5 Rappels et compléments sur les fonctions

I recoil with fear and loathing from that deplorable evil, continuous functions with no derivative.

Charles Hermite (1822-1901), à propos de la fonction de Weierstrass

I – Fonctions - Ensembles de définition - Composées

Définition 5.1 – Une **fonction** f d'une variable réelle à valeurs réelles est la donnée de E et F, deux parties de $\mathbb{R}$, et d'une correspondance qui à tout $x \in E$ associe un et un seul élément de F que l'on note $f(x)$.

- E est appelé l'**ensemble de départ** de f ;
- F est appelé l'**ensemble d'arrivée** de f ;
- Pour tout $x \in E$, l'élément $f(x)$ est appelé l'**image** de x par f ;
- Soit $y \in F$. Un élément x de E est **un antécédent** de y par f si, et seulement si, $f(x) = y$.

L'écriture $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ permet de définir proprement la fonction f.

Remarque 5.2 – Une fonction n'est bien définie que lorsqu'on explicite à la fois ses ensembles de départ et d'arrivée et une manière d'obtenir $f(x)$ pour tout x dans le domaine de départ de f. Il arrive cependant que les ensembles de départ et d'arrivée soient omis lors de la définition d'une fonction dont on ne donne que l'expression $f(x)$. Il faut alors trouver son ensemble de définition (cf ci-dessous) et l'on choisit par défaut $\mathbb{R}$ pour son ensemble d'arrivée.

Définition 5.3 – Soit f une fonction réelle d'une variable réelle dont on ne connaît que l'expression $f(x)$. On appelle **ensemble de définition** de f, souvent noté $\mathcal{D}_f$, la plus grande partie de $\mathbb{R}$ (plus grande au sens de l'inclusion) telle que pour chacun de ses éléments x, on puisse donner un sens à l'expression $f(x)$. La fonction f est alors correctement définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$

Exemple 5.4 – La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x-4}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Proposition 5.5

Soient N, D, A et B quatre réels.

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc $\dfrac{N}{D}$ existe $\iff D \neq 0$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc $\sqrt{A}$ existe $\iff A \geqslant 0$.
- La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\ln(B)$ existe $\iff B > 0$.

Exemple 5.6 – Déterminer le domaine de définition de chacune des trois fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-4} \qquad g(x) = \sqrt{1-x} \qquad h(x) = \ln(x^2-9).$$

1. Domaine de définition de la fonction f : $x \notin \mathcal{D}_f \iff x^2 - 4 = 0 \iff (x-2)(x+2) = 0 \iff x = 2$ ou $x = -2$
   Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.
2. Domaine de définition de la fonction g : $x \in \mathcal{D}_g \iff 1 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1$
   Donc $\mathcal{D}_g =]-\infty; 1]$.
3. Domaine de définition de la fonction h : $x \in \mathcal{D}_h \iff x^2 - 9 > 0 \iff (x-3)(x+3) > 0 \iff x < -3$ ou $x > 3$
   Donc $\mathcal{D}_h =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$.

Définition 5.7 (Ensemble image) – Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. Soit E une partie de $\mathbb{R}$ tel que $E \subset \mathcal{D}_f$. On appelle **ensemble image** de E par la fonction f et on note $f(E)$ l'ensemble :

$$f(E) = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in E, \quad y = f(x)\}.$$

Exemple 5.8 – Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Déterminons son domaine de définition et son domaine image sachant que son tableau de variation est le suivant.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

On montre facilement que $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.
En effet, $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \geqslant 0$ pour $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.
De l'étude des variations de la fonction f, on déduit que $f(]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[) \subset [0; +\infty[$.
L'autre inclusion est plus longue à montrer et nécessite le théorème des valeurs intermédiaires.

Il peut parfois être utile de déterminer $f(\mathcal{D}_f)$ notamment lorsqu'on **compose** des fonctions.

Définition 5.9 (Composée de fonctions) – Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. La composée de la fonction f par g est la fonction, notée $g \circ f$ (qui se lit « g rond f ») est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Ainsi $g \circ f$ est définie sur $D_{g \circ f} = \left\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\right\}$.

Exemple 5.10 – On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \mathrm{e}^x.$$

Donner l'expression et le domaine de définition des fonctions composées suivantes :

1. $f \circ g$ On remarque que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+$. On a donc clairement $g(\mathcal{D}_g) \subset \mathcal{D}_f$.
   Soit $x \in \mathcal{D}_g$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$.
2. $g \circ f$ On remarque que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+$. On a $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}_+ = \mathcal{D}_g$.
   Soit $x \in \mathcal{D}_f$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$.
3. $f \circ h$ On remarque que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$. On a donc clairement $h(\mathcal{D}_h) \subset \mathcal{D}_f$.
   Soit $x \in \mathcal{D}_h$, $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(\mathrm{e}^x) = (\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$.
4. $h \circ f$ On remarque que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$. On a clairement $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_h$.
   Soit $x \in \mathcal{D}_f$, $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x^2) = \mathrm{e}^{x^2}$.

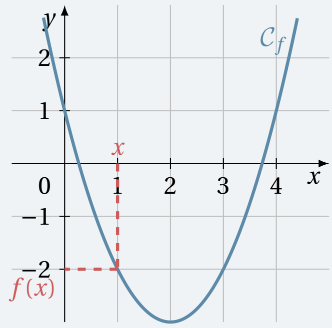
ATTENTION ! Si f est une fonction, $f(x)$ est un réel. Ainsi, dire que $f(x)$ est continue, dérivable, croissante, paire, etc.. n'a **AUCUN SENS** .

II – Graphe d'une fonction réelle

Définition 5.11 –

Dans le plan, muni d'un repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on nomme **courbe représentative** d'une fonction numérique f, l'ensemble des points de coordonnées $\left(x,f(x)\right)$ du plan, pour x parcourant l'ensemble de définition de f. On la note souvent $\mathcal{C}_f$. Ainsi

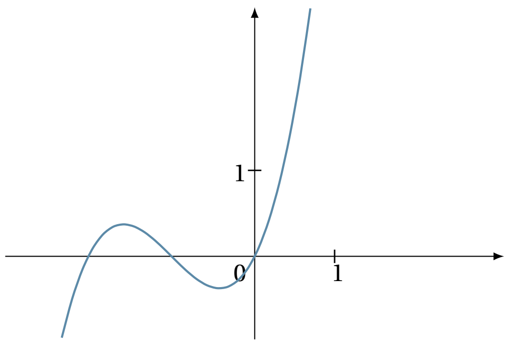
$$\mathcal{C}_f=\left\{\left(x,f(x)\right)\mid x\in D_f\right\}.$$



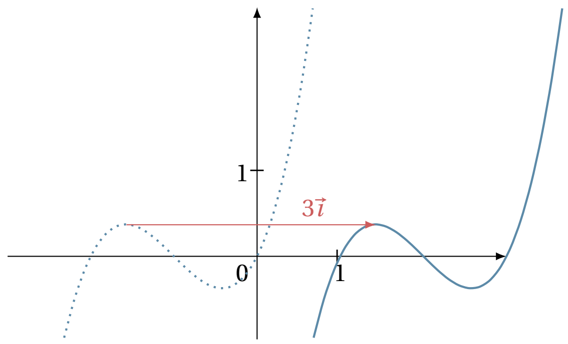
Remarque 5.12 – Les images $f(x)$ se lisent sur l'axe des ordonnées et les antécédents x sur l'axe des abscisses.

Nous allons voir comment obtenir la courbe représentative de certaines fonctions s'exprimant à l'aide de f lorsque l'on connait celle de f. Soit $f : D\to\mathbb{R}$ une fonction réelle et $a\in\mathbb{R}$.

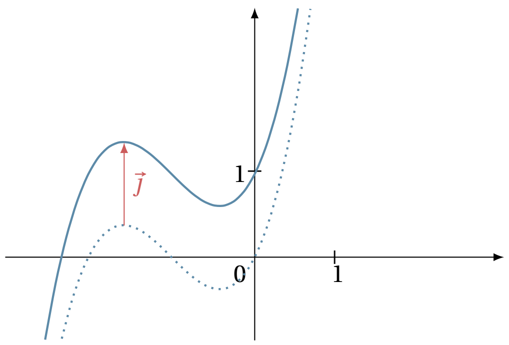
Graphe de $f : x\mapsto x(x+1)(x+2)$



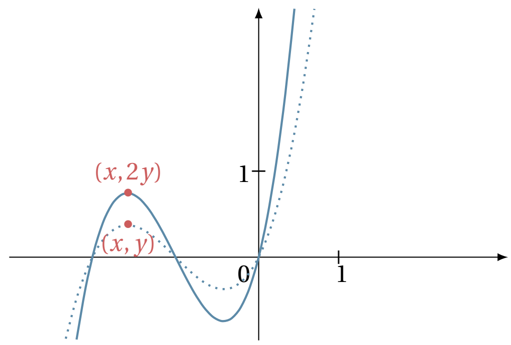
Graphe de $g : x\mapsto f(x-3)$



Graphe de $h : x\mapsto f(x)+1$



Graphe de $k : x\mapsto 2f(x)$



Proposition 5.13 – Transformation de courbes du plan

Soit $f : D\to\mathbb{R}$ une fonction dont on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative dans un repère $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit $a\in\mathbb{R}$.

1. La courbe de $x\mapsto f(x)+a$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par translation de vecteur $a\vec{\jmath}$.
2. La courbe de $x\mapsto f(x+a)$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $-a\vec{\imath}$.
3. La courbe de $x\mapsto af(x)$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par l'affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport a (ce qui signifie que les ordonnées de la courbe de $x\mapsto f(ax)$ sont les images multipliées par a des ordonnées correspondantes sur la courbe de $\mathcal{C}_f$).

III – Parité, imparité, périodicité

Définition 5.14 – Une partie D de $\mathbb{R}$ est dite **symétrique** par rapport à 0 (zéro) si, et seulement si, pour tout $x \in D$, on a aussi $-x \in D$.

Exemple 5.15 –
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $]-2;-1] \cup [1;2[$ et $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ sont symétriques par rapport à 0.

$]-1;3]$ et $\mathbb{R}^+$, par exemple, ne sont pas symétriques par rapport à 0.

Définition 5.16 – Soit $D \subset \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 et f une fonction réelle définie sur D. On dit que :

- f est **paire** si, et seulement si, elle vérifie : $\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)$.
- f est **impaire** si, et seulement si, elle vérifie : $\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)$.

Remarque 5.17 – Si une fonction f est impaire et définie en 0, alors on a nécessairement $f(0) = 0$ (preuve : $f(0) = -f(0)$). En particulier, une fonction qui ne vaut pas 0 en 0 n'a aucune chance d'être impaire !

Méthode 5.18 – Étudier la parité d'une fonction
On procède toujours en deux temps.

1. On vérifie que l'ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à 0.
   (Pour cela, on se contente souvent de le constater en observant D_f.)
2. On exprime $f(-x)$ à l'aide de $f(x)$, pour tout $x \in D_f$.

Exemple 5.19 –

1. Étudier la parité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

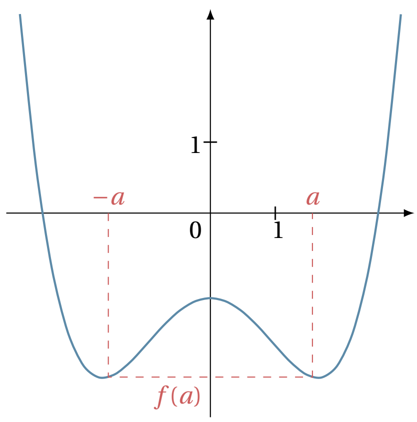
   $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad f(-x) = \dfrac{-x}{1+(-x)^2} = -\dfrac{x}{1+x^2} = -f(x)$.

   Donc la fonction f est impaire.

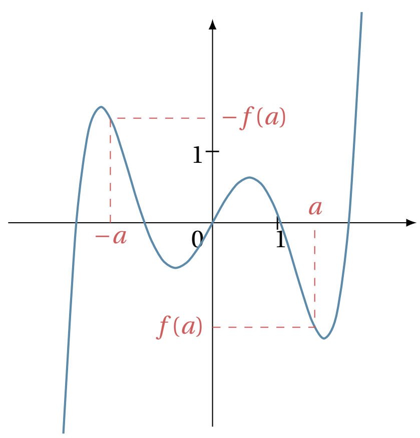
2. Étudier la parité de la fonction f définie sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.
   $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ est bien symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in\ ]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$,
   $f(-x) = \sqrt{(-x)^2-1} = \sqrt{x^2-1} = f(x)$. Donc la fonction f est paire.

Interprétation géométrique

La fonction f est paire si, et seulement si, sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe (Oy).



La fonction f est impaire si, et seulement si, sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Définition 5.20 – Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $T > 0$ un réel. f est dite T–**périodique** si, et seulement si :

1. $\forall x \in D$, $x + T \in D$ et $x - T \in D$.
2. $\forall x \in D$, $f(x+T) = f(x)$.

Remarque 5.21 – Si l'ensemble D ne vérifie pas le premier point, une fonction définie sur D n'a aucune chance d'être T–périodique.

Exemple 5.22 – La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 2\pi \in \mathbb{R}$ et $x + 2\pi \in \mathbb{R}$. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ donc cos est 2π–périodique.

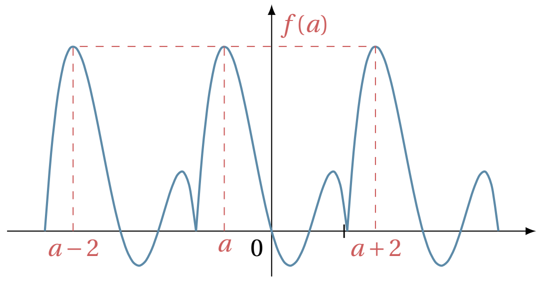
Fonctions périodiques de référence :

- Toute fonction constante est T-périodique pour tout $T > 0$.
- sin est impaire et 2π–périodique.
- cos est paire et 2π–périodique.
- tan est impaire et π–périodique.

Interprétation graphique

Si une fonction f est T–périodique, sa représentation graphique est invariante par translation de vecteur $T\vec{\imath}$.

Graphe d'une fonction 2-périodique



Remarque 5.23 – Une fonction T-périodique est aussi $2T$-périodique, $3T$-périodique, etc.

Lorsqu'un énoncé demande de trouver « la »période d'une fonction, cela signifie implicitement qu'on demande la plus petite période strictement positive possible. Cependant, à moins que cela ne soit demandé, on ne s'attend pas à ce que montriez que c'est la plus petite.

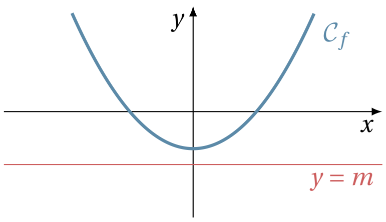
IV – Fonctions minorées, majorées, bornées, maximum, minimum

Définition 5.24 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que

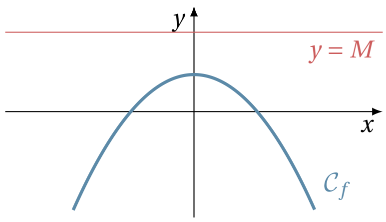
- f est **majorée** sur I lorsqu'elle vérifie
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \leqslant M$$
On dit alors que M est un **majorant** de f.
- f est **minorée** sur I lorsqu'elle vérifie
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \geqslant m.$$
On dit alors que m est un **minorant** de f.

Enfin la fonction f est dite **bornée** sur I lorsqu'elle est à la fois majorée **et** minorée sur I.

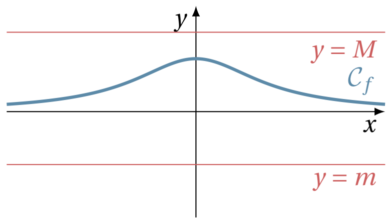
Remarque 5.25 – Graphiquement, une fonction f est majorée par un réel M (resp. minorée par un réel m) lorsque sa courbe représentative est située en dessous (resp. au-dessus) de la droite horizontale d'équation $y = M$ (resp. $y = m$).



Courbe représentative d'une fonction minorée



Courbe représentative d'une fonction majorée



Courbe représentative d'une fonction bornée

Méthode 5.26 – Montrer qu'une fonction est majorée/minorée/bornée
Pour montrer qu'une fonction est majorée ou minorée, il y a plusieurs possibilités :

- Lorsque la fonction f est définie sur un intervalle borné, on peut partir du domaine de définition de f : $x \in \ldots$ puis on essaie de reconstituer la fonction f en appliquant les opérations et fonctions élémentaires (en faisant bien attention au maintien ou non des inégalités, selon que la fonction appliquée est croissante ou décroissante).
- Si la question posée est "Montrer que $f(x) \leqslant M$.", on peut étudier le signe de la différence $f(x) - M$ et montrer que $f(x) - M \leqslant 0$.
  Inversement, si la question posée est "Montrer que $f(x) \geqslant m$.", on peut étudier le signe de $f(x) - m$ et montrer que $f(x) - m \geqslant 0$.

Exemple 5.27 –

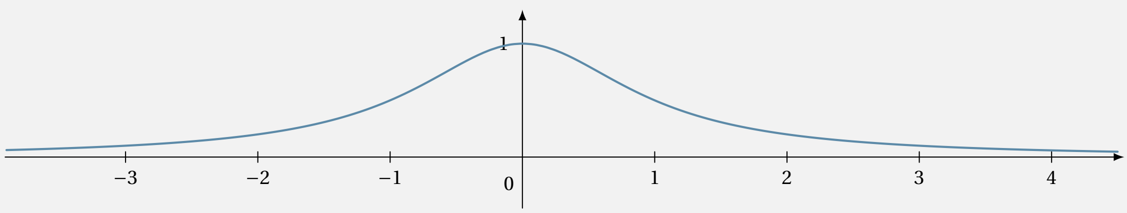
1. Soit f la fonction définie pour $x \in [0,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
   Montrer que $\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
   On part du domaine de définition de f, à savoir $x \in [0,1]$ puis on reconstitue la fonction f :
   $$0 \leqslant x \leqslant 1 \iff 0 = 0^2 \leqslant x^2 \leqslant 1^2 = 1 \iff 1 \leqslant 1 + x^2 \leqslant 2 \iff \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1} = 1 \iff \frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$$
   On a ainsi montré que pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$. En particulier, $\quad \forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
2. Soit g la fonction définie pour $x \in]-1,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{3x}{1+x}$. Montrer g est majorée par 3.
   On étudie cette fois le signe de la différence $g(x) - 3$ et on montre que $g(x) - 3 \leqslant 0$.
   $$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad g(x) - 3 = \frac{3x}{1+x} - 3 = \frac{3x}{1+x} - \frac{3(1+x)}{1+x} = \frac{3x - 3 - 3x}{1+x} = \frac{-3}{1+x}$$
   On a bien montré que $\quad \forall x \in]-1,+\infty[, \quad g(x) \leqslant 3$.

Définition 5.28 – Soient D une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction réelle définie sur D et a un élément de D. On dit que :

- ▷ f admet **un maximum global** en a si, et seulement si, $\forall x \in D,\ f(x) \leqslant f(a)$.
- ▷ f admet **un minimum global** en a si, et seulement si, $\forall x \in D,\ f(x) \geqslant f(a)$.
- ▷ Un **extremum** de f sur D est soit un maximum soit un minimum de f sur D.

Remarque 5.29 – Si $f(a)$ est un extremum sur un intervalle ouvert contenant a, mais pas sur D tout entier, on dit que $f(a)$ est un **extremum local**.

Exemple 5.30 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. On sait que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant f(0) = 1$. Donc la fonction f admet un maximum en $x_0 = 0$ sur $\mathbb{R}$: $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{1}{x^2+1} = 1$. Par contre, la fonction f n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}$ (et pourtant elle est minorée sur $\mathbb{R}$).

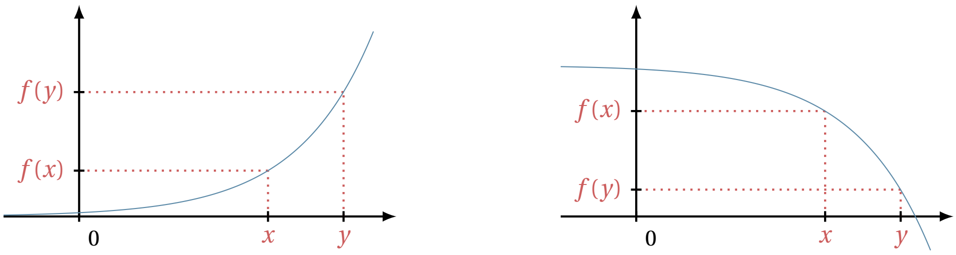


ATTENTION ! Le maximum global et le minimum global d'une fonction n'existent pas toujours et s'ils existent, peuvent être atteints en plusieurs points différents.

V – Monotonie

Définition 5.31 – Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

On dit que f est	ssi, elle vérifie la relation
croissante sur D	$\forall x, y \in D,\ \big(x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)\big)$
strictement croissante sur D	$\forall x, y \in D,\ \big(x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)\big)$
décroissante sur D	$\forall x, y \in D,\ \big(x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)\big)$
strictement décroissante sur D	$\forall x, y \in D,\ \big(x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)\big)$



Remarque 5.32 – On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre et qu'une fonction décroissante inverse l'ordre.

Proposition 5.33

- La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).
- La composée de deux fonctions ayant le même sens de variation est croissante.
- La composée de deux fonctions ayant des sens de variation opposé est décroissante.

Remarque 5.34 – Pour retenir les deux derniers points de cette proposition, on peut remarquer une analogie avec la règle du signe d'un produit.
Si « croissante » = « + » et « décroissante » = « - », on a bien « + × + = + », « - × - = + » et « + × - = - ».

Démonstration.

- Soient f et g des fonctions croissantes et soient $x, y \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ tels que $x < y$. Comme les fonctions f et g sont croissantes, on a : $f(x) \leqslant f(y)$ et $g(x) \leqslant g(y)$. En additionnant les deux inégalités, on obtient : $f(x) + g(x) \leqslant f(y) + g(y)$.
  Ainsi la fonction $f + g$ est croissante.
- Soient f et g des fonctions croissantes et soient $x, y \in \mathcal{D}_f$ tels que $x < y$. Comme f est croissante, on a $f(x) \leqslant f(y)$. La fonction g étant également croissante, on en déduit : $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$.
  Ainsi la fonction $g \circ f$ est croissante.

□

ATTENTION ! Si une fonction f est croissante sur deux intervalles disjoints, elle n'a aucune raison d'être croissante sur leur réunion.

La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

Définition 5.35 – Une fonction est dite **monotone** si, et seulement si, elle est croissante ou décroissante.

Une fonction est dite **strictement monotone** si, et seulement si, elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque 5.36 – Les fonctions constantes sont à la fois croissantes et décroissantes.

VI – Limites d'une fonction

Les définitions et propriétés précises des limites de fonctions réelles seront étudiées plus tard dans l'année. Pour l'instant, contentons-nous de rappeler les opérations sur les limites.

Dans, les trois tableaux ci-dessous, la lettre a désigne aussi bien un réel que $-\infty$ ou $+\infty$, et a ne peut être qu'un point du domaine de définition ou une des extrémités des intervalles qui le composent. Les lettres ℓ et ℓ' désignent des nombres réels.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	indéterminée

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	indéterminée

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0 et $f>0$	0 et $f<0$	0
$\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	indéterminée

Exemple 5.37 – Calculer les limites suivantes.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\frac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+\end{array}\right\}\text{ Par somme, } \lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\frac{1}{x} = +\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x+1)\sqrt{x}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} -2x+1 = -\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty\end{array}\right\}\text{ Par produit, } \lim\limits_{x\to+\infty} (-2x+1)\sqrt{x} = -\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{2x-1}{x-2}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-1 = 3\\ \lim\limits_{x\to 2^+} x-2 = 0^+\end{array}\right\}\text{ Par quotient, } \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{2x-1}{x-2} = +\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}+4}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+4 = 4\\ \lim\limits_{X\to 4} \sqrt{X} = 2\end{array}\right\}\text{ Par composition, } \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}+4} = 2.$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$.
  Le calcul direct de cette limite donne une forme indéterminée du type "$+\infty-\infty$". On cherche donc à réécrire l'expression en mettant au même dénominateur : $1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2} = \frac{x^2+x-1}{x^2}$.

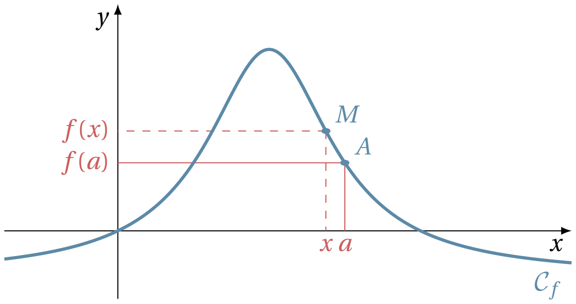
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+x-1 = -1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^+\end{array}\right\}\text{ Par quotient, } \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+x-1}{x^2} = -\infty.$$

  Finalement on a montré que $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} = -\infty$.

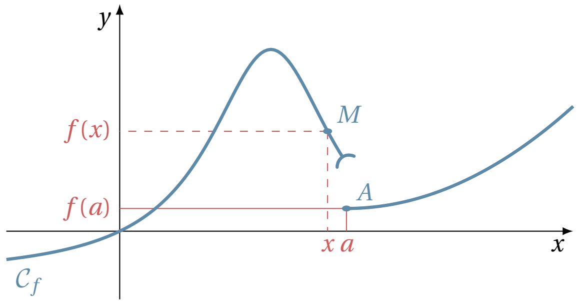
ATTENTION ! Le terme « indéterminée » ne signifie pas que la limite n'existe pas ! Il signifie simplement que les opérations sur les limites ne permettent pas de déterminer la limite.

VII – Continuité

Pour l'instant, on ne donnera pas de définition exacte de la continuité. On se contente de : une fonction f est continue sur un domaine D lorsqu'en tout point a de D, on peut tracer localement autour de a la courbe représentative de f sans lever le crayon. Les résultats de ce paragraphe sont admis ou bien déjà vus en terminale. On y reviendra en détail plus tard dans l'année.



La fonction f est continue.



La fonction f n'est pas continue en a.

Proposition 5.38 – Fonctions de référence continues

Les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles (c'est à dire les quotients de deux fonctions polynômiales), les fonctions cosinus, sinus et tangente, la fonction racine carrée, la fonction exponentielle et le logarithme sont toutes continues sur leur domaine de définition.

Remarque 5.39 – la fonction tangente n'est pas traçable sans lever le crayon. Cependant, on peut bien la tracer **localement** sans lever le crayon autour de chaque point où elle est définie. Elle est donc bien continue sur son domaine de définition.

Proposition 5.40 – Continuité et opérations usuelles

Soient λ un réel, f, g deux fonctions réelles définies sur un intervalle I.

1. Si f et g sont continues sur I, alors les fonctions $f+g$, λf et fg sont continues sur I.
2. Si f ne s'annule pas sur I, et si f est continue sur I, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue sur I.

Proposition 5.41 – Continuité de la composée de deux fonctions

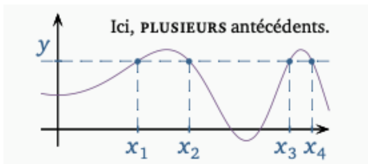
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I telle que : $\forall x \in I,\ f(x) \in J$.
Soit g une fonction définie sur J à valeurs réelles.
Si f est continue sur I et si g est continue sur J, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Remarque 5.42 – **ATTENTION!** La composition est plus délicate à manier que l'addition et le produit car elle jongle avec différents niveaux d'intervalles. Par exemple, on ne peut pas dire que « la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont », car la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ **N**'est **PAS** continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Que dire alors ? Éventuellement ceci : « La fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composition », mais si on veut suivre avec précision les différents niveaux d'intervalles en jeu, on dira plutôt que « la fonction $x \longmapsto x^2+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ l'est sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ ».

Théorème 5.43 – Théorème des valeurs intermédiaires ou TVI

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction **CONTINUE**. Tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède **AU MOINS UN** antécédent par f dans $[a, b]$:

$$\exists x \in [a, b], \quad y = f(x)$$



Le TVI est le théorème général par excellence d'**EXISTENCE DE SOLUTIONS** pour les équations de la forme $y = f(x)$ d'inconnue x où y est fixé. Il sera étudié plus en détail dans le chapitre consacré à la continuité.

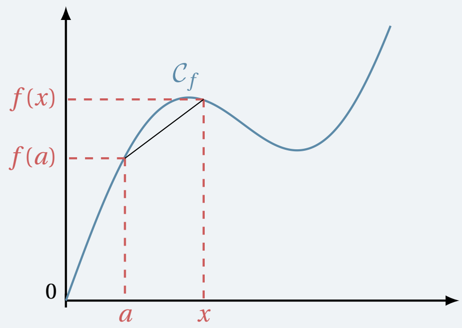
VIII – Dérivation

Définition 5.44 –

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I. La fonction

$$\tau_a : \begin{array}{ccc} I\setminus\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

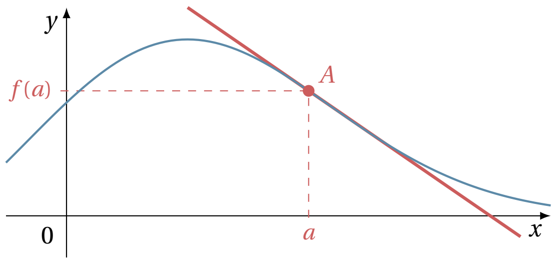
est appelée **taux d'accroissement** de f en a.



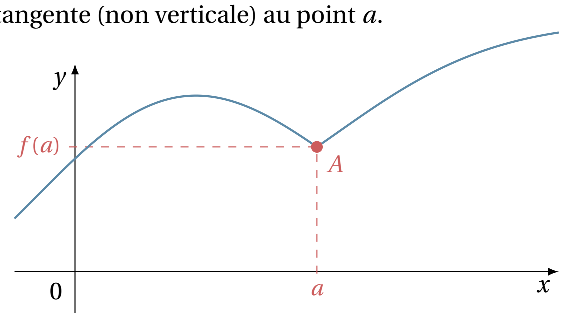
Définition 5.45 – Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I.
La fonction f est dite **dérivable en a** si, et seulement si, la fonction τ_a admet une limite finie ℓ en a ; dans ce cas, ℓ est appelée le **nombre dérivé** de f en a et noté $f'(a)$.

On dit que f est **dérivable sur I** si, et seulement si, elle est dérivable en tout point de I ; dans ce cas, la fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f et notée f'.

Nous aurons l'occasion de revenir en détail plus tard sur la notion de dérivabilité. Retenons pour le moment qu'une fonction est dérivable en un point a ssi sa courbe représentative admet une tangente (non verticale) au point a.



La fonction f est dérivable en a.



La fonction f n'est pas dérivable en a.

Proposition 5.46 – Fonctions usuelles dérivables

Les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles (c'est à dire les quotients de fonctions polynomiales), les fonctions trigonométriques, la fonction exponentielle et le logarithme sont toutes dérivables sur leur domaine de définition.

La fonction racine carrée n'est dérivable que sur $]0;+\infty[$. Son graphe admet une tangente verticale en 0.

La fonction valeur absolue n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^*$.

Proposition 5.47 – Opérations sur les dérivées

- **Combinaison linéaire, produit, quotient :** Pour toutes fonctions f, g dérivables et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg sont dérivables, ainsi que $\dfrac{f}{g}$ si g ne s'annule pas. En outre :

$$(\lambda f+\mu g)' = \lambda f' + \mu g', \quad (fg)' = f'g + fg' \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

- **Composition :** Pour toutes fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to \mathbb{R}$ dérivables, $g \circ f$ est dérivable sur E et :

$$(g\circ f)' = f' \times g' \circ f.$$

ATTENTION ! On ne dérive pas une fonction avant d'avoir justifié qu'elle est dérivable.

Dans le tableau suivant, $\mathcal{D}$ désigne le domaine de dérivabilité de la fonction f.

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n\in\mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x^p \quad (p\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N})$	px^{p-1}	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^\alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R}$

fonction f	fonction dérivée f'
λu	$\lambda u'$
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$
$\exp(u)$	$u'\exp(u)$
$u^n \quad (n\in\mathbb{N})$	$nu'u^{n-1}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\tan(u)$	$u'(1+\tan^2(u))$

Remarque 5.48 – Il est très important de prendre l'habitude de toujours **simplifier** au maximum les calculs de dérivées. Cela facilite ensuite l'étude de son signe. Il faut notamment penser à **factoriser au maximum** et à **regrouper les différents termes** (fractions à mettre au même dénominateur).

Proposition 5.49

Soit f une fonction dérivable en $a\in\mathbb{R}$. La tangente (T_a) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a admet pour équation :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$

Théorème 5.50

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors

$$f \text{ est constante sur } I \quad \text{si et seulement si} \quad \forall x\in I,\quad f'(x)=0.$$

ATTENTION ! Le résultat est faux si I n'est pas un intervalle. Ainsi la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=-1$ si $x<0$ et $f(x)=1$ si $x>0$, vérifie $f'(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ mais f n'est pas constante.

Théorème 5.51

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $\forall x\in I,\quad f'(x)\geqslant 0$ (resp. $f'(x)\leqslant 0$).
- La fonction f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur I **sauf éventuellement en un nombre fini de points** où f' peut s'annuler.

IX – Les logarithmes

1 – Le logarithme népérien

Définition 5.52 – La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est **la** primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui prend la valeur 0 lorsque $x = 1$.

Proposition 5.53

De cette définition résulte trois conclusions immédiates :

- La fonction logarithme népérien est définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
- La fonction logarithme népérien s'annule lorsque $x = 1$: $\ln(1) = 0$.
- Pour tout réel strictement positif $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Proposition 5.54 – Propriétés algébriques du logarithme

Pour tous nombres réels strictement positifs $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$.
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Démonstration. On commence par démontrer la formule $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$. Les suivantes en découlent alors facilement.

- Fixons $a > 0$ et considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \ln(a \times x) - \ln(a) - \ln(x)$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$$\forall x > 0 \qquad \varphi'(x) = \frac{a}{ax} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$
Ainsi la fonction φ est constante. De plus, $\varphi(1) = \ln(a) - \ln(a) - \ln(1) = 0$. Donc, pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = 0$. En particulier, on a bien :
$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$
- Grâce à la formule précédente, on sait que $\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a)$. Cependant $\frac{1}{a} \times a = 1$ donc $\ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln(1) = 0$. Ainsi $\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a) = 0$ et donc $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- On raisonne de manière similaire pour les autres points.

□

Exemple 5.55 – Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\ln(2x) - \ln(x)$
   $= \ln(2) + \ln(x) - \ln(x) = \ln(2)$
2. $\ln(x^2) - \ln(x)$
   $= 2\ln(x) - \ln(x) = \ln(x)$
3. $\ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
   $= \ln(x) + \ln(x) = 2\ln(x)$
4. $2\ln(x^3) + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$
   $= 6\ln(x) - 3\ln(x) = 3\ln(x)$
5. $\ln(1) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$
   $= 0 - \ln(x) - 2\ln(x) = -3\ln(x)$
6. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right)$
   $= \ln(x) - \ln(y) + \ln(y) - \ln(x) = 0$

Proposition 5.56 – Limites

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \quad$ et $\quad \lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.

Démonstration.

1. Soit $M > 0$. Alors on a $\ln\left(2^n\right) = n\ln 2$ qui tend vers $+\infty$. En particulier, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ln\left(2^{n_0}\right) \geqslant M$. Posons $A = 2^{n_0}$. Par croissance de la fonction logarithme, pour tout $x \geqslant A$, on a $\ln(x) \geqslant \ln(A) = \ln\left(2^{n_0}\right) \geqslant M$. Ainsi, la fonction ln admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
   En considérant $\ln\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ à la place de $\ln\left(2^n\right)$, on montre que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
2. La première limite exprime que le nombre dérivé de ln en 1 vaut 1 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} = \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.
   Pour les autres limites, cf plus loin (cas plus général).

□

Proposition 5.57 – Inégalité du logarithme

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

Démonstration. On définit $f : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) - (x-1) \end{array}$.

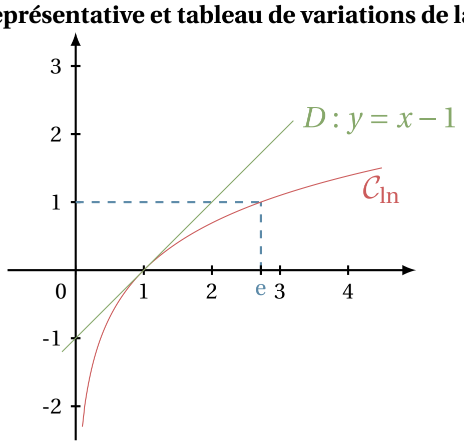
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$. On en déduit le tableau de signe et variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f		↗	0	↘	

Donc f atteint en 1 son maximum.
Donc $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) \leqslant f(1)$, c'est à dire $\ln(x) \leqslant x - 1$.

□

Courbe représentative et tableau de variations de la fonction ln **:**



x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖		$+$		
ln	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

On observe graphiquement qu'il existe un point unique de la courbe ayant pour ordonnée 1. Son abscisse est voisine de 2.7. Au-delà de cette observation graphique, l'existence d'un unique antécédent de 1 repose sur le théorème des valeurs intermédiaires, rappelé précédemment.

Définition-Propriété 5.58 – Il existe donc un seul réel x tel que $\ln(x) = 1$. On appelle ce réel **nombre de Neper** et on le note e. On peut mémoriser que $e \approx 2,72$.

2 – Logarithme en base quelconque

Définition 5.59 –
Soit un réel $a > 1$. On appelle **logarithme en base** a, noté $\log_a$, l'application $\log_a : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}$.

Remarque 5.60 – La fonction $\log_a$ est donc la fonction proportionnelle à ln qui vaut 1 en a.

1. $\log_e$ est ainsi le logarithme népérien ln vu précédemment.
2. Le logarithme en base 10 est également noté log et appelé **logarithme décimal**. Cette fonction est couramment utilisée en chimie (notamment en pH-métrie), en acoustique (définition du décibel) et plus généralement dans différents domaines pour représenter sur des échelles logarithmiques des phénomènes variant de plusieurs ordres de grandeurs.
3. Le logarithme en base 2, également appelé **logarithme binaire**, est souvent utilisé en informatique. En effet, un nombre entier n s'écrit en binaire avec un nombre de chiffres qui est l'entier strictement supérieur à $\log_2(n)$. C'est le nombre de bits minimal qui sera nécessaire pour stocker n en mémoire.

   Par exemple 13 s'écrit en binaire 1101, et $\log_2(13) = \dfrac{\ln(13)}{\ln(2)} \approx 3,7$.
4. Le logarithme en base a peut également être défini pour $a \in]0,1[$. Dans ce cas, son sens de variation change.

Proposition 5.61

Soit $a > 1$.

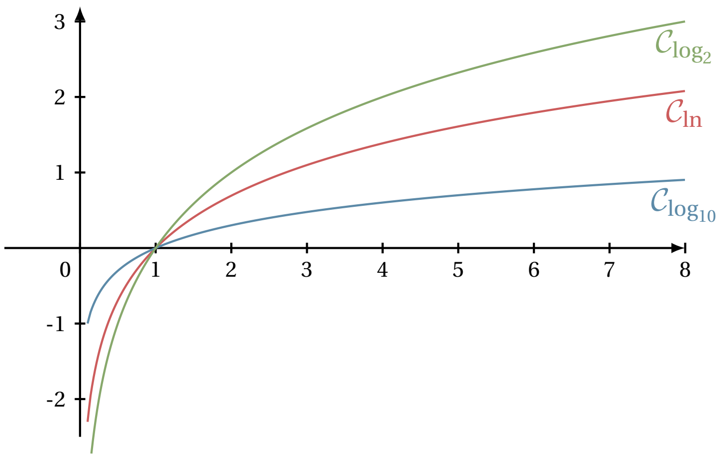
1. On a $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$.
2. La fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x\ln(a)}$.
3. la fonction $\log_a$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
4. Pour tous réels x et y strictement positifs, on a $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
5. Pour tous réels x et y strictement positifs, on a $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
6. Pour tous réels $x > 0$ et tout entier relatif n, on a $\log_a(x^n) = n\log_a(x)$.
7. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$.
8. Soit $x \in]0;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $a^n \leqslant x < a^{n+1}$ si, et seulement si, $n \leqslant \log_a(x) < n+1$.

Démonstration. Ces propriétés découlent directement de celles du logarithme népérien. □

Remarque 5.62 – En particulier, on a pour tout $x \in]0;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$,

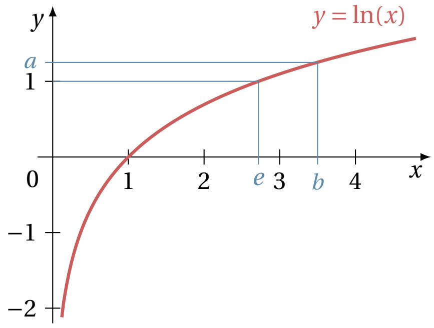
$$2^n \leqslant x < 2^{n+1} \iff n \leqslant \log_2(x) < n+1 \quad \text{et} \quad 10^n \leqslant x < 10^{n+1} \iff n \leqslant \log_{10}(x) < n+1$$

Courbe représentative des différents logarithmes :



X – L'exponentielle

Il est possible de généraliser la démarche qui a permis d'introduire dans le paragraphe IX-1 précédent le nombre e. Il suffit de remplacer le nombre 1 par un nombre réel a quelconque : il existe un unique nombre réel b tel que $\ln(b) = a$.



Ainsi pour $a = 1$, on trouve $b = e$. Pour $a = 2$, on trouve $b = e^2$. Pour $a = 3$, on trouve $b = e^3$. Pour $a = -1$, on trouve $b = e^{-1}$. Et pour $a = n$, où n est un entier relatif, on trouve $b = e^n$.

Définition 5.63 – Le nombre b tel que $\ln(b) = a$ est appelé **exponentielle de** a et est noté e^a.

On définit ainsi une nouvelle fonction, appelée **fonction exponentielle**, notée exp, définie sur $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs dans $]0, +\infty[$. Pour des raisons évidentes, on note le plus souvent $\exp(x) = e^x$.

Remarque 5.64 – La fonction exponentielle est la **bijection réciproque** de la fonction logarithme népérien :

$$]0, +\infty[\xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \quad \text{et en sens inverse} \quad]0, +\infty[\xleftarrow{\exp} \mathbb{R}.$$

Proposition 5.65

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Démonstration. Cette formule découle de la formule de dérivation d'une composée de fonction, de la dérivée du logarithme népérien, et du fait que $\ln\big(\exp(x)\big) = x$. □

Proposition 5.66

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque les deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre :

- $e^x > 0$.
- $y = e^x \iff x = \ln(y)$.
- $\ln(e^x) = x$.
- $e^{\ln(y)} = y$.

Remarque 5.67 – Toujours en raison de la réciprocité et parce que $\ln(1) = 0$, alors $e^0 = 1$.

Exemple 5.68 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- $e^x = 1$

  $e^x = 1 \iff x = \ln(1) \iff x = 0$
- $\ln(x) = 2$

  $\ln(x) = 2 \iff x = e^2$
- $e^{2t-1} = 1$

  $e^{2t-1} = 1 \iff 2t - 1 = \ln(1) = 0 \iff t = \frac{1}{2}$
- $\ln(3x) = \frac{1}{2}$

  $\ln(3x) = \frac{1}{2} \iff 3x = e^{\frac{1}{2}} \iff x = \frac{1}{3} e^{\frac{1}{2}}$

Proposition 5.69 – Propriétés algébriques de l'exponentielle

Pour tous nombres réels $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{na} = (e^a)^n$

Démonstration. Soient a et $b \in \mathbb{R}$. Comme précédemment, on commence par démontrer la première formule. Les autres en découlent alors.

- Posons $x = e^a$ et $y = e^b$ de sorte que $\ln(x) = a$ et $\ln(y) = b$. Dès lors, par propriété fondamentale du logarithme népérien,
$$e^{a+b} = e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(xy)} = xy = e^a \times e^b$$
- Grâce à la formule précédente, on sait que $\quad e^a \times e^{-a} = e^{a-a} = e^0 = 1 \quad$ donc $\quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
- De la même manière, $\quad e^{a-b} = e^a \times e^{-b} = e^a \times \dfrac{1}{e^b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
- Enfin, en itérant, $\quad e^{na} = \exp\left(\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{e^a \times e^a \times \ldots e^a}_{n \text{ fois}} = (e^a)^n$.

□

Exemple 5.70 – Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$
2. $\dfrac{\left(e^x\right)^2}{e^x} = \dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$
3. $\dfrac{e^x}{e^{-x}} = e^{x+x} = e^{2x}$
4. $\left(e^{2x}\right)^3 \times \left(e^{-x}\right)^2 = e^{6x} \times e^{-2x} = e^{6x-2x} = e^{4x}$
5. $e^0 \times e^{-x} \times \left(e^x\right)^2 = 1 \times e^{-x} \times e^{2x} = e^{-x+2x} = e^x$
6. $\dfrac{e^x}{e^y} \times e^{y-x} = e^{x-y} \times e^{y-x} = e^{x-y+y-x} = e^0 = 1$

Proposition 5.71 – Inégalité classique sur l'exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant x + 1$.

Démonstration. On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) - (x+1) \end{array}$. On a $f(0) = \exp(0) - 1 = 0$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par les théorèmes généraux de dérivabilité car c'est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \exp(x) - 1$ et $f'(0) = 0$. Comme exp est strictement croissante, on en déduit le tableau de signe de f' puis le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après ce tableau, f admet 0 comme minimum, atteint en 0. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$, et $\exp(x) \geqslant x + 1$.

□

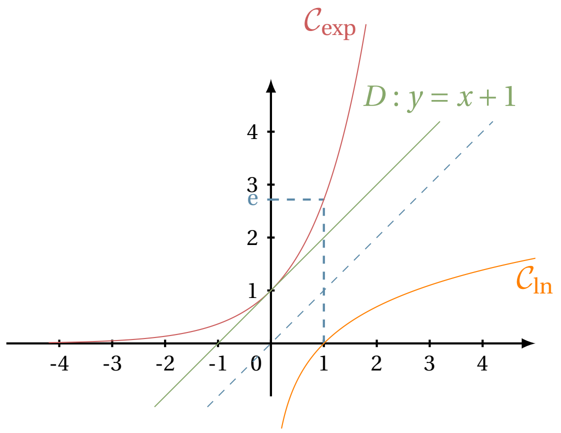
Proposition 5.72 – Limites de l'exponentielle

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0.$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant x + 1$. De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)}$. D'après ce qui précède $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\exp(-x)} = 0$ (par valeurs positives) donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$. □

Courbe représentative de la fonction exponentielle :



Le tableau de variations de la fonction exp est le suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$0 \nearrow +\infty$

Proposition 5.73 – Limite classique à connaître

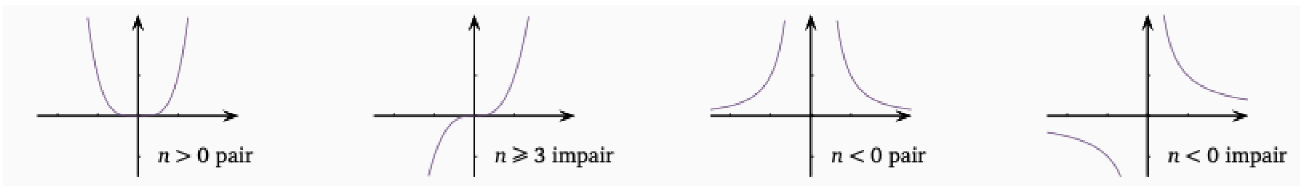
On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Démonstration. exp est dérivable en 0 et $\exp'(0) = \exp(0) = 1$. Cela signifie que le taux d'accroissement $\dfrac{e^x - e^0}{x - 0}$ a pour limite 1 quand x tend vers 0. □

XI – Fonctions puissances

1. Pour tout x réel, et tout entier $n > 0$, on pose $x^n = \underbrace{x.x.x.\ldots.x}_{n \text{ fois}}$.
2. Pour tout x réel non nul, et tout entier $n < 0$, on pose $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$ (on a $-n > 0$).
3. Par convention, pour tout x réel, on pose $x^0 = 1$.
4. Pour tout **entier pair** $q > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on note $\sqrt[q]{x}$ l'unique réel $y \geqslant 0$ tel que $y^q = x$.
(Par exemple, on a $\sqrt[4]{16} = 2$ car $2^4 = 16$ et $2 \geqslant 0$.)
5. Pour tout **entier impair** $q > 0$ et tout réel x, on note $\sqrt[q]{x}$ l'unique réel y tel que $y^q = x$.
(Par exemple, on a $\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)^3 = -27$.)

Rappelons les allures des fonctions puissances $x \longmapsto x^n$ en fonction de $n \in \mathbb{Z}$:



On appelle **fonction polynômiale** toute fonction de la forme $x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \cdots, a_n$ sont des réels. L'entier n est appelé le degré de la fonction polynômiale.

Par exemple, la fonction $x \longmapsto x^3 - 3x^2 + \sqrt{2}x + \varpi$ est une fonction polynômiale de degré 3.

On appelle **fonction rationnelle** tout quotient d'une fonction polynomiale par une fonction polynomiale non nulle, par exemple $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+2}$ ou $x \longmapsto \dfrac{x^3 - x + 7}{x}$. Les fonctions polynomiales sont bien sûr rationnelles.

Pour calculer la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction polynomiale ou rationnelle, on factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, puis on simplifie. Par exemple :

$$4x^5 - 6x^4 + 5 = \underbrace{4x^5}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty} \times \underbrace{\left(1 - \frac{3}{2x} + \frac{5}{4x^5}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{x^2 + 2x + 7}{3x^2 - 1} = \frac{x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{3x^2\left(1 - \frac{1}{3x^2}\right)} = \frac{1}{3} \times \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}}{1 - \frac{1}{3x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{3}.$$

Définition 5.74 – Soit α dans $\mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance** α la fonction f_α définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}.$$

Exemple 5.75 –

- Pour $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, on retrouve les fonctions puissances entières définies ci-dessus.
- α peut également prendre des valeurs non entières. Par exemple, pour $x > 0$,

$$f_{\frac{3}{2}}(x) = x^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}\ln(x)}, \qquad \text{ou bien} \qquad f_{\sqrt{2}}(x) = x^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln(x)}.$$

ATTENTION ! L'écriture x^α est une notation. Pour étudier une telle fonction, il faudra toujours repasser à son écriture exponentielle $e^{\alpha\ln(x)}$.

Exemple 5.76 – Pour tout $x > 1$: $x^{\frac{\ln\ln x}{\ln x}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln\ln x}{\ln x}\times\ln x} = \mathrm{e}^{\ln\ln x} = \ln x$.

Proposition 5.77

Soit α dans $\mathbb{R}$. La fonction f_α est dérivable (donc continue) sur $]0;+\infty[$ et :

$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Démonstration. Soit $x \in]0;+\infty[$. On écrit f_α sous la forme $f_\alpha(x) = e^{\alpha\ln(x)}$. La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables.
La fonction f_α est du type e^u avec $u(x) = \alpha\ln(x)$. Sa dérivée est donc de la forme $u'e^u$ avec

$$u'(x) = \frac{\alpha}{x}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f'_\alpha(x) &= \frac{\alpha}{x} e^{\alpha\ln(x)} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha \\ &= \alpha\frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

□

On en déduit la propriété suivante :

Proposition 5.78

La fonction f_α est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ si $\alpha > 0$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ si $\alpha < 0$.

Les règles de calculs sont les mêmes que celles, bien connues, dans le cas des puissances entières, exceptées qu'elles ne sont valables que pour les $x > 0$.

Proposition 5.79

Soient x et y dans $\mathbb{R}_+^*$. Soient α et β dans $\mathbb{R}$. Alors :

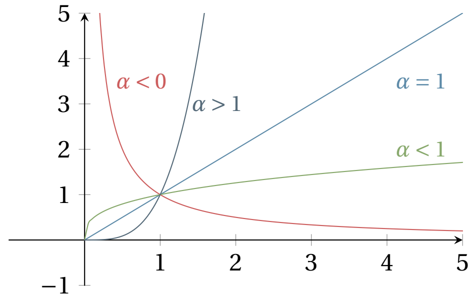
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$
- $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Exemple 5.80 –

1. Résoudre l'équation $x^{\frac{2}{3}} = 2$.
   $x^{\frac{2}{3}} = 2 \iff e^{\frac{2}{3}\ln(x)} = 2 \iff \ln\left(e^{\frac{2}{3}\ln(x)}\right) = \ln(2) \iff \frac{2}{3}\ln(x) = \ln(2) \iff \ln(x) = \frac{3\ln(2)}{2} \iff x = e^{\frac{3\ln(2)}{2}} = \left(e^{\ln(2)}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$.
   Ainsi $\mathcal{S} = \left\{2^{\frac{3}{2}}\right\}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0.99^n > 0.5$ en sachant que $\frac{\ln(0.5)}{\ln(0.99)} \simeq 68,97$.
   $0.99^n > 0.5 \iff e^{n\ln(0.99)} > 0.5 \iff n\ln(0.99) > \ln(0.5) \iff n < \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.99)} \iff n < 68,97 \iff n < 69$.
   Ainsi $\mathcal{S} = [\![0;68]\!]$.

Représentation graphique

Voici les différentes allures de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.



Méthode 5.81 –
Important : pour étudier des fonctions dont l'expression est $f(x) = u(x)^{v(x)}$, on commence toujours par transformer l'expression en $f(x) = \exp(v(x)\ln(u(x)))$. Une telle fonction n'est donc définie qu'aux points x tels que $u(x) > 0$. Pour dériver une telle fonction, c'est aussi avec l'expression utilisant l'exponentielle que l'on travaille, sinon, on a toutes les chances d'écrire n'importe quoi pour la dérivée.

Exemple 5.82 – Déterminer la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.
Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1+2x}{1+x} = \frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

Or, on sait que

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)\right)$$

Par continuité de ln, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) = \ln(2)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) = 0$.
Par continuité de exp, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Exemple 5.83 – Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto x^x$ sur son domaine de définition.
La fonction f est définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$. La fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. C'est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}_f$ qui est de la forme e^u avec $u(x) = x\ln(x)$. Sa dérivée est donc de la forme $u'e^u$ avec $u'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$. On a alors :

$$f'(x) = (\ln(x)+1)e^{x\ln(x)}.$$

Étudions le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$. On a pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $\mathrm{e}^{x\ln(x)} > 0$. Ainsi le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $\ln(x)+1$. On a :

$$\ln(x)+1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff \mathrm{e}^{\ln(x)} > \mathrm{e}^{-1} \iff x > \mathrm{e}^{-1}.$$

On en conclut que f est strictement croissante pour $x > \mathrm{e}^{-1}$ et strictement décroissante sur $]0;\mathrm{e}^{-1}]$.

XII – Fonctions circulaires hyperboliques

Définition 5.84 – On appelle **cosinus hyperbolique** (notée cosh ou ch) et **sinus hyperbolique** (notée sinh ou sh) les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Remarque 5.85 – On ne manquera pas de faire le parallèle avec les formules d'Euler vues au Chapitre 5 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}$$

Proposition 5.86

1. ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$. **2.** ch est paire et sh est impaire. **3.** $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $\mathrm{sh}(0) = 0$.

Démonstration.

1. La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ donc ch et sh également.
2. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2} = \mathrm{ch}(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{2} = -\mathrm{sh}(x)$$

3. $\mathrm{ch}(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-0}}{2} = 1$ et $\mathrm{sh}(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-0}}{2} = 0$.

□

Proposition 5.87 – Propriétés fonctions trigonométriques hyperboliques

1. Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) > 0$.
3. $\forall x > 0$, $\mathrm{sh}(x) > 0$ et $\forall x < 0$, $\mathrm{sh}(x) < 0$.
4. La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration.

1. Dérivables sur $\mathbb{R}$ par théorèmes généraux. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x), \qquad \mathrm{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x).$$

2. ch est la somme de fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}$ donc est strictement positive.
3. Pour $x > 0$, $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^{-x}$ car exp est croissante. Donc $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 0$ et $\mathrm{sh}(x) < 0$. Par imparité, pour $x < 0$, on a $\mathrm{sh}(x) < 0$.
4. Par 1) et 2), $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Par 1) et 3) $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-$. Donc ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

□

Proposition 5.88 – Limites de ch **et** sh

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$. **2.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$.

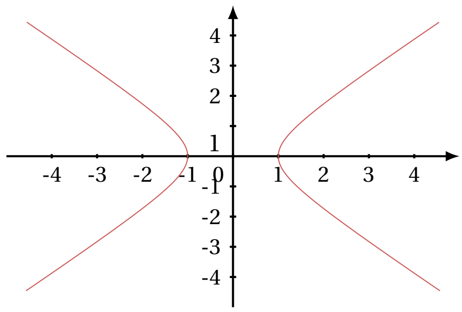
Démonstration. Ces limites sont directes, il n'y a pas de forme indéterminée. □

Proposition 5.89 – Trigonométrie hyperbolique

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1$.

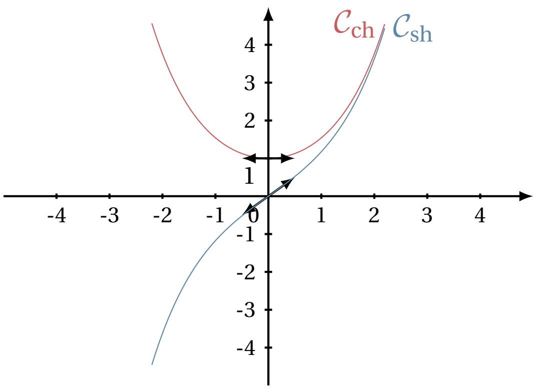
Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left((e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right) = 1.$ □

Le nom des deux fonctions vient de cette dernière relation.
La courbe d'équation $x^2 - y^2 = 1$ est une hyperbole $\mathcal{H}$. Tout comme $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont les coordonnées d'un point du cercle unité dans le cas de la trigonométrie classique, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x))$ sont les coordonnées des points de l'hyperbole, ou plutôt de la branche droite, de $\mathcal{H}$.



Remarque 5.90 – $\operatorname{ch}'' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{sh}'' = \operatorname{sh}$. Ces fonctions sont donc souvent rencontrées lors de la résolution d'équation différentielles d'ordre 2 et apparaissent naturellement en physique pour décrire la forme que prend une chaine suspendue à ses extrémités et soumise à la gravité.

Courbes représentatives et tableau de variations des fonctions ch **et** sh **:**



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$		1		$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{sh}'(x)$		$+$	
sh	$-\infty$	0	$+\infty$

Définition 5.91 – On appelle **tangente hyperbolique** (notée tanh ou th) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$.

Proposition 5.92

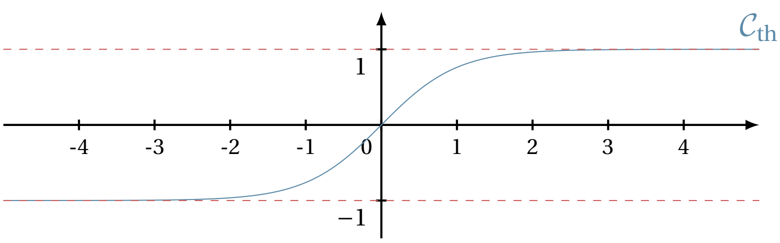
La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire et : $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$. En particulier, th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Enfin, th possède une asymptote d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$ (resp. $y = -1$ au voisinage de $-\infty$).

Démonstration. La fonction th est impaire comme quotient d'une fonction impaire et d'une fonction paire. Elle est dérivable par quotient et :

$$\operatorname{th}' = \frac{\operatorname{sh}' \times \operatorname{ch} - \operatorname{ch}' \times \operatorname{sh}}{\operatorname{ch}^2} = \frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2}, \quad \text{quantité qui vaut à la fois } \frac{1}{\operatorname{ch}^2} \text{ et } 1 - \frac{\operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$$

La stricte croissance en découle. Pour la limite en $+\infty$: $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$ □

Courbe représentative et tableau de variations de la fonction th **:**



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{th}'(x)$		$+$	
th	-1	0	1

XIII – Croissances comparées

Proposition 5.93 – Croissances comparées du logarithme népérien et des fonctions puissances

Pour tout $a>0$ et $b>0$,

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x))^a}{x^b}=0$,

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^b\left|\ln(x)\right|^a=0$.

Remarque 5.94 – En particulier, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x\ln(x)=0$.

Démonstration.

1. • Commençons par démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$.
   On a vu que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a $\ln(x)\leqslant x-1$ et a fortiori, on a $\ln(x)\leqslant x$.
   Pour tout $x\in]0,+\infty[$, on peut donc écrire aussi $\ln\left(x^{1/2}\right)\leqslant x^{1/2}$ c'est-à-dire
   $$\ln(x)\leqslant 2\sqrt{x}$$
   En divisant par x, on obtient pour tout $x>1$: $0\leqslant\dfrac{\ln(x)}{x}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.
   Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$, on obtient par théorème de comparaison des limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$.
   • Soient $a>0$ et $b>0$. Montrons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x))^a}{x^b}=0$:
   Pour tout $x>0$, on pose $X=x^{b/a}$ et l'on a
   $$\frac{(\ln(x))^a}{x^b}=\frac{\left(\ln(X^{a/b})\right)^a}{\left(X^{a/b}\right)^b}=\frac{a^a}{b^a}\left(\frac{\ln(X)}{X}\right)^a.$$
   Comme $x\to+\infty$ lorsque $X\to+\infty$, et puisque $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{\ln(X)}{X}\right)^a=0$ (car $a>0$), on obtient
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x))^a}{x^b}=0.$$
2. Soit $x>0$ et posons $y=\dfrac{1}{x}$. On a $x^b\,|\ln(x)|^a=\dfrac{1}{y^b}\left|\ln\left(\dfrac{1}{y}\right)\right|^a=-\dfrac{(\ln(y))^a}{y^b}$ donc
   $$\lim_{x\to0^+}x^b\,|\ln(x)|^a=\lim_{y\to+\infty}-\frac{(\ln(y))^a}{y^b}=0.$$

□

Proposition 5.95 – Croissances comparées des fonctions puissances et des exponentielles

Pour tout $a>0$ et $b>0$,

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{e^{ax}}=0$,

2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}|x|^b\,e^{ax}=0$.

Remarque 5.96 – En particulier on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\,e^{-x}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\,e^{x}=0$.

Démonstration. Soient $b>0$ et $a>0$.

1. Démontrons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{e^x}=0$. Pour tout $x>0$,
   $$\frac{x^b}{e^{ax}}=e^{b\ln(x)-ax}=e^{x(b\frac{\ln(x)}{x}-a)}.$$

D'après la proposition précédente, $\lim\limits_{x\to+\infty}(b\dfrac{\ln(x)}{x}-a)=-a$, qui est négatif, donc par composition de limites,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{\mathrm{e}^{ax}}=0$$

2. Pour tout $x<0$, on a

$$|x|^b\,\mathrm{e}^{ax}=\mathrm{e}^{b\ln(-x)+ax}=\mathrm{e}^{-x(\frac{b\ln(-x)}{-x}-a)}.$$

Comme $-x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, d'après la proposition précédente, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{b\ln(-x)}{-x}-a=-a$, qui est négatif, donc par compositions de limites,

$$\lim_{x\to+\infty}|x|^b\,\mathrm{e}^{ax}=0$$

□

Exemple 5.97 – Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+x}{\mathrm{e}^x-x^2}$.
Le dénominateur comprend une forme indéterminée de type " $\infty-\infty$ ". Levons l'indétermination. Pour tout x suffisamment grand :

$$\frac{\mathrm{e}^x+x}{\mathrm{e}^x-x^2}=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\times\frac{1+\frac{x}{\mathrm{e}^x}}{1-\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}}=\frac{1+\frac{x}{\mathrm{e}^x}}{1-\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}}$$

Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$ et de même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}=+\infty$.

Donc, comme inverse de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}=1$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{x}{\mathrm{e}^x}}{1-\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}}=\dfrac{1}{1}=1$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+x}{\mathrm{e}^x-x^2}=1$

XIV – Etude graphique de fonctions. Un exemple

Méthode 5.98 – Pour réaliser l'étude graphique d'une fonction
Pour tracer le graphe d'une fonction, il est utile de :

- Etudier les variations de la fonction
- Rechercher des extrema (locaux, globaux)
- Chercher d'éventuelles tangentes intéressantes à la courbe
- Calculer les limites aux bornes du domaine de définition
- Rechercher d'éventuelles asymptotes (verticale, horizontale, oblique...)
- Etudier la convexité. Rechercher des points d'inflexion.

Exemple 5.99 (Étude d'une fonction particulière) **–** Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2-4\ln(x)$$

1. Étudier le sens de variation de g, et vérifier que g admet un minimum sur $]0;+\infty[$ égal à $2(1-\ln(2))$.
2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $]0;+\infty[$.

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{4}+\frac{1+\ln(x)}{x}$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

3. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Montrer que la droite (D) d'équation $y=\dfrac{x}{4}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

6. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de (D). On montrera en particulier que (D) coupe $\mathcal{C}$ en un point A dont on calculera les coordonnées.
7. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
8. (a) Vérifier que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, on a :
$$f''(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x^3}$$
   (b) Étudier la convexité de f.
   La courbe $\mathcal{C}$ possède-t-elle des points d'inflexion ?
9. On donne :
$$\frac{1}{e} \simeq 0,4 \qquad \sqrt{e} \simeq 1,6 \qquad f(\sqrt{e}) \simeq 1,3$$
Représenter la courbe $\mathcal{C}$ et la droite (D) dans un même repère orthonormé.

Corrigé

1. La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$. De plus, pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a :
$$g'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2x^2-4}{x}$$
Or, pour $x>0$, on a $2x^2-4 \geqslant 0 \iff 2x^2 \geqslant 4 \iff x^2 \geqslant 2 \iff x \geqslant \sqrt{2}$. On en déduit le tableau de signe de $g'(x)$, ainsi que le tableau de variations de g :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$2x^2-4$		$-$	0	$+$	
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	$2(1-\ln(2))$	$\nearrow$	

En effet,
$$g(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 4\ln(\sqrt{2}) = 2 - 2\ln(2) = 2(1-\ln(2))$$
D'après le tableau de variations ci-dessus, la fonction g admet bien un minimum en $\sqrt{2}$ égal à $2(1-\ln(2))$.
2. On a $2<e$ donc par croissance de la fonction logarithme, $\ln(2) < \ln(e) = 1$. Ainsi, $2(1-\ln(2) > 0$. Le minimum de g est donc strictement positif donc pour tout x de $]0;+\infty[$, on a $g(x)>0$.
3. On a :
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 0^+} 1+\ln(x) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x & = & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par quotient}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\ln(x)}{x} = -\infty\end{array} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{4} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par somme}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{4} + \dfrac{1+\ln(x)}{x} = -\infty\end{array}$$
Ainsi,
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$
La courbe $\mathcal{C}$ admet donc une asymptote verticale en 0.
4. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$. Par ailleurs, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$. Ainsi,
$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4} & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0^+ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} & = & 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par somme}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x} = +\infty\end{array}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

5. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$f(x) - y = \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x} - \frac{x}{4} = \frac{1+\ln(x)}{x}$$

Et on a vu à la question précédente que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = 0$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$ et la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{4}$ est bien asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

6. Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et (D), il nous faut étudier le signe de $f(x) - y$ en fonction de x. On a vu à la question précédente que, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f(x) - y = \frac{1+\ln(x)}{x}$$

Soit $x \in]0;+\infty[$. On a :

$$1+\ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff x \geqslant e^{-1} = \frac{1}{e}$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$1+\ln(x)$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)-y$		$-$	0	$+$	

Ainsi,

- sur $\left]0;\frac{1}{e}\right]$, $\mathcal{C}$ est en dessous de (D)
- sur $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$, $\mathcal{C}$ est au dessus de (D).

En particulier, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite (D) se coupent en un point A donc l'abscisse est $\frac{1}{e}$ et l'ordonnée est $\frac{\frac{1}{e}}{4} = \frac{1}{4e}$.

7. Posons $u : x \mapsto 1+\ln(x)$ et $v : x \mapsto x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0;+\infty$ et v ne s'annule pas sur $]0;+\infty$. Ainsi, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme, et quotient, de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$, on a $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} + \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{x}\times x - (1+\ln(x))\times 1}{x^2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1-1-\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{4} - \frac{\ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 4\ln(x)}{4x^2} = \frac{g(x)}{4x^2} \end{aligned}$$

Or, on a déjà étudié le signe de g à la question **2**.
On en déduit le tableau de signe de f' ainsi que le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

8. (a) Posons $u : x \mapsto x^2 - 4\ln(x)$ et $v : x \mapsto 4x^2$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0;+\infty$ et v ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$. Ainsi, f' est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$, on a $u'(x) = 2x - \dfrac{4}{x}$ et $v'(x) = 8x$. On en déduit, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{\left(2x - \frac{4}{x}\right) \times 4x^2 - \left(x^2 - 4\ln(x)\right) \times 8x}{(4x^2)^2} \\ &= \frac{8x^3 - 16x - 8x^3 + 32x\ln(x)}{16x^4} = \frac{32x\ln(x) - 16x}{16x^4} \\ &= \frac{16x(2\ln(x) - 1)}{16x^4} = \frac{2\ln(x) - 1}{x^3} \end{aligned}$$

(b) Soit $x \in]0;+\infty[$. On a :

$$2\ln(x) - 1 \geqslant 0 \iff 2\ln(x) \geqslant 1 \iff \ln(x) \geqslant \frac{1}{2} \iff x \geqslant e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
x^3		$+$		$+$	
$2\ln(x) - 1$		$-$	0	$+$	
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi,

- f est concave sur $]0; \sqrt{\mathrm{e}}]$
- f est convexe sur $[\sqrt{\mathrm{e}}; +\infty[$

La courbe $\mathcal{C}$ possède donc un point d'inflexion dont l'abscisse est $\sqrt{e}$ et l'ordonnée $f(\sqrt{\mathrm{e}})$.

9. On obtient l'allure de courbe suivante :