

# 7 | Rappels et compléments sur les suites

La nature est un livre écrit en langage mathématiques.

Galilée, polymathe (1564-1642).

## I – Généralités sur les suites réelles

### 1 – Introduction

Intuitivement, une suite réelle est une liste (infinie) de nombres réels. Par exemple, la liste (en ordre croissant) des puissances de 2 est une suite :

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$$

On convient usuellement de poser  $u_0 = 1$ , puis  $u_1 = 2$ , puis  $u_2 = 4$ , etc.

D'autres choix sont tout à fait possibles : on peut poser  $v_1 = 1$ , puis  $v_2 = 2$ , puis  $v_3 = 4$ , etc.

On peut également poser  $w_5 = 1$ , puis  $w_6 = 2$ , puis  $w_7 = 4$ , etc.

La suite notée  $(u_n)$  est donc une fonction  $u$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ . De même, la suite  $(v_n)$  est une fonction  $v$  de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{R}$ . Enfin, la suite  $(w_n)$  est une fonction  $w$  de  $\llbracket 5; +\infty \rrbracket$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 7.1** – On appelle **suite réelle** toute famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels indexée par  $\mathbb{N}$ , c'est-à-dire toute application  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On la note  $u$  ou encore  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Notation 7.2** – On note  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites réelles indexées par  $\mathbb{N}$ .

**Remarque 7.3** – Une suite réelle de terme général  $u_n$  peut aussi être indexée par les entiers naturels supérieurs à un entier  $n_0$ . Une telle suite est notée  $(u_n)_{n \geq n_0}$ . Par exemple, la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \sqrt{n-2}$  n'est définie que pour  $n \geq 2$ . On dira alors que  $(u_n)_n$  est définie sur  $I = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$  et on notera la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$ .



**ATTENTION !** Pour une rédaction rigoureuse, on distinguera bien  $u_n$  qui est un nombre car c'est le terme de rang  $n$  de la suite et  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui est la suite elle-même. C'est la même chose que de ne pas confondre la fonction  $f$  et réel  $f(x)$ .

### 2 – Modes de définition d'une suite

On peut définir une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de plusieurs manières différentes :

- ▷ **de manière explicite** : chacun des termes de la suite est donné en fonction de  $n$ .

**Exemple 7.4** – La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \exp(-n+1)$  est définie de manière explicite. Avec cette définition, on connaît directement la valeur de chaque terme de la suite. Ici,  $u_{20} = \exp(-19)$ .

- ▷ **de manière implicite** : tous les termes de la suite sont correctement définis mais on ne dispose pas de la valeur explicite de chacun de ses termes.

**Exemple 7.5** – Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^5 + nx - 1 \end{matrix}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^+$  dans  $[-1; +\infty[$  donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique nombre  $u_n \in \mathbb{R}^+$  tel que  $f_n(u_n) = 0$ . On définit ainsi une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et, *a priori*, il n'est pas possible d'obtenir, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression directe de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exemple 7.6** – Soit la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $w_n$  soit le  $n$ -ième nombre premier. On peut facilement calculer les premiers termes :  $w_1 = 2, w_2 = 3, w_3 = 5, w_4 = 7, w_5 = 11, \dots$  Cependant, obtenir une formule donnant  $w_n$  en fonction de  $n$  est très difficile.

- ▷ **par une relation de récurrence** : on définit explicitement le (ou les) premier(s) terme(s) de la suite puis chaque terme de la suite est défini à l'aide du (ou des) précédent(s).

**Exemple 7.7** – On peut définir deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 & \text{et} & & \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= 2u_n + u_n^2, \\ v_0 &= 0, v_1 &= 1 & \text{et} & \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} &= \exp(v_{n+1} - v_n). \end{aligned}$$

Là encore, on ne peut pas, *a priori*, déterminer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  une expression directe de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ . On peut par contre calculer les termes de ces suites de proche en proche. Ainsi,

$$u_1 = 3 \quad u_2 = 15 \quad u_3 = 255 \dots \quad v_2 = e \quad v_3 = e^{e-1} \dots$$

On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente d'ordre 1 et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite récurrente d'ordre 2.



**ATTENTION !** Pour définir une suite par une relation de récurrence, il y a tout de même des précautions à prendre : il se peut que la donnée d'un premier terme et d'une relation de récurrence ne définissent pas correctement une suite.

Par exemple, en posant  $u_0 = \frac{1}{4}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - u_n}$ , on ne définit pas correctement la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  : on aurait  $u_1 = \frac{1}{3}$ ,  $u_2 = \frac{1}{2}$ ,  $u_3 = 1$  et  $u_4$  n'est pas défini !

### 3 – Opérations sur les suites

**Définition 7.8** – On peut définir sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  trois opérations :

- la **somme**  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = u_n + v_n,$$

- la **multiplication interne**  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \times (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = u_n \times v_n,$$

- la **multiplication externe**  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par le réel  $\lambda \in \mathbb{R}$  est la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda u_n.$$

**Remarque 7.9** – Ces opérations confèrent à  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une structure d'algèbre commutative unitaire. Cette notion sera précisée plus tard dans l'année.

### 4 – Suites constantes/stationnaire/monotones

**Définition 7.10** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **constante** s'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha$  ou, ce qui est équivalent, si elle vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n.$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **stationnaire** lorsqu'elle est constante au delà d'un certain rang, c'est-à-dire si elle vérifie :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_{n+1} = u_n.$$

**Exemple 7.11** –

La suite  $\left( \left\lfloor \frac{2}{n} \right\rfloor \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite stationnaire : elle stationne à 0 à partir du rang 3.

**Définition 7.12** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. On dit que

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **croissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1},$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **strictement croissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1},$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **décroissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1},$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **strictement décroissante** lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1},$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

**Méthode 7.13** – Montrer qu'une suite est croissante ou décroissante

Pour établir qu'une suite est monotone, on peut :

- (a) Étudier le signe de la différence  $u_{n+1} - u_n$ . En effet, on sait que

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geq 0,$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

- (b) Comparer le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et 1 **lorsque tous les termes sont strictement positifs**.

En effet, on sait que

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1.$$

**Exemple 7.14** –

- (a) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$  est strictement croissante.

- (b) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{2^n}{n+1}$  est strictement croissante.

## 5 – Suite majorée/minorée/bornée

**Définition 7.15** – Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle et  $m$  et  $M$  deux réels. On dit que

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **majorée** par  $M$  lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **minorée** par  $m$  lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$$

Enfin la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

- $\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M.$
- $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$

| La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. | La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée. | La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|                                                  |                                                  |                                                 |



### Méthode 7.16 – Montrer qu'une suite est majorée/minorée/bornée

Pour montrer qu'une suite est majorée, on opère de la même façon que pour une fonction : on étudie le signe de  $u_n - M$  pour tout  $n$  et on montre que  $u_n - M \leq 0$ .

De la même manière, on étudie le signe de  $u_n - m$  pour tout  $n$  et on montre que  $u_n - m \geq 0$  pour prouver que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par  $m$ .

**Exemple 7.17** – Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{3n^2}{n^2 + 1}$  est majorée par 3.

## II – Suites remarquables

Dans la suite, on s'intéresse à des suites réelles **ou** complexes. Il faut bien avoir en tête que les notions de suite monotone, ou de suite majorée/minorée n'ont pas de sens pour une suite de nombres complexes (puisque'il n'y a pas de relation d'ordre sur  $\mathbb{C}$ ). On peut simplement donner un sens à la notion de suite complexe bornée en remplaçant la valeur absolue par un module dans le dernier point de la définition 7.15.

### 1 – Suites arithmétiques

**Définition 7.18** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **arithmétique** s'il existe un réel ou un complexe  $r$  appelé **raison** tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre  $r$ .

$$\begin{array}{ccccccc} & +r & & +r & & +r & & & +r \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & & \curvearrowright \\ u_0 & & u_1 & & u_2 & & u_3 & \cdots & u_n & & u_{n+1} \end{array}$$

**Remarque 7.19** – Pour montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique, il suffit de montrer que la différence entre deux termes consécutifs  $u_{n+1} - u_n$  est une constante qui ne dépend pas de  $n$  (il s'agit de la raison  $r$ ).

**Exemple 7.20** – Déterminer si les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suivantes sont arithmétiques.

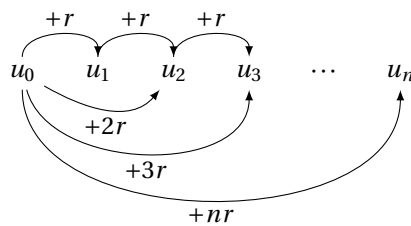
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2n + 1$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = n^2 + 1$ .

**Proposition 7.21 – Expression explicite**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r \in \mathbb{R}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = u_0 + nr.$$



*Démonstration.*

□

**Remarque 7.22** – Pour des suites dont l'indice débute à  $n = 1$ , l'expression devient

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = u_1 + (n-1)r,$$

et plus généralement,

$$\forall p \geq 0, \quad \forall n \geq p, \quad u_n = u_p + (n-p)r.$$

**Proposition 7.23**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique **réelle** de raison  $r$ .

- Si  $r > 0$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.
- Si  $r < 0$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante.
- Si  $r = 0$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.

*Démonstration.*

□

| Si $r > 0$ , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. | Si $r < 0$ , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. |
|------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
|                                                                        |                                                                          |

## 2 – Suites géométriques

**Définition 7.24** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **géométrique** s'il existe un réel  $q$  aussi appelé **raison** tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n.$$

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre  $q$ .

$$\begin{array}{ccccccc} & \times q & & \times q & & \times q & & \times q \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright \\ u_0 & & u_1 & & u_2 & & u_3 & \cdots & u_n & & u_{n+1} \end{array}$$

**Remarque 7.25** – Pour montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique, il suffit de montrer que le quotient entre deux termes consécutifs  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  (sous réserve que  $u_n \neq 0$ ) est une constante qui ne dépend pas de  $n$  (il s'agit de la raison  $q$ ).

**Exemple 7.26** – La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 2u_n - 3$  pour  $n \geq 0$  est-elle géométrique?

### Proposition 7.27 – Expression explicite

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \times q & & \times q & & \times q & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ u_0 & & u_1 & & u_2 & & u_3 & \cdots & u_n \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\ & \times q^2 & & \times q^3 & & \times q^n & & \end{array}$$

*Démonstration.*

□

**Remarque 7.28** – Pour des suites dont l'indice débute à  $n = 1$ , l'expression devient

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = u_1 \times q^{n-1},$$

et plus généralement,

$$\forall p \geq 0, \quad \forall n \geq p, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

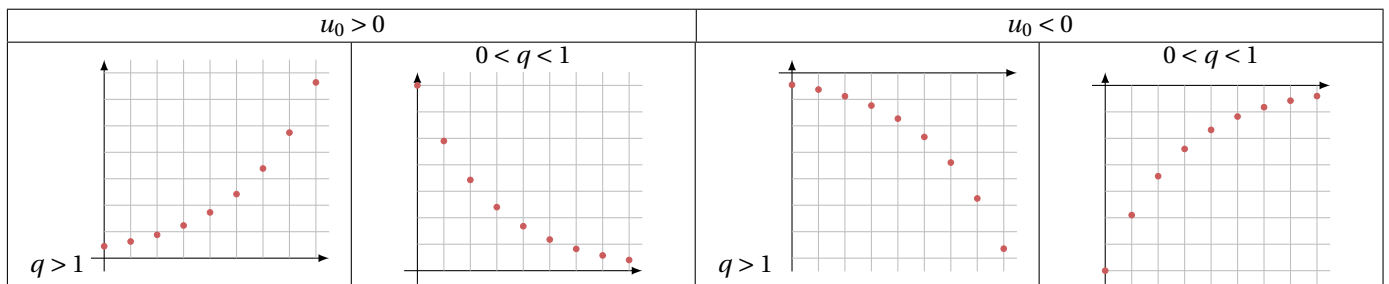
### Proposition 7.29

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique **réelle** de raison  $q \in \mathbb{R}$  et de premier terme  $u_0 \in \mathbb{R}$ . Alors :

- Si  $0 < q < 1$  et  $u_0 > 0$ , la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante. (c'est le contraire si  $u_0 < 0$ )
- Si  $q > 1$  et  $u_0 > 0$ , la suite est strictement croissante. (c'est le contraire si  $u_0 < 0$ )
- Si  $q < 0$ , la suite n'est pas monotone.

*Démonstration.*

□



## 3 – Suites arithmético-géométriques

**Définition 7.30** – Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels ou complexes  $a$  et  $b$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

**Remarque 7.31** –

- Si  $a = 1$ , alors on obtient  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + b$ .  
Autrement dit,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison  $b$ .
- Si  $b = 0$ , alors on obtient  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n$ .  
Autrement dit,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $a$ .


**Méthode 7.32 – Trouver la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmético-géométrique de la forme  $u_{n+1} = au_n + b$ .

Pour exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ , on procède selon les étapes suivantes :

1. On cherche le point fixe, c'est-à-dire l'unique scalaire  $\alpha$  tel que  $\alpha = a\alpha + b$ .
2. On introduit une suite auxiliaire  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par  $v_n = u_n - \alpha$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et on montre que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $a$ .
3. On exprime pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , le terme  $v_n$  en fonction de  $n$  puis on en déduit le terme  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exemple 7.33** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 3u_n - 8$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## 4 – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

**Définition 7.34** – Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois réels ou complexes, avec  $a$  et  $c$  non nuls, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

**Remarque 7.35** – Pour définir parfaitement une suite récurrente linéaire d'ordre 2, on complète la formule de récurrence par la donnée des deux premiers termes de la suite.

**Exemple 7.36** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$u_0 = 4, u_1 = -6 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + \frac{5}{6}u_n$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On cherche à obtenir l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Définition 7.37** – Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On appelle **équation caractéristique** associée à la suite récurrente linéaire d'ordre 2 l'équation du second degré  $ar^2 + br + c = 0$ .

**Exemple 7.38** – L'équation caractéristique associée à la suite précédente est



**Proposition 7.39 – Expression dans le cas complexe**

Pour déterminer l'expression du terme général  $u_n$  d'une telle suite, on commence par considérer son équation caractéristique  $(E) : ar^2 + br + c = 0$  et le discriminant  $\Delta$  de cette équation.

- ▷ Si  $\Delta \neq 0$ , alors  $(E)$  a deux solutions complexes distinctes  $z_1$  et  $z_2$  et il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  complexes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha z_1^n + \beta z_2^n.$$

- ▷ Si  $\Delta = 0$ , alors  $(E)$  admet une unique solution  $z_0$  et il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  complexes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha n + \beta) z_0^n.$$

Dans chacun des cas, les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  sont entièrement déterminées par les valeurs de  $u_0$  et  $u_1$ .

*Démonstration.*

□

**Proposition 7.40 – Expression dans le cas réel**

Pour déterminer l'expression du terme général  $u_n$  d'une telle suite lorsque  $u_0, u_1, a, b$  et  $c$  sont réels, on considère son équation caractéristique  $(E) : ar^2 + br + c = 0$  et le discriminant  $\Delta$  de cette équation.

- ▷ Si  $\Delta > 0$ , alors  $(E)$  a deux solutions  $x_1$  et  $x_2$  et il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n.$$

- ▷ Si  $\Delta = 0$ , alors  $(E)$  a une unique solution  $x_0$  et il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha n + \beta) x_0^n.$$

- ▷ Si  $\Delta < 0$ , alors  $(E)$  admet deux solutions complexes conjuguées  $\rho e^{i\theta}$  et  $\rho e^{-i\theta}$  où  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , et il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)).$$

Dans chacun des cas, les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  sont entièrement déterminées par les valeurs de  $u_0$  et  $u_1$ .

*Démonstration.*

□

**Exemple 7.41** – Déterminer une expression du terme général de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 & u_1 = 5, \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n. \end{cases}$$

**Exemple 7.42** – On cherche une expression explicite de la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = u_1 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  
 $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ .