4 | Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

> Entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe.
>
> Paul Painlevé, mathématicien (1863-1933)

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, seuls les nombres positifs ont une racine carrée, puisque tous les carrés sont positifs et certaines équations du second degré (comme par exemple $2x^2 + x + 2 = 0$) n'ont pas de solution.

Au XVIème siècle est née l'idée, sous l'impulsion de Girolamo Cardan, afin de pouvoir résoudre les équations du troisième degré, d'autoriser temporairement dans les calculs l'utilisation de racines carrées de nombres négatifs. Cette approche a depuis été raffinée et formalisée jusqu'à obtenir ce qu'on appelle aujourd'hui les **nombres complexes**.

Le principe fondamental est d'autoriser l'usage d'un nouveau nombre, **non-réel**, noté i, dont le carré est -1. Les calculs impliquant des i se font comme dans l'ensemble des réels, à l'exception suivante : la seule façon de se « débarrasser » d'un i est d'utiliser la règle $i^2 = -1$.

Comme vous le verrez, l'usage de ces nombres complexes permet d'obtenir des racines carrées de tous les nombres réels (et même complexes), de trouver des solutions à toutes les équations du second degré, de résoudre des problèmes de géométrie, de modéliser les interactions de certains composants électriques, et d'autres choses encore...

I – Définitions algébrique et géométrique de $\mathbb{C}$

1 – Définition de $\mathbb{C}$

Définition 4.1 – L'ensemble $\mathbb{C}$ des **nombres complexes** est l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme $z = a + ib$, avec a et $b \in \mathbb{R}$, muni des opérations d'addition et de multiplication définies par

- addition : $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$,
- multiplication : $(a+ib)\times(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$.

En particulier, on a

$$i^2 = -1.$$

Définition 4.2 – Si $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels, alors a et b sont appelés respectivement la **partie réelle** et la **partie imaginaire** de z. On les note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. L'écriture $z = a + ib$ d'un nombre complexe, où a et b sont deux nombres réels, est appelée **la forme algébrique** de z.

Exemple 4.3 – Le nombre complexe $z = 8 - 3i$ est écrit sous forme algébrique.
Sa partie réelle est 8 et sa partie imaginaire est -3.

Les calculs dans $\mathbb{C}$ s'effectuent exactement comme dans $\mathbb{R}$ en remplaçant chaque occurrence de i^2 par -1.

Exemple 4.4 – Soient $z_1 = 2 - 5i$ et $z_2 = 1 + 3i$. Mettre sous forme algébrique les nombres $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.

$$z_1 + z_2 = (2-5i)+(1+3i) = (2+1)+(-5+3)i = 3+(-2)i.$$

$$z_1 z_2 = (2-5i)(1+3i) = 2+6i-5i-15i^2 = 2+i-15(-1) = 17+i.$$

ATTENTION ! La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel. Par exemple $\mathrm{Im}(3+5i) = 5$.

Remarque 4.5 – L'ensemble des nombres complexes de la forme $a+0i$ est naturellement identifié à $\mathbb{R}$. Un nombre réel est donc aussi un nombre complexe.

Définition 4.6 – Les nombres complexes de la forme ib où $b \in \mathbb{R}$ sont appelés les **imaginaires purs**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Exemple 4.7 – Soit $a \in \mathbb{R}$ et $z = a+2i$.
Déterminer a pour que z^2 soit un imaginaire pur.
$z^2 = (a+2i)^2 = a^2 + 4ai + (2i)^2 = a^2 - 4 + 4ai$.
z^2 est un imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire si et seulement si $a^2 - 4 = 0$.
Ainsi, les valeurs de a telles que z^2 est un imaginaire pur sont -2 et 2.

ATTENTION ! Il est impossible d'établir un ordre sur $\mathbb{C}$ qui prolonge l'ordre sur $\mathbb{R}$ et qui obéisse aux mêmes règles. Il ne faut donc **JAMAIS** écrire une inégalité entre nombres complexes (sauf si ce sont des nombres réels).

Proposition 4.8

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : pour tous nombres complexes z et z',

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z'). \end{cases}$$

Exemple 4.9 – Résoudre l'équation $Z^2 = -3+4i$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

On procède par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $Z = x+iy \in \mathbb{C}$ tel que $Z^2 = -3+4i$. Alors, $(x+iy)^2 = -3+4i$, d'où $x^2 - y^2 + 2ixy = -3+4i$. Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient $x^2 - y^2 = -3$ et $2xy = 4$. La deuxième équation nous permet d'affirmer que x et y sont non nuls et on peut donc écrire $y = \frac{2}{x}$. En remplaçant dans la première équation, on obtient $x^2 - \frac{4}{x^2} = -3$, d'où en multipliant par $x^2 \neq 0$, on a $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.
C'est une équation bicarré. Calculons son discriminant :
$\Delta = 9 + 16 = 25$. On obtient deux solutions (pour x^2) possibles :
$x^2 = \frac{-3-5}{2} = -4$ (impossible) et $x^2 = \frac{-3+5}{2} = 1$.
Ainsi, $x = 1$ ou $x = -1$.
Si $x = 1$ alors $y = 2$ et si $x = -1$ alors $y = -2$.
On trouve deux solutions $Z = (1+2i)$ et $Z = -1-2i$.

Synthèse : On vérifie facilement que $(1+2i)^2 = (-1-2i)^2 = -3+4i$.

Conclusion : $\mathcal{S} = \{1+2i\,;\,-1-2i\}$.

ATTENTION ! Bien que i soit une racine carrée de -1, il est **STRICTEMENT INTERDIT** d'écrire $\sqrt{-1}$, sous peine de voir l'univers se déchirer et finir dans une infâme bouillie quantique.

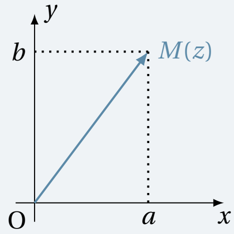
En effet, -1 a deux racines carrées, i et $-i$, et $\sqrt{-1}$ pourrait aussi bien désigner l'une que l'autre. Si cette notation était acceptée, on aurait des contradictions. En effet : $-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\times(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

2 – Le plan complexe

On considère le plan euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Définition 4.10 – On associe au nombre complexe $z = x + iy$ (où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) le point du plan M de coordonnées (x, y).

- z est **l'affixe du point** M,
- M est **l'image** de z.
- L'axe (Ox) est l'**axe des réels,**
- l'axe (Oy) est l'**axe des imaginaires purs.**
- Le nombre z est également **l'affixe du vecteur** $\overrightarrow{OM}$.
- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est **un vecteur image** de z.

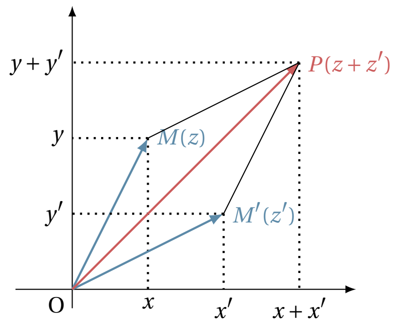


On appelle **plan complexe** cette représentation du plan euclidien par les nombres complexes.

Pour définir un point ou un vecteur à l'aide de son affixe, par exemple $2i$, on peut utiliser l'expression « soit le point $M(2i)$ » ou « soit le vecteur $\vec{u}(2i)$ ».

Remarque 4.11 – Le vecteur $\vec{e_1}$ a pour affixe 1 et le vecteur $\vec{e_2}$ a pour affixe i.

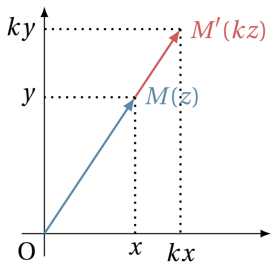
Interprétation géométrique de la somme de nombres complexes :
Soient M et M' deux points du plan d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On note P le point du plan tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.
Les coordonnées de P sont $(x + x', y + y')$ donc le point P et le vecteur $\overrightarrow{OP}$ ont pour affixe $z_P = z + z'$.



Interprétation géométrique de la multiplication d'un nombre complexe z par un réel k

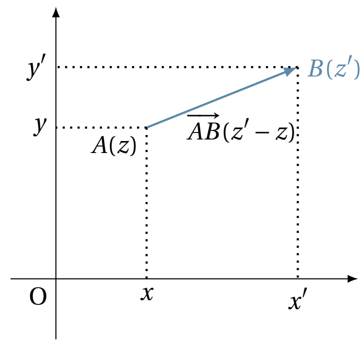
Le point $M'(kz)$ est l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre O et de rapport k, autrement dit M' est l'unique point tel que

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$



Affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

Si A et B sont deux points d'affixes respectives z et z', alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z' - z$.



Proposition 4.12

Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux point du plan complexe. Alors l'affixe du milieu de $[MM']$ est $\dfrac{z + z'}{2}$.

Démonstration. En notant $I(y)$ le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, donc $y - z = z' - y$, soit $y = \dfrac{z + z'}{2}$. □

Exemple 4.13 – Soient $ABCD$ un quadrilatère quelconque et z_A, z_B, z_C, z_D les affixes respectives des sommets. On note I, J, K, L les milieux des côtés $[AB], [BC], [CD], [DA]$.

Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$ et en déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.

D'après la proposition 4.12, on a que $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

De même, on a $z_J = \dfrac{z_B + z_C}{2}$, $z_K = \dfrac{z_C + z_D}{2}$ et $z_L = \dfrac{z_D + z_A}{2}$. On calcule les affixes des vecteurs :

$$z_{\overrightarrow{IJ}} = z_J - z_I = \frac{z_B + z_C}{2} - \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{z_C - z_A}{2}$$

$$z_{\overrightarrow{LK}} = z_K - z_L = \frac{z_C + z_D}{2} - \frac{z_D + z_A}{2} = \frac{z_C - z_A}{2}$$

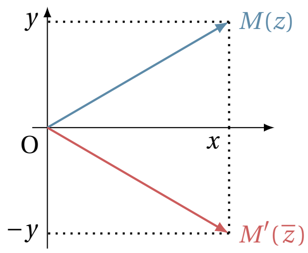
Donc $z_{\overrightarrow{IJ}} = z_{\overrightarrow{LK}}$. On en déduit que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ et donc que $IJKL$ est un parallélogramme.

3 – Conjugué d'un nombre complexe

Définition 4.14 – Le **conjugué** d'un nombre complexe $z = a + ib$, où a et b sont deux nombres réels, est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Interprétation géométrique :

Dans le plan, l'image M' de $\overline{z}$ est le symétrique par rapport à l'axe réel de l'image M de z.



Proposition 4.15 – Expression des parties réelle et imaginaire avec le conjugué

Pour tout nombre complexe z, $\quad \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \quad$ et $\quad \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Démonstration. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec a et b des réels. Alors :

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{a + ib + a - ib}{2} = \frac{2a}{2} = a = \Re e(z).$$
$$\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{a + ib - a + ib}{2i} = \frac{2ib}{2i} = b = \mathrm{Im}(z).$$

□

Proposition 4.16 – Caractérisations par le conjugué

Soit z un nombre complexe.

- z est un nombre réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
- z est un nombre imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Démonstration. D'après la proposition précédente :

$$z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff \frac{z - \overline{z}}{2i} = 0 \iff z = \overline{z}.$$

$$z \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0 \iff \frac{z + \overline{z}}{2} = 0 \iff z = -\overline{z}.$$

□

Proposition 4.17

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

Démonstration. $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + iab - iab + b^2 = a^2 + b^2$. □

Méthode 4.18 –
Le conjugué permet d'exprimer sous sa forme algébrique l'inverse d'un nombre complexe non nul $z = a + ib$, où a et b sont deux nombres réels :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Exemple 4.19 – Écrire le nombre complexe $z = \dfrac{1-i}{2+3i}$ sous forme algébrique.

$$z = \frac{1-i}{2+3i} = \frac{(1-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-2i-3i-3}{4+9} = \frac{-1}{13} + i\frac{-5}{13}.$$

Proposition 4.20 – Propriétés du conjugué

Pour tous nombres complexes z et z',

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\Im m(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.
3. $\overline{-z} = -\overline{z}$.
4. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
5. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.
6. Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Démonstration. Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ des complexes, avec a, b, a', b' des réels.

1. 2. 3. 4. Trivial

5.

$$\begin{aligned}\overline{z}\,\overline{z'} &= (a-ib)(a'-ib') = (aa'-bb') + i(-ab'-ba') \\ &= \overline{(aa'-bb') + i(ab'+ba')} = \overline{(a+ib)(a'+ib')} = \overline{zz'}\end{aligned}$$

6. D'après la méthode précédente, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$, donc $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{b}{a^2+b^2}$.
On a aussi $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{a}{a^2+(-b)^2} - i\dfrac{-b}{a^2+(-b)^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{b}{a^2+b^2}$
Le résultat sur le quotient s'obtient en combinant ceci au point 5.
7. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n : « $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ ».
Initialisation : $\overline{z^0} = 1 = \overline{z}^0$, donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose P_n. Alors

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} = \overline{z}^n \times \overline{z} = \overline{z}^{n+1}$$

Donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
Soit $n \in \mathbb{Z}_-$. Alors, en utilisant les résultats précédents (car $-n \in \mathbb{N}$), on a :

$$\overline{z^n} = \overline{\left(\frac{1}{z^{-n}}\right)} = \frac{1}{\overline{z^{-n}}} = \frac{1}{\overline{z}^{-n}} = \overline{z}^n$$

□

Exemple 4.21 – Calculer sous forme algébrique le conjugué de $z = \dfrac{(3+2i)(1-i)}{(1+2i)^2}$.

$\overline{z} = \overline{\left(\dfrac{(3+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})^2}\right)} = \dfrac{\overline{(3+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}}{\overline{(1+2\mathrm{i})^2}}$

$\overline{z} = \dfrac{(3-2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})^2} = \dfrac{3+2+\mathrm{i}(3-2)}{1-4-4\mathrm{i}} = \dfrac{5+\mathrm{i}}{-3-4\mathrm{i}}$

$\overline{z} = \dfrac{(5+\mathrm{i})(-3+4\mathrm{i})}{(-3)^2+(-4)^2} = \dfrac{-15-4+\mathrm{i}(20-3)}{25}$

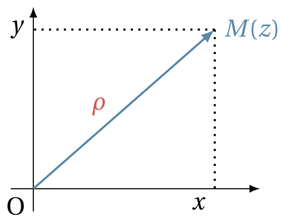
$\overline{z} = \dfrac{-19+17\mathrm{i}}{25} = -\dfrac{19}{25} + \dfrac{17}{25}\mathrm{i}$

4 – Module d'un nombre complexe

Soit M un point du plan d'affixe $z = x + iy$, où x et y sont deux nombres réels.

La distance OM est égale à $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Cette distance ρ est appelée le **module** de z.



Définition 4.22 – Le **module** du nombre complexe $z = a + ib$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$) est le nombre réel positif $|z|$, défini par

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Le module $|z|$ est la distance entre l'origine O et le point $M(z)$; c'est aussi la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

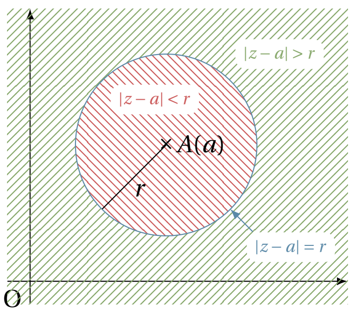
Remarque 4.23 – Si $z = a$ est un nombre réel, le module $|z|$ est la valeur absolue du nombre réel a.

Proposition 4.24 – Module et distance

1. Soient M et M' deux points du plan complexe d'affixes respectives z et z'. La distance MM' est

$$MM' = |z'-z| = |z-z'|.$$

2. Soit a un nombre complexe et r un nombre réel positif ou nul, l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-a| = r$ (resp.$|z-a| \leqslant r$, resp. $|z-a| < r$) est le cercle (resp. le disque fermé, resp. le disque ouvert) de centre $A(a)$ et de rayon r.



Démonstration. Écrivons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sous forme algébrique. Alors $z' - z = x' - x + i(y'-y)$ d'où

$$|z'-z| = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$$

On retrouve donc bien $|z'-z| = MM'$ la distance euclidienne de M à M'. □

Proposition 4.25 – Propriétés du module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et n un entier.

1. $|z| = 0$ si, et seulement si, $z = 0$.

2. $|zz'| = |z||z'|$ et donc, si $n \geqslant 0$, $|z^n| = |z|^n$.

3. $|\overline{z}| = |z|$.

4. $|z|^2 = z\overline{z}$.

5. Si $z \neq 0$, alors $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

6. Si z est non-nul et $n \leqslant 0$, alors $|z^n| = |z|^n$.

7. $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.

Démonstration. On note $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$.

1. est immédiat.
2. $|zz'| = \sqrt{zz'\overline{zz'}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{z'\overline{z'}} = |z|\,|z'|$.
   On effectue ensuite une récurrence pour montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $|z^n| = |z|^n$.
3. est immédiat.
4. découle de la définition.
5. Si $z \neq 0$, d'après 2. on a $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \left|\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}\right| = \left|\dfrac{1}{z\overline{z}}\right| \times |\overline{z}|$
   Comme $|\overline{z}| = |z|$ et que $z\overline{z}$ est réel positif, on a $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{z\overline{z}} \times |z| = \dfrac{1}{|z|^2} \times |z| = \dfrac{1}{|z|}$.
   On combine ceci à 2. pour obtenir le résultat sur le quotient.
6. On combine 2. et 5.
7. $0 \leqslant a^2 \leqslant a^2 + b^2$, donc $a \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ c'est à dire $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$.

□

ATTENTION ! Le module ne « conserve » pas les sommes !!!
Pour des complexes z et z', on a le plus souvent que $|z + z'| \neq |z| + |z'|$.

Proposition 4.26 – Caractérisation par le module

1. $z = |z|$ si, et seulement si, z est un nombre réel positif ou nul.
2. $\mathrm{Re}(z) = |z|$ si, et seulement si, z est un nombre réel positif ou nul.

Démonstration.

1. est immédiat.
2. Si $\Re(z) = |z|$, alors $a = \sqrt{a^2 + b^2}$, donc $a^2 = a^2 + b^2$ et b^2 c'est-à-dire $b = 0$ et z est réel.
   Comme $\mathrm{Re}(z) = |z| \geqslant 0$, z est bien positif.
   Réciproquement, si z est un réel positif, alors $|z| = z = \Re(z)$.

□

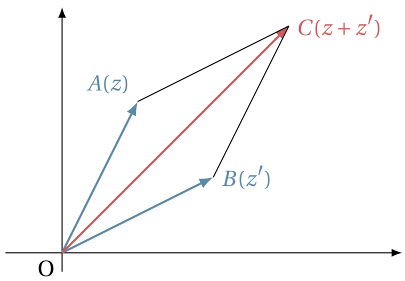
Proposition 4.27 – Inégalité triangulaire

Pour tous nombres complexes z et z', on a

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

avec égalité si et seulement si $z' = 0$ ou si il existe un réel positif ou nul k tel que $z = kz'$.

Géométriquement, cela signifie que la norme de la somme de deux vecteurs est inférieure à la somme des normes de ces deux vecteurs, avec égalité si et seulement si les vecteurs sont colinéaires et de même sens.



Démonstration. Soient z et z' des complexes. Alors :

$$\begin{aligned}
\left|z+z'\right|^2 &= (z+z')(\overline{z}+\overline{z'})\\
&= z\overline{z}+z'\overline{z'}+z\overline{z'}+z'\overline{z}\\
&= z\overline{z}+z'\overline{z'}+z\overline{z'}+\overline{\overline{z'}z}\\
&= |z|^2+\left|z'\right|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{z'})\\
&\leqslant |z|^2+\left|z'\right|^2+2\left|z\overline{z'}\right|.
\end{aligned}$$

De plus,

$$|z|^2+\left|z'\right|^2+2\left|z\overline{z'}\right| = |z|^2+\left|z'\right|^2+2|z|\left|z'\right| = (|z|+\left|z'\right|)^2.$$

Finalement,

$$\left|z+z'\right|^2 \leqslant (|z|+\left|z'\right|)^2.$$

Comme la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit $\left|z+z'\right| \leqslant |z|+\left|z'\right|$.

Cas d'égalité :

Le cas d'égalité se produit donc lorsque $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) = \left|z\overline{z'}\right|$, c'est à dire lorsque $z\overline{z'}$ est un réel positif. Dans ce cas, il existe un réel positif ou nul k' tel que $z\overline{z'} = k$.

Si $z' \neq 0$, on a $\overline{z} = \dfrac{k'}{z'\overline{z'}}\overline{z'}$ et donc $z = \dfrac{k'}{|z'|^2}z'$. En posant $k = \dfrac{k'}{|z'|^2}$, on a bien que k est un réel positif ou nul et $z = kz'$.

Réciproquement, si $z' = 0$, on a évidement le cas d'égalité. Si $z = kz'$ avec k un réel positif ou nul, en utilisant que $k \geqslant 0$, on a

$$\left|z+z'\right| = |z+kz| = |(1+k)z| = (1+k)|z| = |z|+k|z| = |z|+|kz| = |z|+\left|z'\right|.$$

□

En suivant le même schéma de preuve que dans $\mathbb{R}$, on peut en déduire le résultat suivant.

Corollaire 4.28 – Seconde inégalité triangulaire

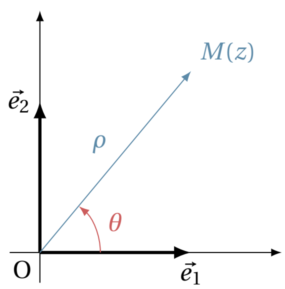
Pour tous nombres complexes z et z', on a

$$\big||z|-|z'|\big| \leqslant |z+z'|.$$

II – Forme trigonométrique des nombres complexes

1 – Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe

On peut repérer un point du plan par ses coordonnées cartésiennes (x,y), mais aussi par ses coordonnées polaires (ρ,θ). Si le point M est distinct de O, on peut choisir par exemple $\rho = OM$ et $\theta = (\vec{e_1},\overrightarrow{OM})$.



Définition 4.29 – Pour tout nombre complexe z **non nul**, on appelle **argument** de z toute mesure θ en radians de l'angle orienté $(\vec{e_1},\overrightarrow{OM})$ où M est le point d'affixe z dans le plan complexe.

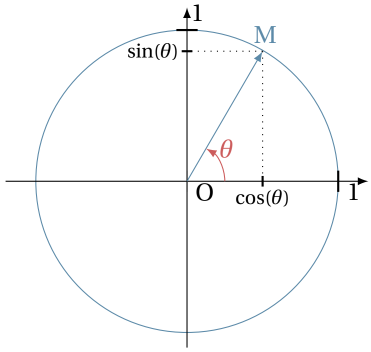
Remarque 4.30 –

1. On ne peut pas attribuer un argument au nombre 0 car il est impossible de définir l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{0})$.
2. L'argument d'un nombre complexe est défini à 2π près : si θ et θ' sont deux arguments de z, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$. On dit que θ et θ' sont *congrus modulo* 2π et l'on note $\theta' \equiv \theta[2\pi]$.

Notation : $\boxed{\text{Si } \theta \text{ est un argument du nombre complexe non nul } z\text{, on notera } \arg(z) \equiv \theta\ [2\pi].}$

Forme trigonométrique des nombres complexes de module 1

On suppose que $M(z)$ est situé sur le cercle unité, c'est-à-dire $|z| = 1$.



Les coordonnées de M sont alors $(\cos\theta, \sin\theta)$, où θ est un *argument* de z. On peut donc écrire $\boxed{z = \cos\theta + i\sin\theta.}$

Plus généralement, si z est un nombre complexe *non nul*, alors $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1 et de même argument que z. En notant θ un argument de z, on a $\dfrac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$ ce qui donne

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta).$$

Théorème 4.31 – Écriture trigonométrique

Tout nombre complexe non nul z s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

avec ρ est un réel strictement positif et $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\rho = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$. Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z. Le réel ρ est unique mais pas le réel θ.

Démonstration. L'existence a été vue ci-dessus. Reste à prouver l'unicité.
Si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ avec $\rho, \rho' \in \mathbb{R}^+$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.
En prenant le module de cette égalité, on obtient : $\rho = \rho'$. Il reste donc $\cos\theta + i\sin\theta = \cos\theta' + i\sin\theta'$. En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient que $\begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{cases}$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$. □

Méthode 4.32 –
Pour passer de la forme algébrique $z = a + ib$ d'un nombre complexe non nul à sa forme trigonométrique $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, on utilise les formules suivantes :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}, \qquad \text{ou si } a \neq 0, \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \tan\theta = \dfrac{b}{a} \\ \text{signe}(a) \text{ pour décider entre } \theta \text{ et } \theta + \pi \end{cases}$$

Exemple 4.33 –

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = 1 - i$.
2. Écrire z sous la forme algébrique sachant que $|z| = 2$ et $\arg(z) \equiv 2\pi/3\ [2\pi]$.

1. On note $\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. C'est le module de z. On cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$. $\theta = \dfrac{-\pi}{4}$ convient et est un argument de z.
2. $$\begin{aligned} z &= |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta) \\ z &= 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ z &= 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ z &= -1 + i\sqrt{3} \end{aligned}$$

2 – Notation exponentielle d'un nombre complexe de module 1

Définition 4.34 –

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- Le nombre $e^{i\theta}$ est donc l'unique nombre complexe de module 1 et d'argument θ.
- On note $\mathbb{U}$ **l'ensemble des nombres complexes de module 1**, géométriquement le cercle trigonométrique, qu'on peut paramétrer de la façon suivante :

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\right\} = \mathbb{U} = \left\{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\right\} = \left\{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi[\ \right\}.$$

Proposition 4.35 – Propriété de l'exponentielle complexe de module 1

Soient θ et φ des réels.

1. $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta} \times e^{i\varphi}$.
2. $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
3. $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}$.
4. $\forall n \in \mathbb{Z},\ e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$
5. $e^{i\theta} = 1 \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = 2k\pi$.
6. $e^{i\theta} = e^{i\varphi} \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi = \theta + 2k\pi$.

Démonstration.

1. Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\phi)} &= (\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)) \\ &= (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + i\cos\theta\sin\phi + i\sin\theta\cos\phi). \\ &= \cos\theta(\cos\phi + i\sin\phi) + i\sin\theta(i\sin\phi + \cos\phi) \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) \\ &= e^{i\theta}e^{i\phi}. \end{aligned}$$

2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}e^{-i\theta}} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{e^{i\theta}}.$$

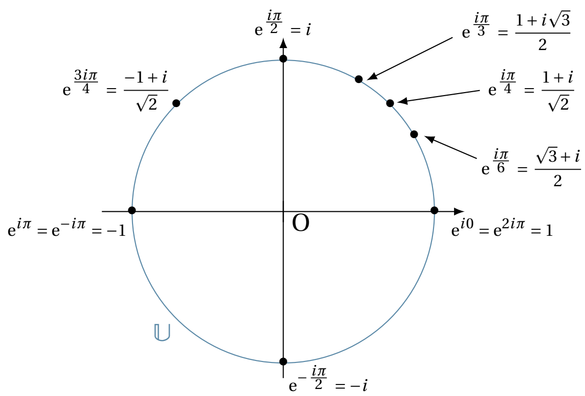
3. On combine 1. et 2.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, par récurrence. Init pour $n = 0$ évidente, Hérédité par 1.
   En prenant l'inverse, on obtient l'inverse grâce à 2.
5. Si $k \in \mathbb{Z}$, $e^{i2k\pi} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1$.
   Réciproquement, Si $e\,i\theta = (\cos\theta + i\sin\theta) = 1$, alors par identification des parties réelles réelles imaginaires, on obtient que $\begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases}$
6. Soient θ et φ des réels. Alors, par 3 puis 5, on a

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} \iff e^{i(\theta-\varphi)} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta - \varphi = 2k\pi$$

□

Remarque 4.36 –

- La relation $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}$ est équivalente aux formules d'addition du cosinus et du sinus par identification des parties réelles et imaginaires comme l'a montré la démonstration ci-dessus. Il sera beaucoup plus facile de retenir la relation avec les exponentielles (puisqu'a priori déjà connue!) et de redémontrer à partir de celle-ci les formules d'addition du cosinus et du sinus.
- Il est important d'avoir une bonne visibilité des différents points du cercle trigonométrique en terme d'exponentielle imaginaire, comme sur le schéma ci-contre :



Proposition 4.37 – Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\quad \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad$ et $\quad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$

Démonstration. On applique la proposition 4.15 à $e^{i\theta}$ en utilisant que $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$. □

Les formules d'Euler permettent de linéariser des polynômes trigonométriques (cf chapitre ultérieur).

Proposition 4.38 – Formule de De Moivre

Pour tout entier n et tout réel θ, on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Démonstration. C'est la traduction immédiate de la formule $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$. □

Proposition 4.39 – Écriture exponentielle

Tout nombre complexe z non nul s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = \rho\, e^{i\theta}$$

où ρ est un réel strictement positif et $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\rho = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$. Un tel réel ρ est unique mais pas le réel θ. Plus précisément, l'équivalence suivante est vraie pour tous réels $\rho > 0$, $\rho' > 0$, θ et θ' :

$$\rho\, e^{i\theta} = \rho'\, e^{i\theta'} \iff \begin{cases} \rho = \rho' \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi \end{cases}$$

Démonstration. Traduction de l'écriture d'un nombre complexe sous forme trigonométrique. □

Exemple 4.40 – Calculer $(1+i)^7$.

On pose $z = 1 + i$. Soient $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = \rho\, e^{i\theta}$. Alors, on a

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ et } \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ convient.}$$

Donc $(1+i)^7 = \sqrt{2}^7 \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^7 = 8\sqrt{2}\, e^{\frac{7i\pi}{4}}$.

On peut traduire les propriétés de l'exponentielle complexe à l'aide de l'argument. On obtient les propriétés suivantes.

Corollaire 4.41 – Propriétés de l'argument

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ'. On a

1. $\arg(zz') \equiv \theta + \theta'\ [2\pi]$.
2. $\arg(1/z) \equiv -\theta\ [2\pi]$, $\quad \arg(\overline{z}) \equiv -\theta\ [2\pi]$ et $\arg(-z) \equiv \theta + \pi\ [2\pi]$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\arg(z^n) \equiv n\theta\ [2\pi]$.
4. $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z' = \lambda z$.

La notation exponentielle est particulièrement adaptée pour les calculs impliquant des produits ou des quotients.

Toutefois, la méthode de factorisation par l'angle moitié permet d'étudier également les sommes (ou différences) de complexes de module 1 .

3 – Factorisation par l'angle moitié

La technique de l'angle moitié consiste à écrire les expressions $e^{ix}+e^{iy}$ et $e^{ix}-e^{iy}$ sous forme trigonométrique. On s'en sert souvent pour factoriser des expressions en cosinus et sinus. L'idée est simple. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$e^{ix}+e^{iy} = \boxed{e^{\frac{i(x+y)}{2}}}\left(e^{\frac{i(x-y)}{2}}+e^{-\frac{i(x-y)}{2}}\right) = 2\,e^{\frac{i(x+y)}{2}}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Mise en facteur de l' **ANGLE MOITIÉ** $\dfrac{x+y}{2}$

En réalité, le résultat obtenu n'est pas forcément la forme trigonométrique de $e^{ix}+e^{iy}$ car le cosinus obtenu peut être négatif, mais on n'en est pas loin. La technique s'adapte bien sûr au cas des expressions $e^{ix}-e^{iy}$.

Très souvent y est nul et le calcul prend la forme suivante : $e^{ix}+1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}+e^{-\frac{ix}{2}}\right) = 2\,e^{\frac{ix}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Le programme vous épargne l'apprentissage par cœur de quatre nouvelles formules, mais exige que vous sachiez les retrouver **RAPIDEMENT** .

Théorème 4.42 – Quatre formules de trigo

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Démonstration.

$$\sin(x)+\sin(y) = \mathrm{Im}\left(e^{ix}+e^{iy}\right) \underset{\text{moitié}}{\overset{\text{Angle}}{=}} \mathrm{Im}\left(2\,e^{\frac{i(x+y)}{2}}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

□

La technique de l'angle moitié sera également beaucoup utilisée pour simplifier des sommes de cosinus et de sinus (cf chapitre ultérieur).

4 – L'exponentielle complexe

Définition 4.43 – Soit $z = x+iy$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique. On appelle **exponentielle** de z le nombre complexe $e^z = e^x e^{iy}$.

Exemple 4.44 – $e^{1+i\pi} = e\times e^{i\pi} = -e$ et $e^{2+\frac{i\pi}{4}} = e^2 e^{\frac{i\pi}{4}} = e^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{e^2}{\sqrt{2}}+\frac{ie^2}{\sqrt{2}}$.

La fonction $\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$ prolonge la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec la notation e^{ix} introduite précédemment.

Proposition 4.45

Soient z, z' deux nombres complexes. On a

1. $e^z \neq 0$.
2. $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$. En particulier, e^{-z} est l'inverse de e^z.
3. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\arg(e^z) = \mathrm{Im}(z)\ [2\pi]$.
4. Tout nombre complexe non nul a est l'image par l'exponentielle complexe d'au moins un nombre complexe z_0. Ses antécédents sont alors les nombres complexes $z_0+2ik\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Démonstration. On écrit z et z' sous forme algébrique : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$.

3) On a $|e^z| = |e^x||e^{iy}| = e^x = e^{\mathrm{Re}(z)}$.

   En particulier, $e^z = e^x e^{iy} = |e^z| e^{iy}$ donc $\arg(e^z) = y = \mathrm{Im}(z)$.

1) On a $e^z = 0$ si et seulement si $|e^z| = 0$. Or $|e^z| = e^x \neq 0$.

2) On a $e^{z+z'} = e^{x+x'} e^{i(y+y')} = e^x e^{x'} e^{iy} e^{iy'} = e^x e^{iy} e^{x'} e^{iy'} = e^z e^{z'}$.

4) Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On a

$$e^z = a \iff \begin{cases} |e^z| = |a| \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = \arg(a) + 2k\pi \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} e^x = |a| \\ \exists k \in \mathbb{Z}, y = \arg(a) + 2k\pi \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \ln(|a|) \\ \exists k \in \mathbb{Z}, y = \arg(a) + 2k\pi \end{cases}$$

   Le nombre complexe $z_0 = \ln|a| + i\arg(a)$ (qui est bien défini car $a \neq 0$) est donc bien un antécédent de a par $z \longmapsto e^z$. Les autres antécédents de a par $z \longmapsto e^z$ sont les nombres complexes de la forme $z_k = z_0 + 2ik\pi$,avec $k \in \mathbb{Z}$.

□

L'exemple qui suit suggère qu'il est plus compliqué de définir un logarithme complexe que l'exponentielle complexe car la $2i\pi$-périodicité de $z \longmapsto e^z$ accorde une infinité de logarithmes à tout nombre complexe non nul.

Exemple 4.46 – On souhaite résoudre l'équation $e^z = 1 + i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Il s'agit essentiellement d'identifier des formes trigonométriques. Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique :

$$e^z = 1 + i \iff e^x = |1+i| = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad y \text{ est un argument de } 1+i$$
$$\iff \quad x = \frac{\ln 2}{2} \text{ et } y \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \iff \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad z = \frac{\ln 2}{2} + i\frac{\pi}{4} + 2ik\pi$$

III – Équations du second degré à coefficients complexes

1 – Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 4.47 – Soit Δ un nombre complexe. On appelle **racine carrée** de Δ tout nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Exemple 4.48 –
$e^{i\frac{\pi}{4}}$ est une racine carrée de i, car $(e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
$2i$ et $-2i$ sont deux racines carrées de -4 car $(2i)^2 = (-2i)^2 = -4$.
Le nombre 0 est la seule racine carrée de 0.

Proposition 4.49 – Racines carrées d'un complexe sous forme trigonométrique

Tout nombre complexe <u>non nul</u> possède deux racines carrées distinctes dans $\mathbb{C}$ et ces deux racines carrées sont opposées l'une de l'autre.
Si $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, les racines carrées de $\rho e^{i\theta}$ sont $\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$

Démonstration. Soit z un nombre complexe non-nul. Soient $\rho > 0$ et θ réels tels que $z = \rho e^{i\theta}$. On sait que 0 n'est pas une racine carrée de z. Soit $\delta = re^{it}$ non nul avec des réels r (strictement positif) et t. Alors :

$$\begin{aligned}
\delta \text{ est une racine carrée de } z &\iff \delta^2 = z \\
&\iff r^2 e^{i2t} = \rho e^{i\theta} \\
&\iff \begin{cases} \rho = r^2 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = 2t + 2k\pi \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r = \sqrt{\rho} \text{ car } r \text{ positif} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ t = \dfrac{\theta}{2} + k\pi \end{cases} \\
&\iff \delta = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ Ou } \delta = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2} + \pi} \\
&\iff \delta = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ Ou } \delta = -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

□

Exemple 4.50 – Quelles sont les racines de $-2i$?
$-2i = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$, donc les deux racines de $-2i$ sont $\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$ et $-\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$.

$$\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -1 + i$$

Les racines de $-2i$ sont donc $1 - i$ et $i - 1$.

Il n'est pas toujours possible de reconnaître un argument d'un nombre complexe. D'autre part, on peut désirer déterminer directement les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique :

Méthode 4.51 –
Soit $\Delta = \alpha + i\beta$ un nombre complexe non nul, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $\delta = a + ib$ un nombre complexe, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} \delta^2 = \Delta \\ |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases} \iff \begin{cases} (a^2 - b^2) + 2ab\, i = \alpha + i\beta \\ a^2 + b^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = \alpha & (1) \\ 2ab = \beta & (2) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & (3) \end{cases}$$

En additionnant les équations (1) et (3), on obtient a^2 et donc deux valeurs opposées pour a. Pour chacune de ces valeurs, on détermine b avec l'équation (2). On trouve alors les deux racines carrées de Δ sous forme algébrique.

Exemple 4.52 – Déterminer les racines carrées de $\Delta = -3 - 4i$. On pose $\delta = a + ib$ un nombre complexe avec a et b réels. D'après le paragraphe précédent

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \end{cases}$$

Donc $2a^2 = 2$, c'est à dire $a = 1$ ou $a = -1$.
Si $a = 1$, alors $b = -2$ et $\delta = 1 - 2i$.
Si $a = -1$, alors $b = 2$ et $\delta = -1 + 2i$.
Comme Δ a exactement deux racines carrées distinctes et que l'on montré que seuls $1 - 2i$ et $-1 + 2i$ peuvent être des racines de Δ, on a bien trouvé les deux racines de Δ

ATTENTION ! La notation $\sqrt{\ }$ est réservée à la fonction racine carrée associant à chaque réel **positif ou nul** son unique racine carrée positive.
IL EST DONC STRICTEMENT INTERDIT D'UTILISER LA NOTATION $\sqrt{x}$ SI x N'EST PAS UN RÉEL POSITIF OU NUL.

2 – Détermination des racines d'un trinôme du second degré

On cherche à résoudre l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue complexe z où $a\in\mathbb{C}^*$ et $(b,c)\in\mathbb{C}^2$.

Comme dans le cas des coefficients réels, on commence par mettre le trinôme sous forme canonique :

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad az^2+bz+c=a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)=a\left\{\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}.$$

Ainsi,

$$az^2+bz+c=0\iff\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0\iff\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

où l'on a posé $\Delta=b^2-4ac$.

Si $\Delta=0$, l'équation admet une seule solution double $z=-b/(2a)$.

Si $\Delta\neq 0$, il existe deux nombres complexes opposés δ et $-\delta$ dont le carré est Δ (c.f. paragraphe précédent) et l'on a

$$z+\frac{b}{2a}=\frac{\delta}{2a}\qquad\text{ou}\qquad z+\frac{b}{2a}=-\frac{\delta}{2a}.$$

L'équation possède donc dans ce cas deux solutions complexes distinctes

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a}\qquad\text{et}\qquad z_2=\frac{-b-\delta}{2a}.$$

Théorème 4.53 – Racines d'un trinôme du second degré

Soient $a\in\mathbb{C}^*$, $b,c\in\mathbb{C}$ et l'équation du second degré $az^2+bz+c=0$ d'inconnue complexe z. On note $\Delta=b^2-4ac$ **le discriminant** de cette équation.

1. Si $\Delta=0$, alors (E) admet une unique solution (dite « solution double ») $z_0=\dfrac{-b}{2a}$. De plus, on a :
$$\forall z\in\mathbb{C},\qquad az^2+bz+c=a(z-z_0)^2.$$
2. Si $\Delta\neq 0$, (E) admet exactement deux solutions, $z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ. Dans ce cas, on peut factoriser le trinôme sous la forme :
$$\forall z\in\mathbb{C},\qquad az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2).$$

Exemple 4.54 – Résoudre l'équation $z^2-(1+3i)z+4+4i=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Commençons par calculer le discriminant Δ de cette équation :

$$\Delta=(1+3i)^2-4(4+4i)=1-9+6i-16-16i=-24-10i$$

On cherche à présent une racine carrée complexe de Δ. On cherche donc $\delta=a+ib\in\mathbb{C}$ tel que $\delta^2=\Delta$. En suivant la méthode 4.51, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases}a^2-b^2=-24\\ 2ab=-10\\ a^2+b^2=\sqrt{24^2+10^2}=\sqrt{676}=26\end{cases}$$

On en déduit $2a^2=2$ et $2b^2=50$ d'où $a=\pm1$ et $b=\pm5$. Or, $2ab=-10$ donc a et b sont de signes opposés. Ainsi, les deux racines carrées complexes de Δ sont $1-5i$ et $-1+5i$.

Dès lors, les solutions de l'équation sont :

$$z_1=\frac{1+3i+1-5i}{2}=1-i\qquad\text{et}\qquad z_2=\frac{1+3i-1+5i}{2}=4i$$

Un calcul rapide permet de vérifier facilement que z_1 et z_2 sont effectivement solution de notre équation.

Proposition 4.55 – Trinôme à coefficients réels.
Soient $a,\ b$ et c sont des nombres réels et z_0 un complexe.
Si z_0 est solution de l'équation $az^2+bz+c=0$, alors son conjugué $\overline{z_0}$ l'est également.

Démonstration. Si z_0 est solution de l'équation $az^2+bz+c=0$. Alors,

$$\begin{aligned} a\overline{z_0}^2+b\overline{z_0}+c &= \overline{a}\overline{z_0^2}+\overline{b}\overline{z_0}+\overline{c} \\ &= \overline{az_0^2}+\overline{bz_0}+\overline{c} \\ &= \overline{az_0^2+bz_0+c} \\ &= \overline{0}=0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\overline{z_0}$ est une solution de l'équation $az^2+bz+c=0$. □

Exemple 4.56 – Résoudre l'équation $z^2-4z+13=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.
Le discriminant de cette équation vaut $\Delta=16-52=-36$. Les deux racines (complexes) de cette équation sont donc :

$$z_1=\frac{4-6i}{2}=2-3i \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{4+6i}{2}=2+3i$$

IV – Racines n-ièmes d'un nombre complexe

1 – Racines n-ièmes de l'unité

Définition 4.57 – Soit n un entier strictement positif. **Les racines n-ièmes de l'unité** sont les solutions complexes de l'équation $z^n=1$. L'ensemble de ces solutions est noté $\mathbb{U}_n$.

Le nombre 0 n'est pas une racine n−ième de l'unité. Soit $z=r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ où $\rho\in\,]0;+\infty[$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Alors

$$z^n=1 \iff (\rho\,\mathrm{e}^{i\theta})^n=1 \iff \rho^n\,\mathrm{e}^{in\theta}=1 \iff \begin{cases}\rho^n=1\\ \exists k\in\mathbb{Z},\ n\theta=2k\pi\end{cases} \iff \begin{cases}\rho=1\\ \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta=\dfrac{2k\pi}{n}.\end{cases}$$

Ainsi, $\mathbb{U}_n=\{\mathrm{e}^{2ik\pi/n};\ k\in\mathbb{Z}\}$.
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, en effectuant la division euclidienne de k par n, on a $k=qn+r$ avec $r\in[\![0,n-1]\!]$. Alors

$$\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}=\mathrm{e}^{2iq\pi+\frac{2ir\pi}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{2ir\pi}{n}}$$

On obtient ainsi n valeurs possibles (modulo 2π) pour l'angle θ, correspondant aux choix $k=0, k=1,\ldots,\ k=n-1$. En effet, à partir de $k=n$, on retrouve (modulo 2π) les solutions déjà déterminées. Les racines n-ièmes de l'unité sont donc

$$\omega_0=1,\qquad \omega_1=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}},\qquad \omega_2=\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{n}},\ \ldots\qquad \omega_k=\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}},\ \ldots\qquad \omega_{n-1}=\mathrm{e}^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}.$$

Comme ces nombres complexes ont des arguments qui sont entre 0 et 2π et tous différents, ils sont distincts.
On peut résumer ces résultats dans le théorème suivant.

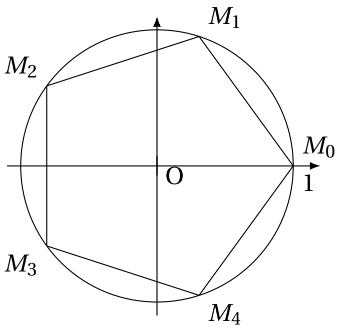
Théorème 4.58 – Racines n-ièmes de l'unité
Soit un entier $n\geqslant 1$ un nombre entier. Alors l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est

$$\mathbb{U}_n=\left\{\mathrm{e}^{2ik\pi/n};\ k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\mathrm{e}^{2ik\pi/n};\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$$

Cet ensemble contient n éléments distincts.

Remarque 4.59 – En particulier :
- ▷ Les racines n-ièmes de l'unité sont de module 1. Donc $\mathbb{U}_n\subset\mathbb{U}$.
- ▷ Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, le nombre $\mathrm{e}^{2ik\pi/n}$ est une racine n-ième de l'unité.
- ▷ Si $z\in\mathbb{U}_n$, alors il existe un entier $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ tel que $z=\mathrm{e}^{2ik\pi/n}$.

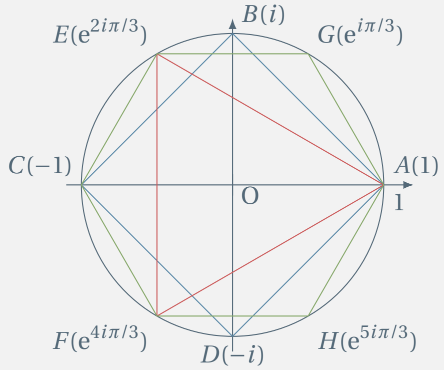
Interprétation géométrique : Si $n \geqslant 3$, les images des nombres complexes de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ dessinent dans le plan complexe un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle unité et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1.



Images des racines cinquièmes de l'unité.

Notation : On note généralement $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Exemple 4.60 – Écrire les racines carrées, cubiques, quatrièmes et sixièmes de l'unité et les représenter dans le plan complexe.
Les racines carrées de 1 sont 1 et -1.
Les racines cubiques de 1 sont 1, $\mathrm{e}^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $\mathrm{e}^{4i\frac{\pi}{3}}$.
Les racines quatrièmes de 1 sont 1, -1, i et $-i$.
Les racines sixièmes de l'unité sont 1, $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, $\mathrm{e}^{2i\frac{\pi}{3}}$, -1, $\mathrm{e}^{4i\frac{\pi}{3}}$ et $\mathrm{e}^{5i\frac{\pi}{3}}$



2 – Racines n-ièmes d'un nombre complexe quelconque

Définition 4.61 – Soit n un entier strictement positif et a un nombre complexe **Les racines n-ièmes de a** sont les solutions complexes de l'équation $z^n = a$.

Soit $a \in \mathbb{C}$. On pose $a = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On cherche $z = r\,\mathrm{e}^{it}$ (avec $r > 0$; $t \in \mathbb{R}$) tel que $z^n = a$.

$$z^n = a \iff (r\,\mathrm{e}^{it})^n = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta} \iff r^n\,\mathrm{e}^{int} = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}.$$

Donc z est une racine n-ième de a si et seulement si

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ nt = \theta + 2k\pi \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, t = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} = \dfrac{\theta}{n} + 2\pi\dfrac{k}{n}. \end{cases}$$

Ainsi, les racines n-ièmes de a sont les complexes de module $\sqrt[n]{\rho}$ et d'argument de la forme $\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Modulo 2π, cela donne donc n arguments différents (pour k allant de 0 à $n-1$).
Les racines n-ièmes de a sont donc

$$\omega_0 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}, \qquad \omega_1 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2\pi}{n}}, \ldots \qquad \omega_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \ldots \qquad \omega_{n-1} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}}.$$

On a ainsi montré le théorème suivant.

Théorème 4.62 – Racines n-ièmes d'un complexe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a un complexe non-nul. On note $a = r\,\mathrm{e}^{it}$ avec $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. L'ensemble des racines n-ièmes de a est

$$\left\{ r^{1/n}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{t}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Tout nombre complexe non nul a possède **exactement** n racines n-ièmes distinctes.
Cet ensemble s'écrit également $\left\{\omega\,\mathrm{e}^{2ik\pi/n} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$, où ω est une racine n-ième de a particulière.

Remarque 4.63 – 0 possède une unique racine n-ième : 0

Exemple 4.64 – Déterminer les racines cubiques de $2+2i$.

$$2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2})^3\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Alors, l'ensemble des racines cubiques de $2+2i$ est :

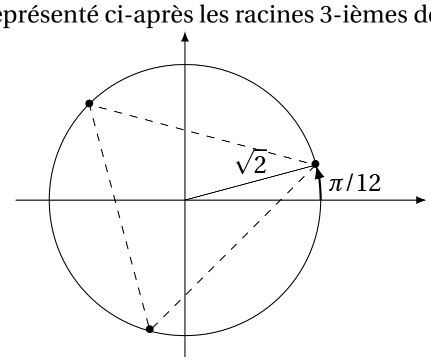
$$\left\{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3})}, \sqrt{2}\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3})}\right\}$$

Méthode 4.65 –
On peut aussi retenir du théorème que, pour déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe z, il suffit d'en trouver une (par exemple $\sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{\frac{\arg(z)}{n}}$), puis de multiplier celle-ci par les racines n-ièmes de l'unité différentes de 1 pour déterminer les autres.

Exemple 4.66 – Déterminer les racines cubiques de $z = (7+8i)^3$.
On a a déjà une racine cubique particulière de z, qui est $\omega = 7+8i$. L'ensemble des racines cubiques de z est donc : $\{\omega\,\mathrm{e}^{2ik\pi/3}; k \in \{0,1,2\}\}$, c'est à dire : $\left\{7+8i; (7+8i)\,\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}; (7+8i)\,\mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}}\right\}$.

Géométriquement, les images des racines n-ièmes d'un nombre complexe a dessinent dans le plan complexe un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $|a|^{1/n}$ et dont l'un des sommets est le point de coordonnées polaires $\left(|a|^{1/n}, \theta/n\right)$ où θ est un argument de a.

On a représenté ci-après les racines 3-ièmes de $2+2i$:



V – Nombres complexes et géométrie plane

1 – Angle, alignement, orthogonalité

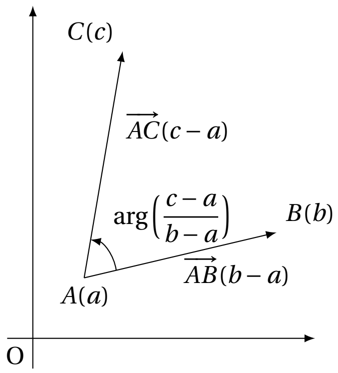
Proposition 4.67

Soient A, B, C trois points d'affixes respectives a, b, c et tels que $A \neq B$ et $B \neq C$:

1. Un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{AC}{AB} = k \\ \text{mes}((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})) \equiv \theta\,[2\pi] \end{array}\right. \iff \frac{c-a}{b-a} = ke^{i\theta}.$$

Démonstration.



1. D'après la relation de Chasles,

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_1}) + (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB})\,.$$

L'affixe de $\overrightarrow{AC}$ est $c-a$, l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b-a$. On note θ un argument de $c-a$ et θ' un argument de $b-a$.
Alors : $\text{mes}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC}) \equiv \theta\,[2\pi]$ et $\text{mes}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta'\,[2\pi]$ donc $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \theta - \theta'\,[2\pi]$.
Or $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \theta - \theta'\,[2\pi]$, donc un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$ est une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\frac{c-a}{b-a} = ke^{i\theta} \iff \left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = k \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{|c-a|}{|b-a|} = k \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{AC}{AB} = k \\ \text{mes}((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})) \equiv \theta\,[2\pi] \end{array}\right.$$

□

Corollaire 4.68

Soient A, B, C trois points du plan, A et B étant distincts, d'affixes respectives a, b et c. Alors,

1. A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un réel,
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un imaginaire pur.

Démonstration.

- Si $A = C$, alors $\dfrac{c-a}{b-a} = 0$ donc $\dfrac{c-a}{b-a}$ est à la fois un réel et un imaginaire pur. De plus, A, B et C sont forcements alignés et comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$, on a que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
- On suppose maintenant que $A \neq C$. Alors :

$$\begin{aligned} \text{"}A, B \text{ et } C \text{ sont alignés"} &\iff \left(\text{mes}((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})) \equiv 0\,[2\pi] \text{ Ou } \text{mes}((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})) \equiv \pi\,[2\pi]\right) \\ &\iff \left(\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0\,[2\pi] \text{ Ou } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \pi\,[2\pi]\right) \\ &\iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

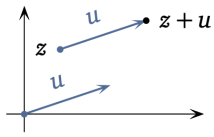
$$\begin{aligned} \text{"}A, B \text{ et } C \text{ sont orthogonaux"} &\iff \left(\text{mes}((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \text{ Ou } \text{mes}((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]\right) \\ &\iff \left(\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \text{ Ou } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{-\pi}{2}\,[2\pi]\right) \\ &\iff \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

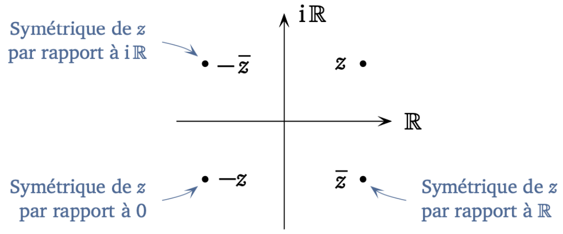
□

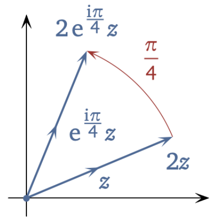
2 – Transformations du plan

Les figures ci-dessous vous rappellent :

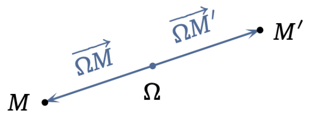
- que l'addition de deux nombres complexes s'interprète géométriquement en termes de translation,
- deux ou trois choses concernant les symétries les plus simples,
- que le produit de deux nombres complexes s'interprète géométriquement en termes d'homothétie et de rotation.



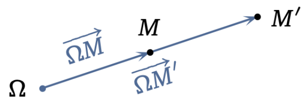




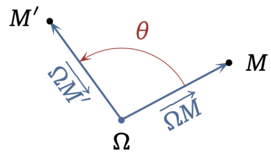
Voyons maintenant ce qu'il en est de transformations plus compliquées. Dans chacun des cas ci-dessous, un point Ω d'affixe ω est fixé et on effectue une transformation sur un point M d'affixe z. L'image de M par cette transformation est un point M' d'affixe z'.



Symétrie centrale par rapport à Ω :
$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$,
donc $z' - \omega = -(z-\omega)$
i.e. $z' = 2\omega - z$.



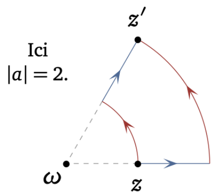
Homothétie de centre Ω et de rapport λ (ici $\lambda = 2$) :
$\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\,\overrightarrow{\Omega M}$,
donc $z' - \omega = \lambda\,(z-\omega)$
i.e. $z' = \omega + \lambda\,(z-\omega)$.



Rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ :
$\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$
donc $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$
i.e. $z' = \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$.

Les transformations usuelles précédentes s'avèrent finalement toutes de la forme $z \longmapsto az+b$ ou $z \longmapsto a\overline{z}+b$ pour certains $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Réciproquement, de quelle manière une transformation quelconque $z \longmapsto az+b$ s'interprète-t-elle géométriquement ? Fixons $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ et notons f la transformation $z \longmapsto az+b$ et α un argument de a.

- Si $a = 1$, f est simplement la translation de vecteur b.
- Si $a \neq 1$, remarquons d'abord que f possède un et un seul point fixe car l'équation $f(\omega) = \omega$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$ admet $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ pour seule et unique solution. Exprimons maintenant f sous une forme sympathique grâce à ce point fixe. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, en posant $z' = f(z)$:



$$z' - \omega = (az+b) - (a\omega+b) = a\,(z-\omega) \quad = \quad \underbrace{|a| \times \underbrace{e^{i\alpha}(z-\omega)}_{\text{Rotation de centre } \omega \text{ et d'angle de mesure } \alpha}}_{\text{Homothétie de centre } \omega \text{ et de rapport } |a|} \quad = \quad \underbrace{e^{i\alpha} \times \underbrace{|a|\,(z-\omega)}_{\text{Homothétie de centre } \omega \text{ et de rapport } |a|}}_{\text{Rotation de centre } \omega \text{ et d'angle de mesure } \alpha}.$$

Conclusion : f est la composée d'une homothétie et d'une rotation de mêmes centres et l'ordre dans lequel on compose ces deux transformations ne compte pas. On dit que f est la similitude directe de centre ω, de rapport $|a|$ et d'angle de mesure α. Trois cas particuliers méritent d'être bien identifiés à l'issue de cette enquête

- si $a = 1$, f est la translation de vecteur b,
- si $|a| = 1$ mais $a \neq 1$, f est une rotation d'angle de mesure α,
- si $a \in \mathbb{R}$, f est une homothétie de rapport $|a|$.

Exemple 4.69 – La fonction $z \overset{f}{\longmapsto} 2iz+1$ est la similitude directe de centre $\dfrac{1+2i}{5}$, de rapport 2 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration. Le coefficient $2i = 2\,e^{\frac{i\pi}{2}}$ est différent de 1 , donc f n'est pas une translation, mais une similitude directe de rapport 2 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$. Son centre est aussi son unique point fixe et vaut $\dfrac{1}{1-2i} = \dfrac{1+2i}{5}$. □