de pureté, elle a trouvé son chez-soi :

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ - éventuellement $\pm\infty$.
En outre, pour une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ coïncident.

2 – Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

On rappelle la définition d'intervalle de $\mathbb{R}$:

Définition 9.15 – Une partie I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** si et seulement si, dès qu'elle contient deux réels, elle contient aussi tous les réels intermédiaires, c'est-à-dire :

$$\forall a, b \in I, \ \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} \subset I$$

Exemple 9.16 – $\mathbb{R}^+$ est un intervalle car tout réel compris entre deux réels positif est positif. Par contre, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle car 0 n'appartient pas à $\mathbb{R}^*$ et est pourtant compris entre 1 et -1 qui appartiennent eux à $\mathbb{R}^*$.

Proposition 9.17 – Intervalles de $\mathbb{R}$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties de $\mathbb{R}$ des formes suivantes :

- l'ensemble vide.
- les segments : $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \leqslant b$.
- les intervalles ouverts : $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ où $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $a < b$.
- les intervalles semi-ouverts :
  - $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$.
  - $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$.
- les intervalles fermés non bornés :
  - $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$ où $a \in \mathbb{R}$.
  - $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$ où $b \in \mathbb{R}$.

Remarque 9.18 – Les singletons $\{a\}$ sont les segments $[a,a]$ donc sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Démonstration. On peut vérifier que tous les ensembles listés vérifient bien la définition de ce qu'est un intervalle.

Réciproquement, considérons un intervalle I de $\mathbb{R}$. Tout d'abord, I peut être vide, dans ce cas, c'est bien l'un des ensembles listés. On suppose désormais que I n'est pas vide.

- 1er cas : I est borné. Comme I est borné et non vide, il possède une borne supérieure et une borne inférieure. Posons $c = \inf(I)$ et $d = \sup(I)$. Alors $I \subset [c,d]$ car c est un majorant de I et d un minorant de I.
  - Si $c = d$ alors $I = \{c\}$ car I est non vide. I est donc un singleton.
  - On suppose que $c < d$. Montrons que $]c,d[\subset I$. Soit $x \in]c,d[$. On pose $\eta = x - c > 0$ et $\varepsilon = d - x > 0$. Alors, par définition de la borne inférieure et de la borne supérieure, il existe deux éléments u et v de I tels que $u < c + \eta$ et $v > d - \varepsilon$. On a ainsi $x \in [u,v]$. Comme I est un intervalle, et que u et v appartiennent à I, on obtient $x \in I$, donc $]c,d[\subset I$. Ainsi $]c,d[\subset I \subset [c,d]$ donc I est l'un des ensembles $]c,d[$, $[c,d]$, $]c,d]$ ou $[c,d[$.
- 2e cas : I est minoré et non majoré. En posant $c = \inf(I)$, on obtient $I \subset [c,+\infty[$ et on démontre comme précédemment que $]c,+\infty[\subset I$. L'intervalle$I$ est alors l'un des deux ensembles $]c,+\infty[$ ou $[c,+\infty[$.
- 3e et 4e cas : on procède de même si I est majoré et non minoré, ou si I n'est ni majoré ni minoré.

□

Remarque 9.19 – L'intersection d'une famille quelconque d'intervalles est un intervalle.

Exemple 9.20 –

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{k} ; 1 + \frac{1}{k} \right[= [0,1] \qquad \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{k} ; 1 - \frac{1}{k} \right] = \{0\}$$

En revanche, la réunion de deux intervalles n'est pas nécessairement un intervalle. Par exemple $[0,1] \cup [2,3]$ est la réunion de deux intervalles et n'est pas un intervalle.

Proposition 9.21

Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Il y a ainsi toujours un rationnel et un irrationnel entre deux réels distincts.

Démonstration.

□

IV – Approximation décimale d'un nombre réel

Définition 9.22 – Soient $x, y \in \mathbb{R}$ deux nombres réels et $\alpha > 0$.
On dit que y **approche** x à α près si, et seulement si $|x-y| \leqslant \alpha$
On dit que y **approche** x à α près par excès si, et seulement si $|x-y| \leqslant \alpha$ et $x \leqslant y$.
On dit que y **approche** x à α près par défaut si, et seulement si $|x-y| \leqslant \alpha$ et $x \geqslant y$.

Définition 9.23 – On appelle **nombre décimal** tout nombre rationnel pouvant s'écrire sous la forme $\dfrac{p}{10^n}$ où p est un entier et n un entier naturel.

Proposition 9.24 – Approximation décimale des réels

Plus précisément, si $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$,

1. le nombre décimal $\dfrac{\lfloor x10^p \rfloor}{10^p}$ approche x à 10^{-p} près par défaut ;
2. le nombre décimal $\dfrac{\lfloor x10^p \rfloor + 1}{10^p}$ approche x à 10^{-p} près par excès.

Démonstration. On a $\lfloor x10^p \rfloor \leqslant x10^p < \lfloor x10^p \rfloor + 1$ donc $\dfrac{\lfloor x10^p \rfloor}{10^p} \leqslant x \leqslant \dfrac{\lfloor x10^p \rfloor}{10^p} + \dfrac{1}{10^p}$ ce qui donne le résultat puisque ces nombres décimaux encadrant x sont à une distance égale à 10^{-p} l'un de l'autre. □

Exemple 9.25 –

1. On a, à 10^{-2} près, $2,71 \leqslant \mathrm{e} \leqslant 2,72$.
2. On a, à 10^{-3} près, $1,414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,415$.
3. On a, à 10^{-4} près, $3,1415 \leqslant \pi \leqslant 3,1416$.

Tout nombre réel peut donc être approché aussi près que l'on veut par un nombre décimal, ce qui est un résultat plus fort que la Proposition 9.21. On peut aussi reformuler cela de la manière suivante :

Corollaire 9.26

Pour tout x réel, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres décimaux telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.

Partie	Ens des maj.	Ens des min.	Plus grand élt	Plus petit élt	Borne supérieure	Borne inférieure
$\{3; 12; -100\}$						
$[0; 1[\, \cup\,]3; 4[$						
$\{1/k; k \in \mathbb{Z}^*\}$						
$\{1/k; k \in \mathbb{N}^*\}$						
$\mathbb{N}$						
$]-\infty, 8[$						
$\{2k-1; k \in \mathbb{N}\}$						
$\mathbb{R}$						
$\varnothing$						