

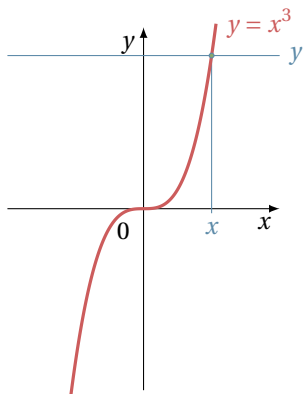
6 | Bijections réelles et fonctions circulaires réciproques

Il est plus facile d'apprendre les mathématiques que d'apprendre à s'en passer.

Henri Cartan (1904-2008), mathématicien.

I – Fonctions réelles bijectives

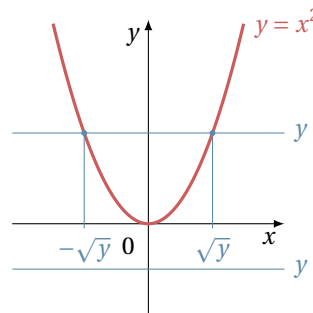
Définition 6.1 – Soit $f : D \rightarrow E$. On dit que f est une **bijection**, ou que f est **bijective**, lorsque :
Pour tout $y \in E$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in D$ admet une unique solution.
Cela revient à dire que chaque élément de E a exactement **un** antécédent par f .



Pour la fonction cube $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3$ dont la courbe est représentée ci-dessus, tout élément y de $\mathbb{R}$ admet un unique antécédent x .

Autrement dit, pour toute ordonnée $y \in \mathbb{R}$, il existe une unique abscisse $x \in \mathbb{R}$ telle que $y = x^3$.

La fonction cube est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.



Pour la fonction carrée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ dont la courbe est représentée ci-dessus, la situation varie selon le signe de y :

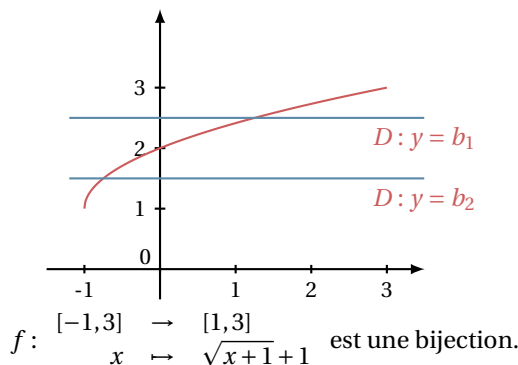
- si $y > 0$, il y a deux antécédents $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$,
- si $y < 0$, il n'y a aucun antécédent.

Du fait de l'absence d'existence ou d'unicité pour les antécédents de y , la fonction carrée n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

En revanche, la restriction de la fonction carré aux seuls réels positifs $f_+ : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^2$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 6.2 –

Graphiquement, $f : D \rightarrow E$ est une bijection si, et seulement si, pour tout $b \in E$, la droite horizontale d'équation $y = b$ coupe la courbe représentative de f en un unique point.



Exemple 6.3 – Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 2$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6.4 – Les fonctions suivantes sont des bijections :

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}, \quad \ln: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}, \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [0, 1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

En revanche,

$$h: \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}, \quad k: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

n'en sont pas. En effet, 1 a plusieurs antécédents par h (0 et 2π) et -1 n'a pas d'antécédent par k .

Définition 6.5 – Soit $f: D \rightarrow E$ une bijection. On appelle **bijection réciproque** de f la fonction notée f^{-1} définie sur E et à valeurs dans D qui à tout $y \in E$ associe l'unique solution de l'équation $f(x) = y$.

Exemple 6.6 – La bijection réciproque de $\ln$ est $\ln^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ y & \longmapsto & e^y \end{array}$.



ATTENTION ! f^{-1} ne correspond généralement pas à $\frac{1}{f}$. Il ne faut pas confondre les deux notations.

Exemple 6.7 – Parmi les fonctions suivantes, indiquer lesquelles sont des bijections. Quand elles en sont, déterminer leur bijection réciproque.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}, \quad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -4x + 7 \end{array}, \quad j: \begin{array}{ccc} [-1, +\infty[& \longrightarrow &]0, 1] \\ x & \longmapsto & \frac{2}{x+3} \end{array}$$

Proposition 6.8

Soit $f : D \rightarrow E$ une bijection.

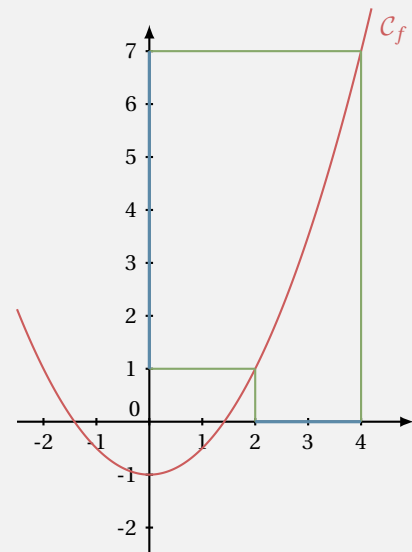
1. $\forall x \in D, f^{-1}(f(x)) = x.$

2. $\forall y \in E, f(f^{-1}(y)) = y.$

Bien évidemment, toutes les fonctions ne sont pas bijectives. Il est par contre fréquent que la restriction d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ à un sous-ensemble $A \subset D$ de l'ensemble de définition soit une bijection de A sur son image $f(A)$.

Exemple 6.9 –

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 1$ n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puisque 2 et -2 ont la même image par f (à savoir 1). Cependant, f est une bijection de $[2;4]$ dans $[1;7]$ (par exemple).



Pour montrer qu'une fonction réalise une bijection entre deux intervalles, il peut être difficile (voire impossible) de résoudre l'équation $f(x) = y$ comme nous l'avons fait dans les cas simples de l'exemple 6.7. Heureusement, nous disposons d'un résultat « boîte noire », qui traduit l'intuition graphique. Il sera démontré plus tard.

Théorème 6.10 – Théorème de la bijection

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Soit un **intervalle** $I \subset D$. Si

1. f est continue sur I ,
2. f est strictement monotone sur I ,

alors, f réalise une bijection de I sur un intervalle noté $f(I)$ dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I .

Précisément, lorsque l'on est dans le cas de cette proposition, les possibilités pour l'intervalle $f(I)$ sont résumées ici :

I	$f(I)$	
	f est strictement croissante	f est strictement décroissante
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$
$]a; b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$	$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a; b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$

Dans ce tableau, a et b sont des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$.

Exemple 6.11 –

1. Reprenons la fonction f de l'exemple 6.9.

f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ donc elle réalise une bijection de $] -\infty, 0]$ sur

$$f(]-\infty, 0]) = [f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[= [-1, +\infty[.$$

f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur

$$f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [-1, +\infty[.$$

2. Exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

Proposition 6.12

Soit f une fonction continue strictement monotone définie sur un intervalle I .

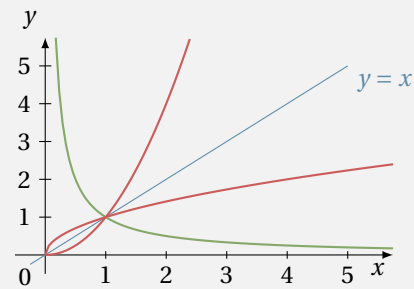
- La fonction réciproque f^{-1} , définie sur $f(I)$, est aussi continue, strictement monotone et de même sens de variation que f .
- Sa courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est obtenue par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration. On démontre uniquement le résultat de symétrie des courbes de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

□

Exemple 6.13 – Deux exemples :

- Les fonctions carrée et racine carrée, réciproques l'une de l'autre sur $]0, +\infty[$, ont des courbes symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
- La courbe de la fonction inverse sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$: la fonction inverse décrit une bijection et est sa propre bijection réciproque.



Remarque 6.14 – Le résultat sur la continuité de f^{-1} sera démontré plus tard dans le chapitre sur la continuité. Toutefois, on peut se convaincre de sa véracité graphiquement : si la courbe représentative de f peut se tracer localement sans lever le crayon, alors il en va de même pour la courbe de f^{-1} puisqu'elles sont symétriques.

Proposition 6.15 – Dérivée de la réciproque d'une bijection continue

Soit f une bijection **continue** strictement monotone d'un intervalle I sur l'intervalle $f(I)$.

1. Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$,

$$\forall y \in f(I), \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

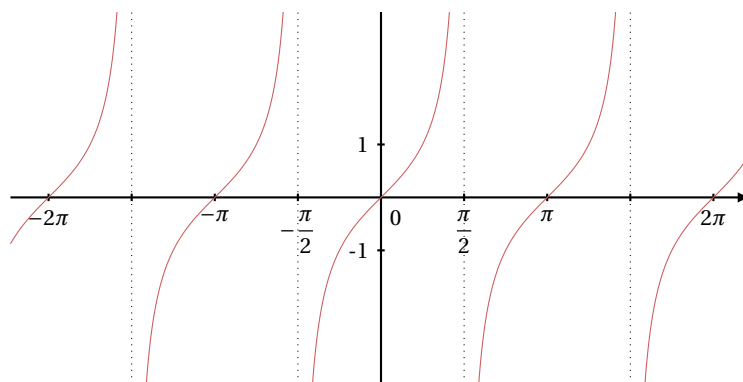
2. Si f est dérivable en un point a et si $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $b = f(a)$, mais sa courbe représentative présente une tangente verticale au point de coordonnées $(b, f^{-1}(b))$.

Remarque 6.16 – Nous démontrerons cette proposition dans le chapitre sur la dérivabilité.

On peut à nouveau considérer ce résultat graphiquement : Comme les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques, leurs tangentes sont également symétriques. Cela implique que leurs pentes sont inverses l'une de l'autre si aucune n'est nulle. Cela implique également que la courbe représentative de f^{-1} admet une tangente verticale au symétrique des points où la courbe représentative de f admet une tangente horizontale. On retrouve ainsi que lorsque f' s'annule en a , alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$.

II – Fonctions circulaires réciproques

1 – La fonction arc-tangente



Graphique de la fonction tangente.

La fonction $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective mais n'est pas injective donc ce n'est pas une bijection.
 $x \mapsto \tan(x)$

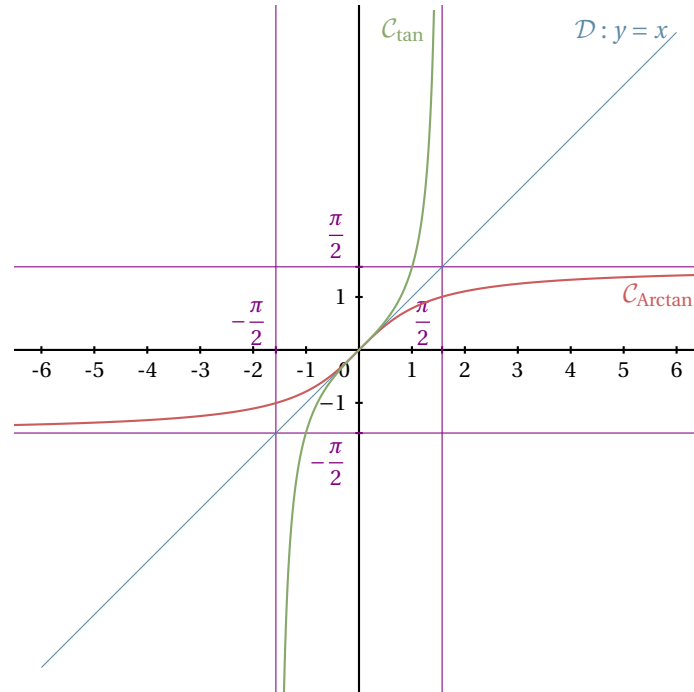
Par exemple, l'équation $\tan(x) = 0$ possède une infinité de solutions.

Par contre, la fonction $\tan$ est continue et strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ donc elle réalise une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ vers $\tan\left(] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\right) =] -\infty, +\infty [= \mathbb{R}$.

Définition 6.17 – La fonction **arc-tangente**, notée Arctan , est la bijection réciproque de la bijection

$$\begin{aligned} \tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tan(x) \end{aligned}$$

La fonction $\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est donc une bijection.



Graphique de la fonction Arctan .

Proposition 6.18 – Arctangente et tangente

1. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\tan(\text{Arctan}(y)) = y$.
2. Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$.



ATTENTION ! Si x est un réel qui n'appartient pas à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors $\text{Arctan}(\tan(x)) \neq x$.

Exemple 6.19 –

$\text{Arctan}(0) =$	$\tan(\text{Arctan}(72)) =$
$\text{Arctan}(1) =$	$\text{Arctan}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$
$\text{Arctan}(-\sqrt{3}) =$	$\text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{4\pi}{73}\right)\right) =$
$\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$	$\text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) =$

Visuellement, on s'attend à ce que cette fonction Arctan soit impaire, de limite $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$ et $-\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée strictement positive puisqu'elle est strictement croissante. Montrons tout cela.

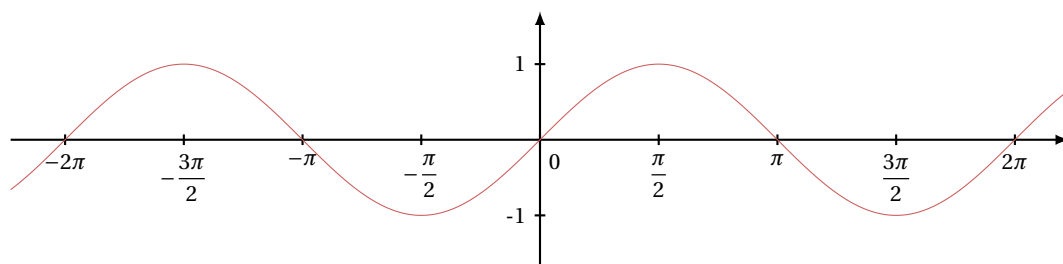
Proposition 6.20 – Propriétés de Arctan

1. Arctan est une fonction impaire.
2. Arctan est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim_{y \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(y) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(y) = \frac{\pi}{2}$.
4. Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}, \text{Arctan}'(y) = \frac{1}{1+y^2}$.

Démonstration.

□

2 – La fonction arc-sinus



Graphe de la fonction sinus.

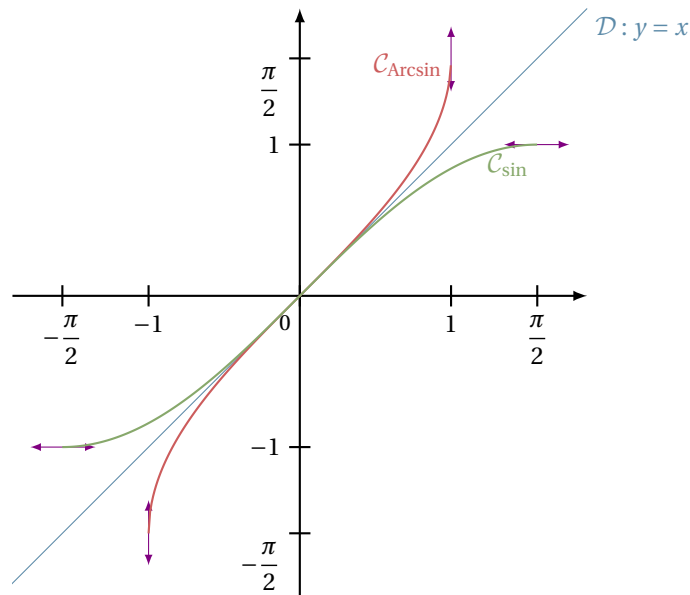
La fonction sinus n'est ni surjective ni injective donc ce n'est pas une bijection. Par exemple, $\sin(x) = 0$ a une infinité de solution et $\sin(x) = 2$ n'en a pas.

En revanche, la fonction sin est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De plus, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ donc elle réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [\sin(-\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})] = [-1, 1]$.

Définition 6.21 – La fonction **arc-sinus**, notée **Arcsin**, est la bijection réciproque de la fonction bijective

$$\begin{aligned} \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

$\text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est donc une bijection.



Graphique de la fonction arc-sinus.

Proposition 6.22 – Arc-sinus et sinus

1. Pour tout $y \in [-1, 1]$, $\sin(\text{Arcsin}(y)) = y$.
2. Pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$.



ATTENTION ! Quel que soit $x \in [-1, 1]$, on a $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$. Par contre, Si x est un réel qui n'appartient pas à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors $\text{Arcsin}(\sin(x)) \neq x$.

Visuellement, on s'attend à ce que cette fonction Arcsin soit impaire, continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$, mais pas en 1 et -1 , de dérivée strictement positive puisqu'elle est strictement croissante et ne présente pas de tangente horizontale.

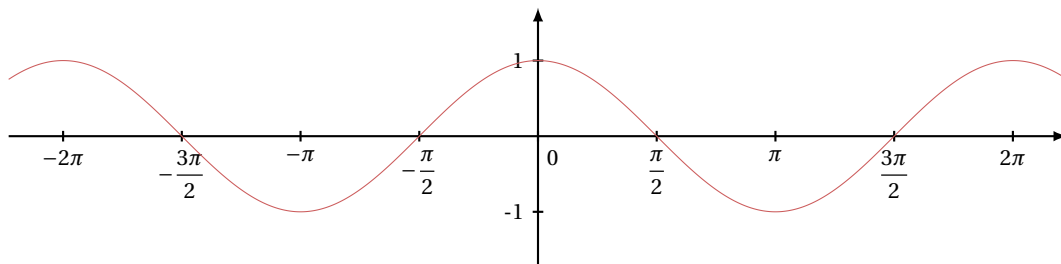
Proposition 6.23 – Propriétés de Arcsin

1. Arcsin est une fonction impaire.
2. Arcsin est strictement croissante et continue sur $[-1; 1]$.
3. Arcsin est dérivable sur $] -1; 1[$ et $\forall y \in] -1; 1[$, $\text{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Démonstration.

□

3 – La fonction arc-cosinus



Graphe de la fonction cosinus.

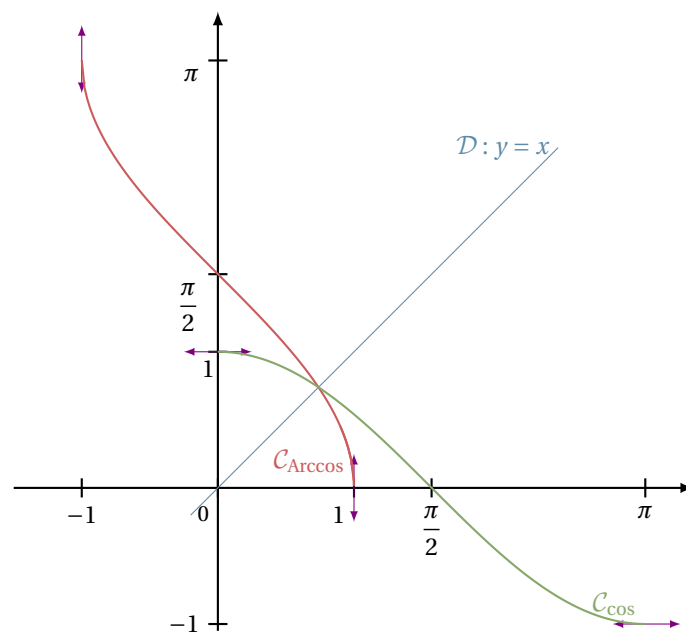
La fonction cosinus n'est ni surjective ni injective donc ce n'est pas une bijection. Par exemple, $\cos(x) = 0$ a une infinité de solution et $\cos(x) = 2$ n'en a pas.

En revanche, la fonction $\cos$ est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. De plus, $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$ donc elle réalise une bijection de $[0, \pi]$ vers $\cos([0, \pi]) = [\cos(\pi), \cos(0)] = [-1, 1]$.

Définition 6.24 – La fonction **arc-cosinus**, notée Arccos , est la bijection réciproque de la fonction bijective

$$\begin{aligned} \cos : [0, \pi] &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

$\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ est donc une bijection.



Graphe de la fonction arc-cosinus.

Proposition 6.25 – Arc-cosinus et cosinus

1. Pour tout $y \in [-1, 1]$, $\cos(\operatorname{Arccos}(y)) = y$.
2. Pour tout $x \in [0, \pi]$, $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x$.



ATTENTION ! Quel que soit $x \in [-1, 1]$, on a $\cos(\operatorname{Arccos}(x)) = x$. Par contre, Si x est un réel qui n'appartient pas à $[0, \pi]$, alors $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) \neq x$.

Exemple 6.26 – $\operatorname{Arccos} \cos \frac{20\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Visuellement, on s'attend à ce que cette fonction Arccos soit continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$, mais pas en 1 et -1 , de dérivée strictement négative puisqu'elle est strictement décroissante et ne présente pas de tangente horizontale.

Proposition 6.27 – Propriétés de Arccos

1. Arccos est strictement décroissante et continue sur $[-1; 1]$.
2. Arccos est dérivable sur $] -1; 1[$ et $\forall y \in] -1; 1[$, $\operatorname{Arccos}'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Démonstration.

□