

# 7 | Rappels et compléments sur les suites

La nature est un livre écrit en langage mathématiques.

Galilée, polymathe (1564-1642).

## I – Généralités sur les suites réelles

### 1 – Introduction

Intuitivement, une suite réelle est une liste (infinie) de nombres réels. Par exemple, la liste (en ordre croissant) des puissances de 2 est une suite :

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$$

On convient usuellement de poser  $u_0 = 1$ , puis  $u_1 = 2$ , puis  $u_2 = 4$ , etc.

D'autres choix sont tout à fait possibles : on peut poser  $v_1 = 1$ , puis  $v_2 = 2$ , puis  $v_3 = 4$ , etc.

On peut également poser  $w_5 = 1$ , puis  $w_6 = 2$ , puis  $w_7 = 4$ , etc.

La suite notée  $(u_n)$  est donc une fonction  $u$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ . De même, la suite  $(v_n)$  est une fonction  $v$  de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{R}$ . Enfin, la suite  $(w_n)$  est une fonction  $w$  de  $\llbracket 5; +\infty \rrbracket$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 7.1** – On appelle **suite réelle** toute famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels indexée par  $\mathbb{N}$ , c'est-à-dire toute application  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On la note  $u$  ou encore  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Notation 7.2** – On note  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites réelles indexées par  $\mathbb{N}$ .

**Remarque 7.3** – Une suite réelle de terme général  $u_n$  peut aussi être indexée par les entiers naturels supérieurs à un entier  $n_0$ . Une telle suite est notée  $(u_n)_{n \geq n_0}$ . Par exemple, la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \sqrt{n-2}$  n'est définie que pour  $n \geq 2$ . On dira alors que  $(u_n)_n$  est définie sur  $I = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$  et on notera la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$ .



**ATTENTION !** Pour une rédaction rigoureuse, on distinguera bien  $u_n$  qui est un nombre car c'est le terme de rang  $n$  de la suite et  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui est la suite elle-même. C'est la même chose que de ne pas confondre la fonction  $f$  et réel  $f(x)$ .

### 2 – Modes de définition d'une suite

On peut définir une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de plusieurs manières différentes :

- ▷ **de manière explicite** : chacun des termes de la suite est donné en fonction de  $n$ .

**Exemple 7.4** – La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \exp(-n+1)$  est définie de manière explicite. Avec cette définition, on connaît directement la valeur de chaque terme de la suite. Ici,  $u_{20} = \exp(-19)$ .

- ▷ **de manière implicite** : tous les termes de la suite sont correctement définis mais on ne dispose pas de la valeur explicite de chacun de ses termes.

**Exemple 7.5** – Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^5 + nx - 1 \end{matrix}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^+$  dans  $[-1; +\infty[$  donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique nombre  $u_n \in \mathbb{R}^+$  tel que  $f_n(u_n) = 0$ . On définit ainsi une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et, *a priori*, il n'est pas possible d'obtenir, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression directe de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exemple 7.6** – Soit la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $w_n$  soit le  $n$ -ième nombre premier. On peut facilement calculer les premiers termes :  $w_1 = 2, w_2 = 3, w_3 = 5, w_4 = 7, w_5 = 11, \dots$  Cependant, obtenir une formule donnant  $w_n$  en fonction de  $n$  est très difficile.

- ▷ **par une relation de récurrence** : on définit explicitement le (ou les) premier(s) terme(s) de la suite puis chaque terme de la suite est défini à l'aide du (ou des) précédent(s).

**Exemple 7.7** – On peut définir deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 & \text{et} & & \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= 2u_n + u_n^2, \\ v_0 &= 0, v_1 &= 1 & \text{et} & \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} &= \exp(v_{n+1} - v_n). \end{aligned}$$

Là encore, on ne peut pas, *a priori*, déterminer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  une expression directe de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ . On peut par contre calculer les termes de ces suites de proche en proche. Ainsi,

$$u_1 = 3 \quad u_2 = 15 \quad u_3 = 255 \dots \quad v_2 = e \quad v_3 = e^{e-1} \dots$$

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente d'ordre 1 et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite récurrente d'ordre 2.



**ATTENTION !** Pour définir une suite par une relation de récurrence, il y a tout de même des précautions à prendre : il se peut que la donnée d'un premier terme et d'une relation de récurrence ne définissent pas correctement une suite.

Par exemple, en posant  $u_0 = \frac{1}{4}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - u_n}$ , on ne définit pas correctement la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  : on aurait  $u_1 = \frac{1}{3}, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = 1$  et  $u_4$  n'est pas défini !

### 3 – Opérations sur les suites

**Définition 7.8** – On peut définir sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  trois opérations :

- la **somme**  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = u_n + v_n,$$

- la **multiplication interne**  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \times (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = u_n \times v_n,$$

- la **multiplication externe**  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par le réel  $\lambda \in \mathbb{R}$  est la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda u_n.$$

**Remarque 7.9** – Ces opérations confèrent à  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une structure d'algèbre commutative unitaire. Cette notion sera précisée plus tard dans l'année.

### 4 – Suites constantes/stationnaire/monotones

**Définition 7.10** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **constante** s'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha$  ou, ce qui est équivalent, si elle vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n.$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **stationnaire** lorsqu'elle est constante au delà d'un certain rang, c'est-à-dire si elle vérifie :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_{n+1} = u_n.$$

**Exemple 7.11** –

La suite  $(\lfloor 2/n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite stationnaire : elle stationne à 0 à partir du rang 3.

**Définition 7.12** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. On dit que

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **croissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1},$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **strictement croissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1},$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **décroissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1},$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **strictement décroissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1},$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

**Méthode 7.13** – Montrer qu'une suite est croissante ou décroissante

Pour établir qu'une suite est monotone, on peut :

- (a) Étudier le signe de la différence  $u_{n+1} - u_n$ . En effet, on sait que

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geq 0,$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

- (b) Comparer le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et 1 **lorsque tous les termes sont strictement positifs**.

En effet, on sait que

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1.$$

**Exemple 7.14** –

- (a) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$  est strictement croissante.

Je calcule la différence entre deux termes consécutifs :  $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n + 1 - u_n = u_n^2 + 1$ .

Or  $u_n^2 \geq 0$  car c'est un carré donc  $u_{n+1} - u_n \geq 1 > 0$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.

- (b) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{2^n}{n+1}$  est strictement croissante.

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  a tous ses termes strictement positifs et pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{2 \times (n+1)}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2} = 1 + \frac{n}{n+2} > 1.$$

Ainsi la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante.

## 5 – Suite majorée/minorée/bornée

**Définition 7.15** – Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle et  $m$  et  $M$  deux réels. On dit que

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **majorée** par  $M$  lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **minorée** par  $m$  lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$$

Enfin la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

- $\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$ .
- $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ .

| La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. | La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée. | La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|                                                  |                                                  |                                                 |



### Méthode 7.16 – Montrer qu'une suite est majorée/minorée/bornée

Pour montrer qu'une suite est majorée, on opère de la même façon que pour une fonction : on étudie le signe de  $u_n - M$  pour tout  $n$  et on montre que  $u_n - M \leq 0$ .

De la même manière, on étudie le signe de  $u_n - m$  pour tout  $n$  et on montre que  $u_n - m \geq 0$  pour prouver que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par  $m$ .

**Exemple 7.17** – Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{3n^2}{n^2 + 1}$  est majorée par 3.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n - 3 = \frac{3n^2}{n^2 + 1} - 3 = \frac{3n^2 - 3(n^2 + 1)}{n^2 + 1} = \frac{-3}{n^2 + 1}.$$

Or  $-3 < 0$  et  $n^2 + 1 > 0$  donc  $\frac{-3}{n^2 + 1} < 0$ . Autrement dit,  $u_n - 3 < 0$  i.e.  $u_n < 3$ .

Donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien majorée par 3.

## II – Suites remarquables

Dans la suite, on s'intéresse à des suites réelles **ou** complexes. Il faut bien avoir en tête que les notions de suite monotone, ou de suite majorée/minorée n'ont pas de sens pour une suite de nombres complexes (puisque'il n'y a pas de relation d'ordre sur  $\mathbb{C}$ ). On peut simplement donner un sens à la notion de suite complexe bornée en remplaçant la valeur absolue par un module dans le dernier point de la définition 7.15.

### 1 – Suites arithmétiques

**Définition 7.18** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **arithmétique** s'il existe un réel ou un complexe  $r$  appelé **raison** tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre  $r$ .

$$\begin{array}{ccccccc} & +r & & +r & & +r & & & +r \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & & \curvearrowright \\ u_0 & & u_1 & & u_2 & & u_3 & \cdots & u_n & & u_{n+1} \end{array}$$

**Remarque 7.19** – Pour montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique, il suffit de montrer que la différence entre deux termes consécutifs  $u_{n+1} - u_n$  est une constante qui ne dépend pas de  $n$  (il s'agit de la raison  $r$ ).

**Exemple 7.20** – Déterminer si les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suivantes sont arithmétiques.

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2n + 1$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Je calcule la différence entre deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = (2(n+1) + 1) - (2n + 1) = 2n + 2 + 1 - 2n - 1 = 2.$$

Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison 2.

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = n^2 + 1$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Je calcule la différence entre deux termes consécutifs :

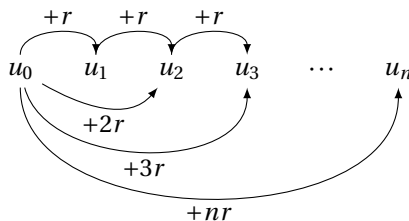
$$u_{n+1} - u_n = ((n+1)^2 + 1) - (n^2 + 1) = n^2 + 2n + 1 + 1 - n^2 - 1 = 2n + 1.$$

Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas une suite arithmétique.

### Proposition 7.21 – Expression explicite

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r \in \mathbb{R}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = u_0 + nr.$$



**Démonstration.** La démonstration est très facile par récurrence. La propriété est évidemment vraie pour  $n = 0$ . Supposons que pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = u_0 + nr$ . Alors,

$$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$$

Par récurrence, on a bien  $u_n = u_0 + nr$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Remarque 7.22** – Pour des suites dont l'indice débute à  $n = 1$ , l'expression devient

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = u_1 + (n-1)r,$$

et plus généralement,

$$\forall p \geq 0, \quad \forall n \geq p, \quad u_n = u_p + (n-p)r.$$

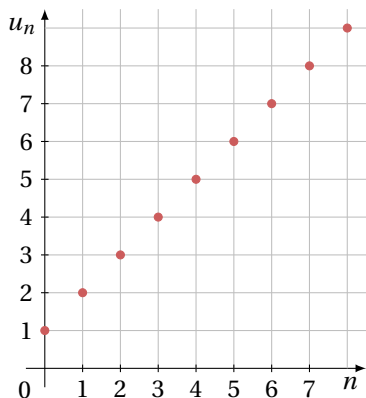
### Proposition 7.23

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique **réelle** de raison  $r$ .

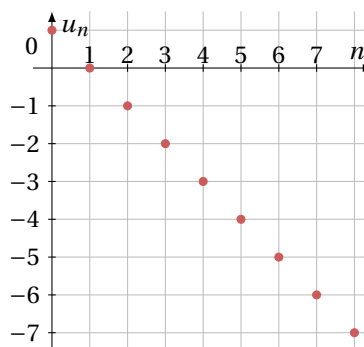
- Si  $r > 0$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.
- Si  $r < 0$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante.
- Si  $r = 0$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.

**Démonstration.** Cela découle immédiatement du fait que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = r$ . □

Si  $r > 0$ , alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.



Si  $r < 0$ , alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

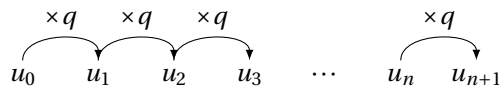


## 2 – Suites géométriques

**Définition 7.24** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **géométrique** s'il existe un réel  $q$  aussi appelé **raison** tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n.$$

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre  $q$ .



**Remarque 7.25** – Pour montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique, il suffit de montrer que le quotient entre deux termes consécutifs  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  (sous réserve que  $u_n \neq 0$ ) est une constante qui ne dépend pas de  $n$  (il s'agit de la raison  $q$ ).

**Exemple 7.26** – La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 2u_n - 3$  pour  $n \geq 0$  est-elle géométrique?

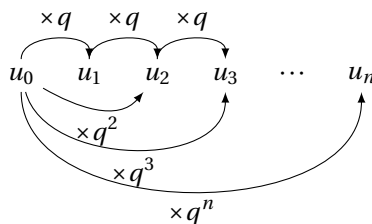
Je calcule les premiers termes  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 2u_0 - 3 = 1$  et  $u_2 = 2u_1 - 3 = -1$  pour comparer les premiers quotients de deux termes consécutifs. Or  $\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{2}$  Et  $\frac{u_2}{u_1} = -1 \neq \frac{1}{2}$ .

Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas une suite géométrique.

### Proposition 7.27 – Expression explicite

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = u_0 \times q^n.$$



**Démonstration.** La démonstration est très facile par récurrence. La propriété est évidemment vraie pour  $n = 0$ . Supposons que pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = u_0 \cdot q^n$ . Alors,

$$u_{n+1} = u_n \cdot q = u_0 \cdot q^n \cdot q = u_0 \cdot q^{n+1}$$

Par récurrence, on a bien  $u_n = u_0 \cdot q^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Remarque 7.28** – Pour des suites dont l'indice débute à  $n = 1$ , l'expression devient

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = u_1 \times q^{n-1},$$

et plus généralement,

$$\forall p \geq 0, \quad \forall n \geq p, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

### Proposition 7.29

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique **réelle** de raison  $q \in \mathbb{R}$  et de premier terme  $u_0 \in \mathbb{R}$ . Alors :

- Si  $0 < q < 1$  et  $u_0 > 0$ , la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante. (c'est le contraire si  $u_0 < 0$ )
- Si  $q > 1$  et  $u_0 > 0$ , la suite est strictement croissante. (c'est le contraire si  $u_0 < 0$ )
- Si  $q < 0$ , la suite n'est pas monotone.

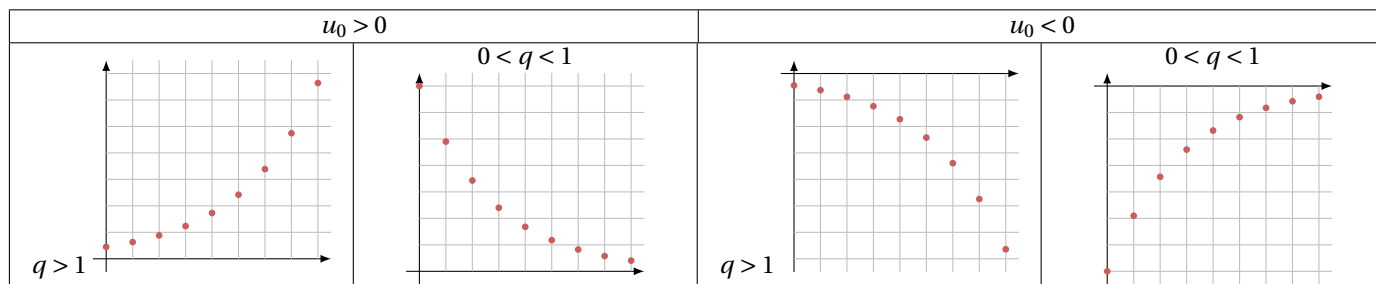
**Démonstration.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q - 1) \end{aligned}$$

La monotonie de la suite dépend du signe de  $u_0$ ,  $q^n$  et  $(q - 1)$ .

- Si  $q < 0$  alors  $q^n$  est positif pour  $n$  pair, négatif pour  $n$  impair donc la suite n'est pas monotone.
- Si  $q > 0$  alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit  $u_0 \times (q - 1)$ .

□



### 3 – Suites arithmético-géométriques

**Définition 7.30** – Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels ou complexes  $a$  et  $b$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

**Remarque 7.31** –

- Si  $a = 1$ , alors on obtient  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + b$ .  
Autrement dit,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison  $b$ .
- Si  $b = 0$ , alors on obtient  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n$ .  
Autrement dit,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $a$ .

#### Méthode 7.32 – Trouver la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmético-géométrique de la forme  $u_{n+1} = au_n + b$ .

Pour exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ , on procède selon les étapes suivantes :

1. On cherche le point fixe, c'est-à-dire l'unique scalaire  $\alpha$  tel que  $\alpha = a\alpha + b$ .
2. On introduit une suite auxiliaire  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par  $v_n = u_n - \alpha$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et on montre que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $a$ .
3. On exprime pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , le terme  $v_n$  en fonction de  $n$  puis on en déduit le terme  $u_n$  en fonction de  $n$ .



**Exemple 7.33** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 3u_n - 8$ .

Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. On commence par chercher le point fixe. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

$$\alpha = 3\alpha - 8 \iff -2\alpha = -8 \iff \alpha = \frac{-8}{-2} = 4.$$

2. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le terme  $v_n = u_n - 4$ . Montrons que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison 3 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = (3u_n - 8) - 4 = 3(u_n - 4) - 8 - 4 = 3v_n + 12 - 12 = 3v_n.$$

Donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien une suite géométrique de raison 3.

3. Le premier terme de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est  $v_0 = u_0 - 4 = 2 - 4 = -2$ . Puisque la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison 3, alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times 3^n = -2 \times 3^n.$$

Dès lors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + 4 = -2 \times 3^n + 4.$$

## 4 – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

**Définition 7.34** – Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois réels ou complexes, avec  $a$  et  $c$  non nuls, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

**Remarque 7.35** – Pour définir parfaitement une suite récurrente linéaire d'ordre 2, on complète la formule de récurrence par la donnée des deux premiers termes de la suite.

**Exemple 7.36** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$u_0 = 4, u_1 = -6 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + \frac{5}{6}u_n$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On cherche à obtenir l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Définition 7.37** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On appelle **équation caractéristique** associée à la suite récurrente linéaire d'ordre 2 l'équation du second degré  $ar^2 + br + c = 0$ .

**Exemple 7.38** – L'équation caractéristique associée à la suite précédente est  $r^2 - 2r - \frac{5}{6} = 0$ .

### Proposition 7.39 – Expression dans le cas complexe

Pour déterminer l'expression du terme général  $u_n$  d'une telle suite, on commence par considérer son équation caractéristique  $(E)$  :  $ar^2 + br + c = 0$  et le discriminant  $\Delta$  de cette équation.

- ▷ Si  $\Delta \neq 0$ , alors  $(E)$  a deux solutions complexes distinctes  $z_1$  et  $z_2$  et il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  complexes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha z_1^n + \beta z_2^n.$$

- ▷ Si  $\Delta = 0$ , alors  $(E)$  admet une unique solution  $z_0$  et il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  complexes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha n + \beta) z_0^n.$$

Dans chacun des cas, les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  sont entièrement déterminées par les valeurs de  $u_0$  et  $u_1$ .

**Démonstration.** Petite remarque préliminaire. Une suite  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant donnée, si d'une part  $\delta_0 = \delta_1 = 0$  et si d'autre part  $a\delta_{n+2} + b\delta_{n+1} + c\delta_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $\delta_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- ▷ **Cas où  $\Delta \neq 0$ .** Alors,  $(E)$  possède deux racines distinctes  $z_1$  et  $z_2$  dans  $\mathbb{C}$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux éléments de  $\mathbb{C}$  que nous allons choisir explicitement dans un instant. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $\delta_n = u_n - \alpha z_1^n - \beta z_2^n$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} a\delta_{n+2} + b\delta_{n+1} + c\delta_n &= (au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n) - \alpha(az_1^{n+2} + bz_1^{n+1} + cz_1^n) - \beta(az_2^{n+2} + bz_2^{n+1} + cz_2^n) \\ &= 0 - \alpha z_1^n (az_1^2 + bz_1 + c) - \beta z_2^n (az_2^2 + bz_2 + c) = 0 \end{aligned}$$

Peut-on choisir  $\alpha$  et  $\beta$  de façon à garantir que  $\delta_0 = \delta_1 = 0$ ? Eh bien oui car  $z_1 \neq z_2$ , il suffit de poser  $\alpha = \frac{z_2 u_0 - u_1}{z_2 - z_1}$  et  $\beta = \frac{u_1 - z_1 u_0}{z_2 - z_1}$ . Ainsi  $\delta_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $u_n = \alpha z_1^n + \beta z_2^n$ .

- ▷ **Cas où  $\Delta = 0$ .** Alors,  $(E)$  possède une unique racine  $z_0$  dans  $\mathbb{C}$  : Bien sûr  $z_0 = -\frac{b}{2a}$ , et comme  $\Delta = 0$  avec  $a \neq 0$  et  $c \neq 0$  :  $b \neq 0$ , donc  $z_0 \neq 0$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux éléments de  $\mathbb{C}$  que nous allons choisir explicitement dans un instant. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $\delta_n = u_n - (\alpha n + \beta) z_0^n$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} a\delta_{n+2} + b\delta_{n+1} + c\delta_n &= (au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n) - \alpha(a(n+2)z_0^{n+2} + b(n+1)z_0^{n+1} + cnz_0^n) - \beta(az_0^{n+2} + bz_0^{n+1} + cz_0^n) \\ &= 0 - \alpha(nz_0^n (az_0^2 + bz_0 + c) + z_0^{n+1}(2az_0 + b)) - \beta z_0^n (az_0^2 + bz_0 + c) = 0 \end{aligned}$$

Peut-on choisir  $\alpha$  et  $\beta$  de façon à garantir que  $\delta_0 = \delta_1 = 0$ ? Eh bien oui car  $z_0 \neq 0$ , il suffit de poser  $\alpha = \frac{u_1 - z_0 u_0}{z_0}$  et  $\beta = u_0$ . Ainsi  $\delta_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $u_n = (\alpha n + \beta) z_0^n$ .

□



**Proposition 7.40 – Expression dans le cas réel**

Pour déterminer l'expression du terme général  $u_n$  d'une telle suite lorsque  $u_0, u_1, a, b$  et  $c$  sont réels, on considère son équation caractéristique  $(E)$  :  $ar^2 + br + c = 0$  et le discriminant  $\Delta$  de cette équation.

- ▷ Si  $\Delta > 0$ , alors  $(E)$  a deux solutions  $x_1$  et  $x_2$  et il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n.$$

- ▷ Si  $\Delta = 0$ , alors  $(E)$  a une unique solution  $x_0$  et il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha n + \beta) x_0^n.$$

- ▷ Si  $\Delta < 0$ , alors  $(E)$  admet deux solutions complexes conjuguées  $\rho e^{i\theta}$  et  $\rho e^{-i\theta}$  où  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , et il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)).$$

Dans chacun des cas, les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  sont entièrement déterminées par les valeurs de  $u_0$  et  $u_1$ .

*Démonstration.*

- ▷ Si  $\Delta > 0$ , on sait d'après le cas complexe qu'il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$ , *a priori* complexes, telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n.$$

Or, on a vu que  $\alpha = \frac{u_1 - x_2 u_0}{x_1 - x_2}$  et  $\beta = \frac{u_1 - x_1 u_0}{x_2 - x_1}$ . Puisque  $u_0, u_1, x_1$  et  $x_2$  sont réels, les deux nombres  $\alpha$  et  $\beta$  sont, eux aussi, réels.

- ▷ On procède de la même manière si  $\Delta = 0$ .

- ▷ Supposons que  $\Delta < 0$ . D'après le cas complexe, en notant  $r = \rho e^{i\theta}$  et  $\bar{r} = \rho e^{-i\theta}$  les deux solutions complexes conjuguées de  $(E)$ , où  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , on sait qu'il existe deux constantes complexes  $A$  et  $B$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar^n + B\bar{r}^n = A\rho^n e^{in\theta} + B\rho^n e^{-in\theta}.$$

On a vu que  $A = \frac{u_1 - \bar{r}u_0}{r - \bar{r}}$  et que  $B = \frac{u_1 - ru_0}{\bar{r} - r} = \bar{A}$ .

Ainsi, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} u_n &= \rho^n (Ae^{in\theta} + \bar{A}e^{-in\theta}) \\ &= \rho^n (Ae^{in\theta} + \overline{Ae^{in\theta}}) \\ &= \rho^n 2 \operatorname{Re}(Ae^{in\theta}) \\ &= \rho^n (2\operatorname{Re}(A) \cos(n\theta) - 2\operatorname{Im}(A) \sin(n\theta)) \\ &= \rho^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)) \end{aligned}$$

où l'on a posé  $\alpha = 2\operatorname{Re}(A)$  et  $\beta = -2\operatorname{Im}(A)$ , qui sont bien des réels.

□

**Exemple 7.41 –** Déterminer une expression du terme général de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 & u_1 = 5, \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n. \end{cases}$$

Commençons par résoudre l'équation caractéristique  $(E)$  associée à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 :  $r^2 = 2r + 3$ . Ce qui équivaut à l'équation  $r^2 - 2r - 3 = 0$ . On a :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0 \text{ et } r_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3, \quad r_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1.$$

Ainsi pour tout  $n$ ,  $u_n = \lambda(-1)^n + \mu 3^n$ . Il reste à déterminer  $\lambda$  et  $\mu$ . On a :

$$u_0 = 1 = \lambda(-1)^0 + \mu 3^0 = \lambda + \mu \text{ et } u_1 = 5 = \lambda(-1)^1 + \mu 3^1 = -\lambda + 3\mu.$$

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1, \\ -\lambda + 3\mu = 5. \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on obtient  $4\mu = 6$  d'où  $\mu = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ . On a alors  $\lambda = 1 - \mu = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a donc pour expression :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{3}{2}3^n = \frac{1}{2}((-1)^{n+1} + 3^{n+1}).$$

**Exemple 7.42** – On cherche une expression explicite de la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = u_1 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ .

Les racines du polynôme  $X^2 - X + 1$  sont  $e^{\frac{i\pi}{3}}$  et  $e^{-\frac{i\pi}{3}}$  - complexes conjuguées. Il existe donc deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  pour lesquels

$u_n = \alpha \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Or comme  $u_0 = u_1 = 1$  :  $\alpha = \frac{\alpha + \beta\sqrt{3}}{2} = 1$ , donc  $\alpha = 1$  et  $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ .