

8 | Sommes, produits, coefficients binomiaux

La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques.

Blaise Pascal (1623-1662), polymathe.

I – Calculs de sommes finies

1 – Notations

Notation 8.1 – Soit E une partie finie de $\mathbb{N}$. Pour tout $k \in E$ on considère le nombre complexe (ou réel) a_k . La somme de tous ces nombres est appelée somme des a_k pour k dans E et se note

$$\sum_{k \in E} a_k.$$

Dans le cas particulier où E est un intervalle de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire de la forme $\llbracket n, m \rrbracket = \{k \in \mathbb{N}, n \leq k \leq m\}$ où n et m sont deux entiers naturels tels que $n \leq m$, la somme s'appelle la somme des a_k pour k allant de n à m et on note

$$\sum_{k \in \llbracket n, m \rrbracket} a_k = \sum_{k=n}^m a_k = a_n + a_{n+1} + \dots + a_m.$$

Convention : Lorsque E est vide alors toute somme sur E vaut 0. En particulier si n et m sont deux entiers naturels tels que $n > m$ alors $\llbracket n, m \rrbracket = \emptyset$ et donc

$$\sum_{k=n}^m a_k = 0.$$

Exemple 8.2 –

- Pour $n = 3$ et $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0$ et $a_3 = -2$, on obtient $\sum_{k=0}^3 a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$
- Si E désigne les nombres premiers compris entre 2 et 11 alors

$$\sum_{k \in E} k^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 = 4 + 9 + 25 + 49 + 121 = 208$$

(ici, avec les notations précédentes, $a_k = k^2$.)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x , on a $\sum_{k=0}^n x = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n+1 \text{ termes}} = (n+1) \times x$
- La somme $\ln(3) + \ln(4) + \dots + \ln(15)$ peut aussi s'écrire $\sum_{k=3}^{15} \ln(k)$.
- La somme $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$ peut aussi s'écrire $\sum_{k=0}^{100} 2^k$.
- On a $\sum_{k=2}^5 k = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$
- On a $\sum_{k=0}^{10} n^2 = n^2 + n^2 + \dots + n^2 = 11n^2$.
- L'écriture $\sum_{k=2}^7 \frac{(-1)^k}{k}$ désigne la somme : $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$.
- Calculer $\sum_{k=2}^4 (k^2 + 1) = (2^2 + 1) + (3^2 + 1) + (4^2 + 1) = 5 + 10 + 17 = 32$.

Remarque 8.3 – Dans la notation précédente, l'indice de sommation k est un indice muet. On peut très bien choisir une autre lettre pour indexer la somme :

$$\sum_{k=0}^n a_k \text{ et } \sum_{j=0}^n a_j \text{ désignent tous les deux la même somme } a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$



ATTENTION ! En particulier, la somme $\sum_{k=0}^n a_k$ **NE PEUT PAS DÉPENDRE DE k !!!**

Notation 8.4 – Si maintenant E est l'ensemble des entiers de l'intervalle $[[n, m]]$ où n et m sont deux entiers naturels tels que $n \leq m$, qui vérifient une ou plusieurs conditions alors on écrira

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \text{condition(s)}}}^n a_k$$

Exemple 8.5 –

Si E désigne les nombres pairs compris entre 1 et 10 alors

$$\sum_{k \in E} \frac{k}{2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ est pair}}}^{10} \frac{k}{2} = \frac{2}{2} + \frac{4}{2} + \frac{6}{2} + \frac{8}{2} + \frac{10}{2} = 15.$$

2 – Propriétés

Proposition 8.6 – Linéarité de la somme

Soient n et m deux entiers naturels tels que $n \leq m$ et $a_n, a_{n+1}, \dots, a_m, b_n, b_{n+1}, \dots, b_m$ et λ des nombres complexes. On a

$$\sum_{k=n}^m \lambda a_k = \lambda \sum_{k=n}^m a_k \quad (\text{mise en facteur de } \lambda \text{ dans la somme})$$

$$\sum_{k=n}^m (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=n}^m a_k \right) + \left(\sum_{k=n}^m b_k \right) \quad (\text{on peut « scinder » une somme})$$



ATTENTION ! Dans la première formule, le réel λ ne dépend pas de k !
Une somme du type $\sum_{k=m}^n (a_k b_k)$ ne se simplifie pas!

Démonstration.

- $\sum_{k=n}^m \lambda a_k = \lambda a_n + \lambda a_{n+1} + \cdots + \lambda a_m = \lambda(a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m) = \lambda \sum_{k=n}^m a_k.$
- $\sum_{k=n}^m (a_k + b_k) = a_n + b_n + \cdots + a_m + b_m = a_n + \cdots + a_m + b_n + \cdots + b_m = \left(\sum_{k=n}^m a_k \right) + \left(\sum_{k=n}^m b_k \right).$

□

Exemple 8.7 – Calculer $\sum_{k=8}^{11} \frac{2k-1}{7}$ en développant la somme au maximum.

$$\begin{aligned} \sum_{k=8}^{11} \frac{2k-1}{7} &= \frac{2 \left(\sum_{k=8}^{11} k \right) - \left(\sum_{k=8}^{11} 1 \right)}{7} = \frac{2 \left(\sum_{k=8}^{11} k \right)}{7} - \frac{4}{7} \\ &= \frac{2(8+9+10+11)}{7} - \frac{4}{7} = \frac{2 \times 38}{7} - \frac{4}{7} = \frac{72}{7} \end{aligned}$$

3 – Quelques sommes classiques

Proposition 8.8 – Sommes de référence

On rappelle que pour tout entier naturel n et pour tout nombre complexe a ,

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \\ \text{ii)} \quad & \sum_{k=0}^n a^k = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration. i) La formule est vraie pour $n = 0$.

Remarquons que pour $n \geq 1$, on a $\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k$. On peut démontrer la formule par récurrence sur n .

Une façon plus simple de démontrer la formule est de calculer le double de cette somme :

$$\begin{array}{rcll} \sum_{k=1}^n k & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ + \sum_{k=1}^n k & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2 \sum_{k=1}^n k & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & (n \text{ termes}) \\ & = & n(n+1) & & & & & & & & & & \end{array}$$

d'où finalement l'égalité $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

ii) Pour $a = 1$, la formule est évidente. Pour $a \neq 1$, on a

$$\begin{array}{rcll} \sum_{k=0}^n a^k & = & 1 & + & a & + & a^2 & + & \dots & + & a^{n-1} & + & a^n \\ - a \sum_{k=0}^n a^k & = & a & + & a^2 & + & a^3 & + & \dots & + & a^n & + & a^{n+1} \\ \hline (1-a) \sum_{k=0}^n a^k & = & 1 - a^{n+1} & & & & & & & & & & \end{array}$$

Puisque $a \neq 1$, on obtient bien $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

□

Exemple 8.9 – Calculer $\sum_{k=0}^{101} \frac{2k-1}{7}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{101} \frac{2k-1}{7} &= \frac{2 \left(\sum_{k=0}^{101} k \right) - \left(\sum_{k=0}^{101} 1 \right)}{7} = \frac{2 \left(\sum_{k=0}^{101} k \right)}{7} - \frac{102}{7} \\ &= \frac{2 \left(\frac{101 \times 102}{2} \right)}{7} - \frac{102}{7} = \frac{100 \times 120}{7} = \frac{10200}{7} \end{aligned}$$

Exemple 8.10 – Soit $n \geq 2$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n}.$$

On pose $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Alors pour tout entier k entre 0 et $n-1$, $\omega^k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^0 \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0.$$

Proposition 8.11 – Somme de carrés

Pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration. Procédons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la proposition P_n : « $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

Initialisation : Pour $n=0$, $\frac{0(0+1)(0+1)}{6} = 0 = 0^2$.

Hérédité : Soit $n \geq 0$ fixé tel que P_n soit vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1) \times \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right) \\ &= (n+1) \times \left(\frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \right) \\ &= (n+1) \times \left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \right) \end{aligned}$$

$(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$. Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= (n+1) \times \left(\frac{(n+2)(2n+3)}{6} \right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : On en déduit par récurrence que pour tout n entier naturel, $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. □

Exemple 8.12 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Que vaut $A_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (4n)^2$? On remarque que

$$A_n = \sum_{k=1}^{4n} k^2$$

donc en utilisant la proposition précédente, on a que

$$A_n = \frac{4n(4n+1)(2 \times 4n+1)}{6} = \frac{2n(4n+1)(8n+1)}{3}$$

Exemple 8.13 – Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Calculer les deux sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (6k^2 + 4k + 1) \quad \text{Et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{3^{2k+1}}.$$

- On sépare la somme en trois termes en utilisant la propriété 8.6.

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n 6k^2 + \sum_{k=1}^n 4k + \sum_{k=1}^n 1 = 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + n \\
 &= 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \frac{n(n+1)}{2} + n = n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n \\
 &= n[(n+1)(2n+1) + 2(n+1) + 1] = n(2n^2 + n + 2n + 1 + 2n + 2 + 1) \\
 &= n(2n^2 + 5n + 4).
 \end{aligned}$$

- On remarque que :

$$T_n = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3^2}\right)^k = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{9}\right)^k.$$

On applique alors la deuxième formule de la Proposition 8.8 pour $a = \frac{2}{9}$, on obtient :

$$T_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{9}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}}{\frac{7}{9}} \right) = \frac{3}{7} \left(1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} \right).$$

Définition 8.14 – On appelle **somme télescopique** une somme dont les termes s'annulent de proche en proche.

Remarque 8.15 – Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on considère les nombres complexes a_k et b_k . On suppose que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = b_k - b_{k+1}$ alors la somme $\sum_{k=1}^n a_k$ est une somme télescopique. En effet

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) \\
 &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) \\
 &= b_1 - b_{n+1}
 \end{aligned}$$

Exemple 8.16 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

4 – Découpage de sommes

Proposition 8.17 – Découpage de sommes

Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Pour tous m, n et p dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leq p \leq n-1$, on a :

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k$$

Voici les découpages de sommes les plus fréquents :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n a_k &= a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \\ \sum_{k=0}^{n+1} a_k &= \sum_{k=0}^n a_k + a_{n+1} \\ \sum_{k=0}^n a_k &= \sum_{k=0}^m a_k + \sum_{k=\underline{m}+1}^n a_k \quad \text{pour tout } m \in \llbracket 0, n \rrbracket\end{aligned}$$

Remarque 8.18 – Il peut également arriver dans certains cas que l'on fasse le découpage de sommes suivant :

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ est paire}}}^n a_k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ est impaire}}}^n a_k$$

Remarque 8.19 – Le deuxième découpage est très souvent utilisé dès lors qu'il faut démontrer une formule impliquant le signe Σ par récurrence. On l'a d'ailleurs utilisé lors de la démonstration de la Propriété 8.11.

Exemple 8.20 – Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculer $\sum_{k=0}^n |k - m|$.

Pour $k \leq m$, on a $|k - m| = m - k$ et pour $k \geq m$, alors $|k - m| = k - m$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n |k - m| &= \sum_{k=0}^m |k - m| + \sum_{k=m+1}^n |k - m| = \sum_{k=0}^m (m - k) + \sum_{k=m+1}^n (k - m) \\ &= \sum_{k=0}^m m - \sum_{k=0}^m k + \sum_{k=m+1}^n k - \sum_{k=m+1}^n m \\ &= (m+1)m - \sum_{k=0}^m k + \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^m k - (n-m)m \\ &= (m+1-n+m)m - 2 \sum_{k=0}^m k + \sum_{k=0}^n k \\ &= (2m+1-n)m - m(m+1) + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= m(m-n) + \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

5 – Décalage d'indices

Pour commencer, nous étudions le cas simple où on fait un décalage de 1.

Considérons la somme $\sum_{i=1}^n a_i$. On pose $j = i - 1$. Ainsi,

- $i = j + 1$.
- Lorsque $i = 1$, alors $j = 0$.
- Lorsque $i = n$, alors $j = n - 1$.

On a ainsi l'égalité :

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}.$$

Exemple 8.21 – Calculer la somme $S = \sum_{i=2}^9 \frac{i^2 + 2i - 3}{i - 1}$.

On pose $j = i - 1$. Ainsi, $i = j + 1$. Lorsque $i = 2$, alors $j = 1$. De même, lorsque $i = 9$, alors $j = 8$. Donc :

$$\begin{aligned}S &= \sum_{i=2}^9 \frac{i^2 + 2i - 3}{i - 1} = \sum_{j=1}^8 \frac{(j+1)^2 + 2(j+1) - 3}{j} \\ &= \sum_{j=1}^8 \frac{j^2 + 2j + 1 + 2j + 2 - 3}{j} = \sum_{j=1}^8 \frac{j^2 + 4j}{j} = \sum_{j=1}^8 (j + 4).\end{aligned}$$

Par suite, on en déduit que :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^8 j + \sum_{j=1}^8 4 = \sum_{j=1}^8 j + 4 \sum_{j=1}^8 1 \\ &= \sum_{j=1}^8 j + 4 \times 8 = \frac{8(8+1)}{2} + 32 = 36 + 32 = 68. \end{aligned}$$

Proposition 8.22 – Changement d'indice

Soient m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leq n$ alors

$$\sum_{k=m}^n a_{k+p} = \sum_{i=m+p}^{n+p} a_i.$$

On dit alors qu'on a effectué le changement d'indice $i = k + p$.

Remarque 8.23 – Étant donné que les indices sont muets, on peut écrire avec les notations de la proposition précédente

$$\sum_{k=n}^m a_k = \sum_{j=n+p}^{m+p} a_{j-p} = \sum_{k=n+p}^{m+p} a_{k-p}.$$

Exemple 8.24 – Voilà comment on peut rédiger le calcul de la somme télescopique de l'exemple 8.16 : soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} && \text{on scinde la somme en deux} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \end{aligned}$$

en décalant l'indice de 1 dans la deuxième somme. Puis, en changeant le nom de l'indice dans la deuxième somme, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= 1 + \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right) - \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{n+1} && \text{découpage des deux sommes} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

6 – Sommes doubles

On considère une famille de nombres réels indexés par deux indices : un indice i variant entre 1 et n pour un entier n donné et un indice j variant entre 1 et p pour un entier p donné.

On peut représenter ces nombres dans un tableau où l'indice i représente le numéro de ligne et l'indice j le numéro de colonne :

$i \backslash j$	1	2	3	...	p
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1p}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	...	a_{np}

Définition 8.25 – La somme de tous les éléments a_{ij} de ce tableau est notée $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij}$.

Curieux au premier abord, ce genre d'indexation est plus courant qu'il n'y paraît. Par exemple, quand on multiplie une somme de m termes et une somme de n termes, on obtient en développant une somme de mn termes, mais qu'on peut écrire avec un seul $\sum$.

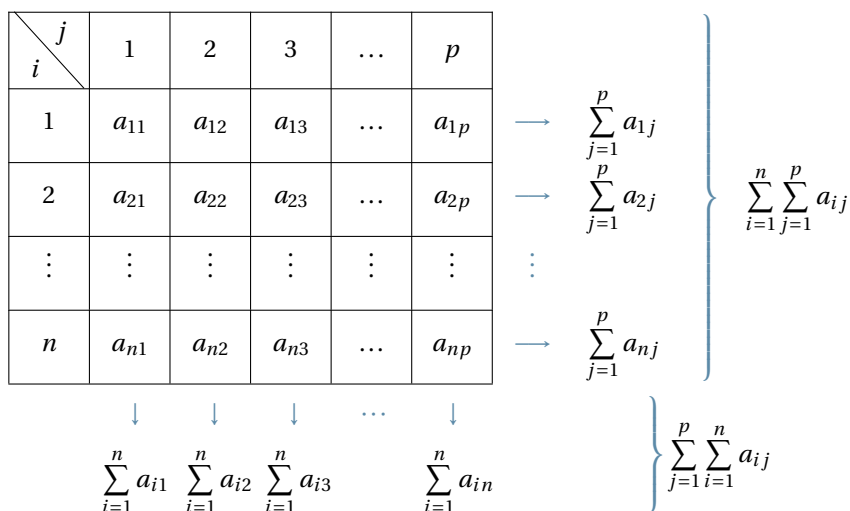
$$\sum_{i=1}^m a_i \times \sum_{j=1}^n b_j = (a_1 + \dots + a_m) \times (b_1 + \dots + b_n) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + \dots + a_m b_{n-1} + a_m b_n = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j$$

Théorème 8.26 – Produit de deux $\sum$

Pour tous $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$: $\sum_{i=1}^m a_i \times \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j$.

La somme des termes d'un tableau à deux entrées peut être calculée en sommant par paquets d'abord sur les lignes, ou bien d'abord sur les colonnes.

Somme des termes d'un tableau rectangulaire : $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij}$



Exemple 8.27 –

Par exemple les termes de la somme $\sum_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 3}} (i + 2j)$ peuvent-être représentés dans le tableau

$i \backslash j$	1	2	3
1	3	5	7
2	4	6	8
3	5	7	9
4	6	8	10

La valeur de cette somme est la somme des nombres de ce tableau (sans bien-sûr ceux de la première ligne et de la première colonne qui sont les valeurs possibles de i et j ...) c'est-à-dire 78.

Pour calculer la somme des nombres de ce tableau on peut regrouper les nombres dans des sous ensembles comme les lignes ou les colonnes du tableau.

Ici, si l'on note L_1, L_2, L_3 et L_4 les sommes des nombres du tableau sur chaque ligne et C_1, C_2 et C_3 celles sur chaque

colonne on obtient :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 3}} (i+2j) = \sum_{i=1}^4 L_i = 15 + 18 + 21 + 24 = 78$$

$$= \sum_{j=1}^3 C_j = 18 + 26 + 34 = 78$$

Notons que pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, L_i étant la somme des nombres de la ligne i du tableau, on a $L_i = \sum_{j=1}^3 (i+2j)$ et de même pour tout $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $C_j = \sum_{i=1}^4 (i+2j)$. Ainsi on peut écrire

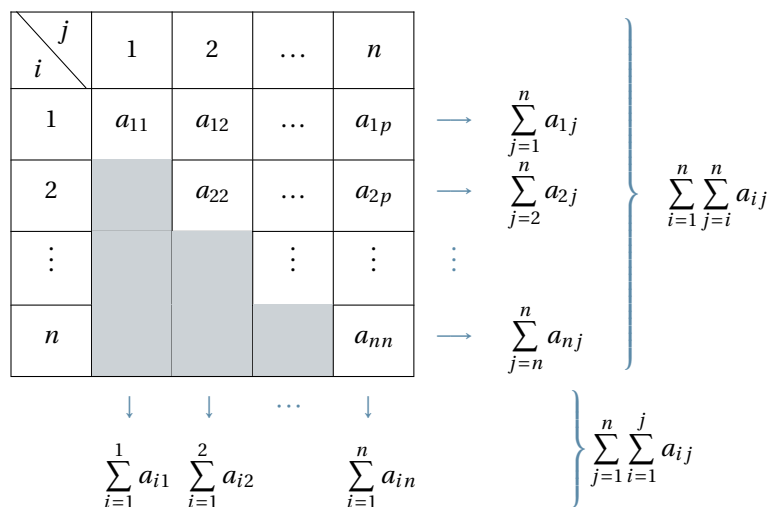
$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 3}} (i+2j) = \sum_{i=1}^4 L_i = \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^3 (i+2j) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^3 C_j = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^4 (i+2j) \right)$$

Exemple 8.28 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)$

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (i+j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(ni + \sum_{j=1}^n j \right) \\ &= n \left(\sum_{i=1}^n i \right) + n \left(\sum_{j=1}^n j \right) \\ &= 2n \left(\sum_{i=1}^n i \right) \\ &= 2n \frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1) \end{aligned}$$

Somme des termes d'un tableau triangulaire avec diagonale : $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij}$



Exemple 8.29 – Par exemple, si $E_1 = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$ et $E_2 = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq j \leq i \leq 3\}$, les termes des sommes

$$S_1 = \sum_{(i,j) \in E_1} (2j - i) = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (2j - i) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{(i,j) \in E_2} i^j = \sum_{1 \leq j \leq i \leq 3} i^j$$

peuvent-être représentés par les tableaux

$S_1 :$					$S_2 :$			
$i \backslash j$	1	2	3	4	$i \backslash j$	1	2	3
1			3	5	1	1		
2				4	2	2	4	
3					3	3	9	27
4								

Les valeurs de ces sommes sont les sommes des nombres dans ces tableaux c'est-à-dire $S_1 = 30$ et $S_2 = 46$.

Pour calculer les sommes des nombres de ces tableaux on peut regrouper les nombres dans des sous-ensembles comme les lignes ou les colonnes du tableau.

• Examinons dans un premier temps le cas de S_1 : On note L_1, L_2 et L_3 les sommes des nombres du tableau sur chaque ligne et C_2, C_3 et C_4 celles sur chaque colonne.

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^3 L_i = 15 + 10 + 5 = 30 \\ &= \sum_{j=2}^4 C_j = 3 + 9 + 18 = 30 \end{aligned}$$

Notons que pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, L_i étant la somme des nombres de la ligne i du tableau, on a $L_i = \sum_{j=i+1}^n (2j - i)$ et de même pour tout $j \in \llbracket 2, 4 \rrbracket$, $C_j = \sum_{i=1}^{j-1} (2j - i)$. Ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (2j - i) = \sum_{i=1}^3 L_i = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=i+1}^4 (2j - i) \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 C_j = \sum_{j=2}^4 \left(\sum_{i=1}^{j-1} (2j - i) \right) \end{aligned}$$

• Examinons le cas de S_2 : On note L_1, L_2 et L_3 les sommes des nombres du tableau sur chaque ligne et C_1, C_2 et C_3 celles sur chaque colonne.

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=1}^3 L_i = 1 + 6 + 39 = 46 \\ &= \sum_{j=1}^3 C_j = 6 + 13 + 27 = 46 \end{aligned}$$

Notons que pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, L_i étant la somme des nombres de la ligne i du tableau, on a $L_i = \sum_{j=1}^i i^j$ et de même pour tout $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $C_j = \sum_{i=j}^3 i^j$. Ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{1 \leq j \leq i \leq 3} i^j = \sum_{i=1}^3 L_i = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^i i^j \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 C_j = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=j}^3 i^j \right) \end{aligned}$$

Exemple 8.30 – Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$.

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} (j - i) \right) = \sum_{j=2}^n \left(j(j-1) - \sum_{i=1}^{j-1} i \right) \\
 &= \sum_{j=2}^n \left(j(j-1) - \frac{j(j-1)}{2} \right) = \sum_{j=2}^n \left(\frac{j^2 - j}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n j = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \\
 &= \frac{n(n+1)}{4} \left(\frac{2n+1}{3} - 1 \right) = \frac{n(n+1)}{4} \times \frac{2n-2}{3} \\
 &= \frac{n(n+1)(n-1)}{6}
 \end{aligned}$$

II – Produits

1 – Notations

Notation 8.31 – Soit E une partie finie de $\mathbb{N}$. Pour tout $k \in E$ on considère le nombre complexe (ou réel) a_k . Le produit de tous ces nombres est appelée produit des a_k pour k dans E et se note

$$\prod_{k \in E} a_k.$$

Dans le cas particulier où E est un intervalle de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire de la forme $\llbracket n, m \rrbracket = \{k \in \mathbb{N}, n \leq k \leq m\}$ où n et m sont deux entiers naturels tels que $n \leq m$, le produit s'appelle le produit des a_k pour k allant de n à m et on note

$$\prod_{k \in \llbracket n, m \rrbracket} a_k = \prod_{k=n}^m a_k = a_n \times a_{n+1} \times \cdots \times a_m.$$

Convention : Lorsque E est vide alors tout produit sur E vaut 1. En particulier si n et m sont deux entiers naturels tels que $n > m$ alors $\llbracket n, m \rrbracket = \emptyset$ et donc

$$\prod_{k=n}^m a_k = 1.$$

Remarque 8.32 – Dans la notation précédente, l'indice k du produit est un indice muet. On peut très bien choisir une autre lettre pour indexer le produit :

$$\prod_{k=0}^n a_k \text{ et } \prod_{j=0}^n a_j \text{ désignent tous les deux le même produit } a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n.$$



ATTENTION ! En particulier, le produit $\prod_{k=0}^n a_k$ NE PEUT PAS DÉPENDRE DE k !!!

Exemple 8.33 – Écrivons les expressions suivantes sans le signe $\prod$.

- $\prod_{k=3}^5 k^2 = 3^2 \times 4^2 \times 5^2 = 9 \times 16 \times 25 = 3600.$

- $\prod_{k=2}^7 \frac{k}{k+1} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7} \times \frac{7}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$

- Pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel x , on a $\prod_{j=1}^n x = x^n$

Écrivons les produits suivants avec le signe $\prod$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad 1 \times 2 \times 4 \times 8 \times 16 \times 32 &= \prod_{k=1}^5 2^k. \\ \bullet \quad \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \dots \times \frac{9}{11} &= \prod_{k=3}^9 \frac{k}{j+2}. \end{aligned}$$

2 – Propriétés

Proposition 8.34

Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Pour tout λ dans $\mathbb{R}$ et pour tous m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leq n$, on a :

- $\prod_{k=m}^n (a_k \times b_k) = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right) \times \left(\prod_{k=m}^n b_k \right).$
- En supposant que $\forall k \in \llbracket m, n \rrbracket \quad b_k \neq 0$ alors : $\prod_{k=m}^n \left(\frac{a_k}{b_k} \right) = \frac{\prod_{k=m}^n a_k}{\prod_{k=m}^n b_k}.$
- $\prod_{k=m}^n (\lambda a_k) = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^n a_k$
- Relation de Chasles : $\prod_{k=m}^n a_k = \prod_{k=m}^p a_k \times \prod_{k=p+1}^n a_k$ pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq p \leq n-1$.

Démonstration. On démontre les premiers et troisièmes points. Les démonstrations des autres points reposent sur les mêmes idées.

- $\prod_{k=n}^m \lambda a_k = \lambda a_n \lambda a_{n+1} \dots \lambda a_m = \lambda^{m-n+1} a_n a_{n+1} \dots a_m = \lambda^{m-n+1} \prod_{k=n}^m a_k.$
- $\prod_{k=n}^m a_k b_k = a_n b_n a_{n+1} b_{n+1} \dots a_m b_m = a_n a_{n+1} \dots a_m b_n b_{n+1} \dots b_m = \left(\prod_{k=n}^m a_k \right) \left(\prod_{k=n}^m b_k \right).$

□



ATTENTION ! Un produit de la forme $\prod_{k=m}^n (a_k + b_k)$ ne se simplifie pas !

Exemple 8.35 – Calculons les deux produits suivants :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \prod_{k=1}^n 3 &= 3^n. \\ \bullet \quad \prod_{k=0}^n \frac{4^k}{2} &= \frac{\prod_{k=0}^n 4^k}{\prod_{k=0}^n 2} = \frac{4^0 \times 4^1 \times 4^2 \times \dots \times 4^n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{4^{0+1+2+\dots+n}}{2^{n+1}} = \frac{4^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^{n+1}} = \frac{2^{2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2^{n(n+1)}}{2^{n+1}} = 2^{n(n+1)-(n+1)} = 2^{(n+1)(n-1)}. \end{aligned}$$

Exemple 8.36 – Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n}$. On a :

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = \exp \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2ik\pi}{n} \right) = \exp \left(\frac{2i\pi}{n} \times \frac{n(n-1)}{2} \right) = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}.$$

Définition 8.37 – On appelle **produit télescopique** un produit dont les termes se simplifient de proche en proche.

Remarque 8.38 – Soit $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on considère les nombres complexes non nuls a_k et b_k . On suppose que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = \frac{b_{k+1}}{b_k}$ alors le produit $\prod_{k=1}^n a_k$ est un produit télescopique. En effet

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n a_k &= \prod_{k=1}^n \frac{b_{k+1}}{b_k} \\ &= \frac{\cancel{b_2}}{b_1} \times \frac{b_3}{\cancel{b_2}} \times \frac{\cancel{b_4}}{b_3} \times \cdots \times \frac{b_n}{\cancel{b_{n-1}}} \times \frac{b_{n+1}}{\cancel{b_n}} \\ &= \frac{b_{n+1}}{b_1} \end{aligned}$$

Exemple 8.39 – Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \\ &= \frac{\cancel{2}}{1} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}} \times \frac{n+1}{\cancel{n}} \\ &= n+1 \end{aligned}$$

3 – Notation factorielle

Définition 8.40 – Soit n dans $\mathbb{N}$. On appelle **factorielle** de l'entier n le nombre noté $n!$ et défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

avec la convention $0! = 1$.

Exemple 8.41 –

- $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.
- $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$.
- $25! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 25 = 15511210043330985984000000$.

Exemple 8.42 – Simplifier les expressions suivantes :

- $\frac{7!}{5!} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times 5 \times 6 \times 7}{5!} = \frac{5! \times 6 \times 7}{5!} = 42$.
- $\frac{10!}{8! \times 2!} = \frac{8! \times 9 \times 10}{8! \times 2!} = \frac{90}{2!} = 45$.
- $\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Exemple 8.43 – Exprimer à l'aide de la factorielle le produit : $U_n = \prod_{k=1}^n (5k)$.

D'après les propriétés :

$$U_n = \prod_{k=1}^n (5k) = \prod_{k=1}^n 5 \times \prod_{k=1}^n k = 5^n n!$$

Exemple 8.44 – Calculer le produit : $W_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Remarquons que $1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$, on a alors

$$W_n = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!}$$

On obtient :

$$W_n = \frac{(n-1)!}{(n-1)! \times n} = \frac{1}{n}.$$

III – Formule du binôme de Newton

1 – Coefficient binomial

Définition 8.45 – Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

On appelle **coefficient binomial** « p parmi n », le nombre noté $\binom{n}{p}$ et défini par

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{si } 0 \leq p \leq n$$

$$= 0 \quad \text{sinon.}$$



Méthode 8.46 –

Pour calculer les valeurs de ces coefficients, on utilise rarement la définition. En effet, on remarque que si $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}.$$

Spoiler Alert – Comme nous le verrons dans le chapitre sur le dénombrement, $\binom{n}{p}$ est aussi le nombre de façon de prendre un sous-ensemble de p éléments parmi un ensemble de n éléments.

Exemple 8.47 – Simplifier $\frac{p}{n+1} \binom{n+1}{p}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq p \leq n+1$.

$$\begin{aligned} \frac{p}{n+1} \binom{n+1}{p} &= \frac{p}{n+1} \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} \\ &= \frac{p}{n+1} \frac{(n+1) \times n!}{p \times (p-1)!(n-(p-1))!} \\ &= \frac{n!}{(p-1)!(n-(p-1))!} \\ &= \binom{n}{p-1} \end{aligned}$$

Proposition 8.48 – Symétrie des coefficients binomiaux

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Démonstration. • Si $p > n$, alors $n - p < 0$ et l'égalité n'est rien d'autre que $0 = 0$. Même chose si $p < 0$.

• Si $p < n$, on a

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}.$$

□

Proposition 8.49 – Formule de Pascal

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$.

Remarque 8.50 – La formule de Pascal, associée au fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, permet de calculer tous les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ de proche en proche. Le tableau obtenu ci dessous est connu sous le nom de **triangle de Pascal**.

$n \setminus p$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Démonstration.

- Si $p = 0$, il s'agit de l'égalité $1 = 1 + 0$ qui est évidente.
- Si $p < 0$, il s'agit de l'égalité $0 = 0 + 0$.
- Si $p = n + 1$, il s'agit de l'égalité $1 = 0 + 1$.
- Si $p > n + 1$ il s'agit encore de l'égalité $0 = 0 + 0$.
- Supposons $1 \leq p \leq n$. On a

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} &= \frac{n!(n+1-p)}{(n+1-p)!p!} + \frac{n!p}{(n-p+1)!p!} \\ &= \frac{n!(n+1-p+p)}{(n+1-p)!p!} = \frac{n!(n+1)}{(n+1-p)!p!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!p!} = \binom{n+1}{p}. \end{aligned}$$

□

2 – Le binôme de Newton

Théorème 8.51 – Formule du binôme de Newton

Soient x et $y \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \end{aligned}$$

En particulier

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{et} \quad (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Remarque 8.52 – Cette formule est à l'origine du nom donné aux $\binom{n}{k}$ de coefficients binomiaux.

Exemple 8.53 – Soit x et y deux nombres complexes. Développer $(x + y)^4$ et $(x - y)^5$.

$$(x + y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

$$\begin{aligned}(x - y)^5 &= \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4(-y) + \binom{5}{2}x^3(-y)^2 + \binom{5}{3}x^2(-y)^3 + \binom{5}{4}x(-y)^4 + \binom{5}{5}(-y)^5 \\ &= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5.\end{aligned}$$

Démonstration. Soient x et y dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n : \ll (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \gg$. Montrons par récurrence sur n que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $(x + y)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^{0-k} y^k = x^0 y^0 = 1$.

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que P_n est vraie, c'est à dire que $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$. Alors,

$$\begin{aligned}(x + y)^{n+1} &= (x + y) \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^\ell y^{n-(\ell-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + \binom{n}{n+1} x^{n+1} y^0\end{aligned}$$

car $\binom{n}{n+1} = 0$. Comme $\binom{n}{-1} = 0$, on a

$$\begin{aligned}(x + y)^{n+1} &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^\ell y^{n-(\ell-1)} + \binom{n}{-1} x^0 y^{n+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^\ell y^{n-(\ell-1)} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} x^k y^{n-(k-1)} + \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n-(k-1)}\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Pascal (8.49), on en déduit que

$$(x + y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-(k-1)}.$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Par récurrence, la formule du binôme de Newton est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Exemple 8.54 –

1. Déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Un vide est un 1 qui se cache...)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n.$$

2. Déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ (on pourra calculer cette somme pour des petites valeurs de n puis faire une conjecture).

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n$$

ce qui vaut 0 si $n \neq 0$ et 1 si $n = 0$.

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, développer $(x+1)^n$.

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

(b) Dériver l'égalité précédente et en déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

$x \mapsto (1+x)^n$ est une fonction polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}.$$

En évaluant cette relation en 1, on obtient

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

Théorème 8.55 – Factorisation de $x^n - y^n$

Soient x et y des nombres complexes et $n \geq 1$ un entier naturel.

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

En particulier

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \quad \text{et} \quad x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} y^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n x^k y^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} \\ &= x^n - y^n. \end{aligned}$$

□

Exemple 8.56 – Soient x et y deux nombres complexes. Factoriser $x^4 - y^4$, $x^5 + y^5$ et $x^2 + y^2$.

$$x^4 - y^4 = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3).$$

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= x^5 - (-y)^5 \\ &= (x - (-y))(x^4 + x^3(-y) + x^2(-y)^2 + x(-y)^3 + (-y)^4) \\ &= (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) \end{aligned}$$

Comme $i^2 = -1$, on a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 - (iy)^2 \\ &= (x - iy)(x + iy) \end{aligned}$$

IV – Applications

1 – Factorisation d'une expression polynomiale

Définition 8.57 – On appelle **fonction polynomiale complexe** toute application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme P :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \end{aligned} \quad \text{où } n \text{ est un entier naturel et } a_0, \dots, a_n \text{ des complexes fixés.}$$

Exemple 8.58 – La fonction $P : \begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto 2iz^3 - \pi z^2 + 1 \end{aligned}$ est polynomiale.

Définition 8.59 – Soit P une fonction polynomiale complexe et α un nombre complexe. On dit que α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Exemple 8.60 – -2 est une racine de la fonction polynomiale $P : \begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^3 - 2z + 4 \end{aligned}$ car $P(-2) = 0$.

Proposition 8.61

Soit P une fonction polynomiale complexe et $\alpha \in \mathbb{C}$. Si α est une racine de P , alors il existe une fonction polynomiale complexe Q telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z - \alpha)Q(z)$$

autrement dit, on peut factoriser la fonction polynomiale par $(z - \alpha)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n$ des nombres complexes tels que l'on puisse écrire

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

Supposons que α est racine de P . Alors $P(\alpha) = 0$ et donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z) - 0 = P(z) - P(\alpha) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n a_k z^k \right) - \left(\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^n (a_k z^k - a_k \alpha^k) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \underbrace{(z^k - \alpha^k)}_{=0 \text{ si } k=0} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (z^k - \alpha^k). \end{aligned}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $z^k - \alpha^k = (z - \alpha) \sum_{\ell=0}^{k-1} z^\ell \alpha^{k-1-\ell}$

donc en reportant dans $P(z)$, on obtient
$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=1}^n a_k (z - \alpha) \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} z^\ell \alpha^{k-1-\ell} \right) \\ &= (z - \alpha) Q(z) \end{aligned}$$

où l'on a posé $Q(z) = \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} z^\ell \alpha^{k-1-\ell} \right)$. La fonction Q est bien polynomiale puisque pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} Q(z) &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} a_k z^\ell \alpha^{k-1-\ell} \right) = \sum_{0 \leq \ell < k \leq n} a_k z^\ell \alpha^{k-1-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\sum_{k=\ell+1}^n a_k z^\ell \alpha^{k-1-\ell} \right) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\sum_{k=\ell+1}^n a_k \alpha^{k-1-\ell} \right) z^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} b_\ell z^\ell \end{aligned}$$

où l'on a posé $b_\ell = \sum_{k=\ell+1}^n a_k \alpha^{k-1-\ell}$ pour tout $\ell \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, ce qui est bien une constante complexe.

□

2 – Transformation de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en polynômes en $\cos(x)$ et $\sin(x)$

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x , il est possible de transformer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ de sorte à ce qu'il s'expriment comme un polynôme en $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Pour cela, on part de la formule de De Moivre :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) + i \sin(nx) = (\cos(x) + i \sin(x))^n$$

qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = \Re e((\cos(x) + i \sin(x))^n) \quad \text{et} \quad \sin(nx) = \Im m((\cos(x) + i \sin(x))^n).$$

On applique alors la formule du binôme de Newton pour développer $(\cos(x) + i \sin(x))^n$.

Exemple 8.62 – Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ comme des polynômes en $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

D'après la formule de De Moivre, $\cos(4x) + i \sin(4x) = (\cos(x) + i \sin(x))^4$. On développe à l'aide de la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned} \cos(4x) + i \sin(4x) &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \cos^k(x) i^{4-k} \sin^{4-k}(x) \\ &= \sin^4(x) - 4i \cos(x) \sin^3(x) - 6 \cos^2(x) \sin^2(x) + 4i \cos^3(x) \sin(x) + \cos^4(x) \\ &= [\sin^4(x) - 6 \cos^2(x) \sin^2(x) + \cos^4(x)] + i4 [\cos^3(x) \sin(x) - \cos(x) \sin^3(x)] \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire dans cette dernière égalité, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(4x) &= \sin^4(x) - 6 \cos^2(x) \sin^2(x) + \cos^4(x), \\ \sin(4x) &= 4 \cos^3(x) \sin(x) - 4 \cos(x) \sin^3(x). \end{aligned}$$

Remarque 8.63 – En utilisant que $\sin^2 = 1 - \cos^2$, on peut toujours écrire $\cos(nx)$ comme un polynôme en $\cos(x)$.

Par exemple,

$$\begin{aligned} \cos(4x) &= (1 - \cos^2(x))^2 - 6 \cos^2(x)(1 - \cos^2(x)) + \cos^4(x) \\ &= 1 - 2 \cos^2(x) + \cos^4(x) - 6 \cos^2(x) + 6 \cos^4(x) + \cos^4(x) \\ &= 1 - 8 \cos^2(x) + 8 \cos^4(x) \end{aligned}$$

De même, en utilisant que $\cos^2 = 1 - \sin^2$, on peut toujours trouver un polynôme P réel tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(nx) = \cos(x) \times P(\sin(x))$.

$$\begin{aligned} \sin(4x) &= \cos^2(x) \cos(x) \sin(x) - \cos(x) \sin^3(x) \\ &= (1 - \sin^2(x)) \cos(x) \sin(x) - \cos(x) \sin^3(x) \\ &= \cos(x) (\sin(x) - 2 \sin^3(x)) \end{aligned}$$

V – Calcul de sommes de fonctions circulaires

En factorisant par l'angle moitié, on obtient les identités suivantes : pour tous réels x et y , on a

$$e^{ix} + e^{iy} = e^{i(x+y)/2} (e^{i(x-y)/2} + e^{-i(x-y)/2}) = 2e^{i(x+y)/2} \cos((x-y)/2)$$

$$\text{et } e^{ix} - e^{iy} = e^{i(x+y)/2} (e^{i(x-y)/2} - e^{-i(x-y)/2}) = 2ie^{i(x+y)/2} \sin((x-y)/2).$$

En utilisant ces identités, on peut, par exemple, calculer aisément des sommes de fonctions circulaires :

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et soit n un nombre entier naturel.

$$\text{Calculer } C = \sum_{k=0}^n \cos(kx) \text{ et } S = \sum_{k=0}^n \sin(kx).$$

On a :

$$C = \sum_{k=0}^n \cos(kx) = \sum_{k=0}^n \Re(e^{ikx}) = \Re\left(\sum_{k=0}^n e^{ikx}\right) = \Re\left(\sum_{k=0}^n (e^{ix})^k\right).$$

On utilise maintenant la formule donnant l'expression de la somme partielle d'une suite géométrique : pour tout nombre complexe $q \neq 1$, on a $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

On a donc $C = \Re\left(\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right)$ et en factorisant le numérateur par $e^{i(n+1)x/2}$ et le dénominateur par $e^{ix/2}$, on obtient :

$$C = \Re\left(e^{inx/2} \frac{-2i \sin((n+1)x/2)}{-2i \sin(x/2)}\right) = \Re\left((\cos(nx/2) + i \sin(nx/2)) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right).$$

Finalement,

$$C = \frac{\cos(nx/2) \sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

On a également

$$S = \Im\left(e^{inx/2} \frac{-2i \sin((n+1)x/2)}{-2i \sin(x/2)}\right) = \Im\left((\cos(nx/2) + i \sin(nx/2)) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right).$$

Donc,

$$S = \frac{\sin(nx/2) \sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$