3 | Trigonométrie

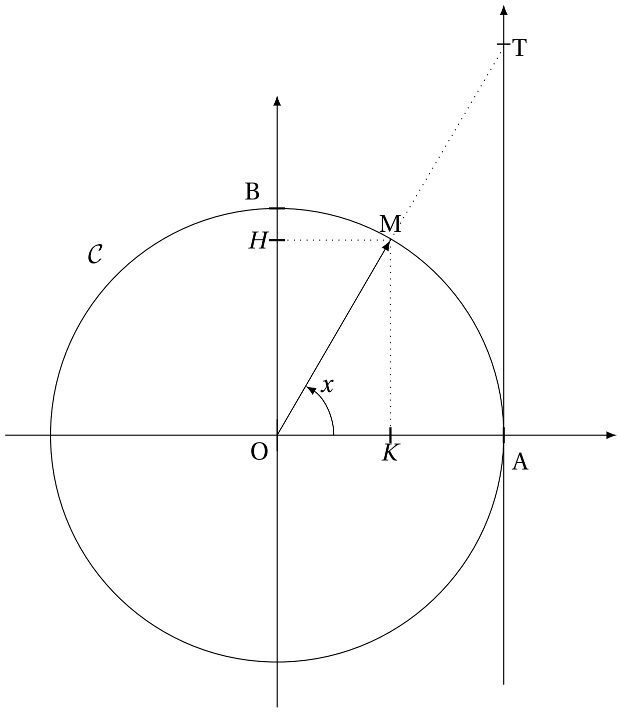
> Do not worry about your difficulties in mathematics. I can assure you that mine are still greater.
>
> Albert Einstein (1879-1955), physicien.

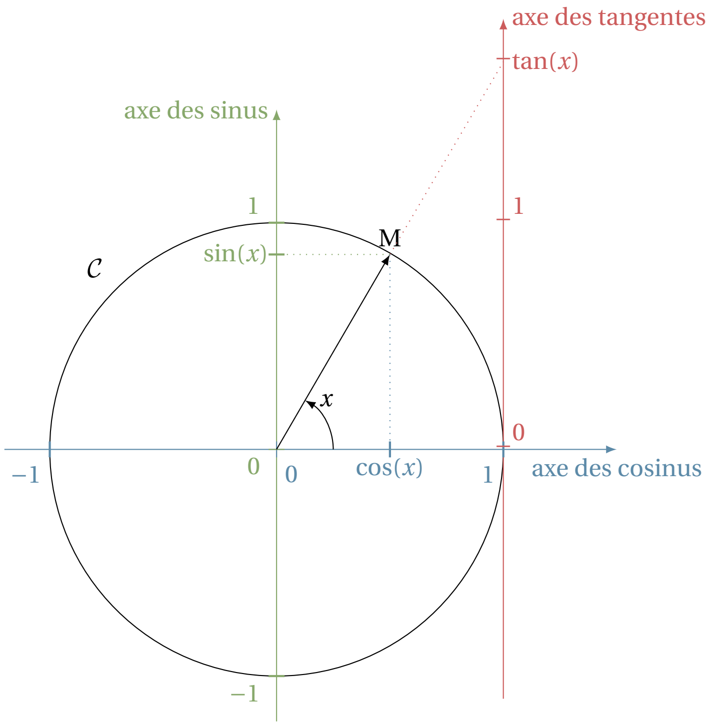
I – Fonctions trigonométriques

Le plan orienté étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. Pour un nombre réel x fixé, on définit le point M de $\mathcal{C}$ tel que l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ait pour mesure x.
On construit alors :

1. K le projeté orthogonal de M sur (OA).
2. H le projeté orthogonal de M sur (OB).
3. T l'intersection de la droite (OM) et de la perpendiculaire à (OA) passant par A (si cette intersection existe).

Ces trois points permettent d'obtenir les valeurs de $\cos(x), \sin(x)$ et $\tan(x)$ grâce à leur position sur leurs axes respectifs :



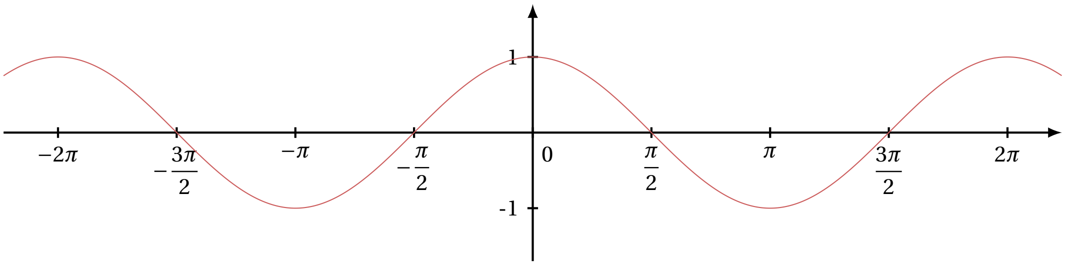


Définition 3.1 (Fonctions trigonométriques) –
Pour tout réel x, on appelle $\cos(x)$ et $\sin(x)$ l'abscisse et l'ordonnée du point M de $\mathcal{C}$ tel que l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ait pour mesure x. On définit ainsi les deux fonctions **sinus** et **cosinus** de RR dans $\mathbb{R}$.
Leur quotient (là où il est bien défini) est la fonction **tangente**, définie par

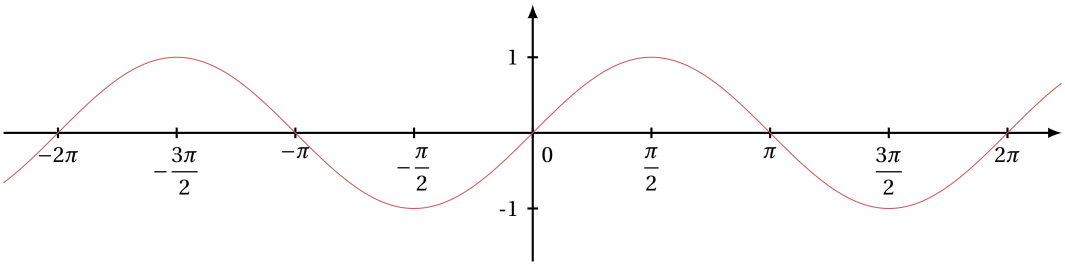
$$\tan : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}. \end{array}$$

Proposition 3.2 – Périodicité des fonctions trigonométriques

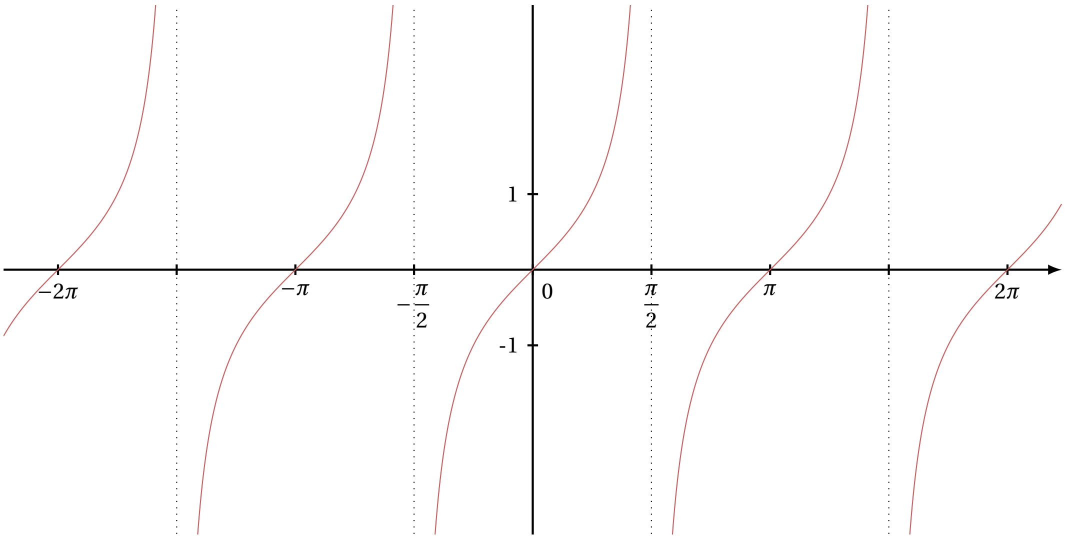
1. cos et sin sont 2π-périodiques.
2. tan est π-périodique.



Graphe de la fonction cosinus.



Graphe de la fonction sinus.



Graphe de la fonction tangente.

Grâce aux symétries de la construction, on retrouve la plupart des formules de décalage d'angle et de passage à l'opposé :

Pour tout réel x :

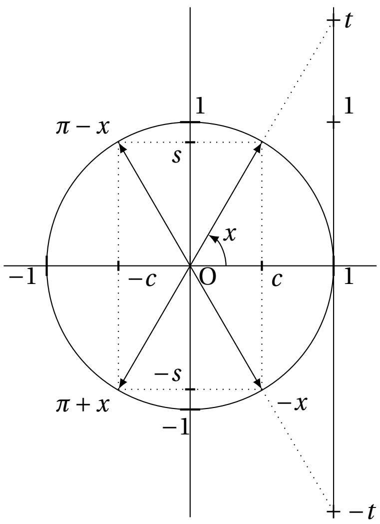
$$\cos(-x) = \cos(x), \qquad \sin(-x) = -\sin(x),$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x), \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x), \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\tan(-x) = -\tan(x), \qquad \tan(\pi - x) = -\tan(x),$$
$$\tan(\pi + x) = \tan(x).$$

On en déduit que :

1. la fonction cosinus est paire,
2. les fonctions sinus et tangente sont impaires.



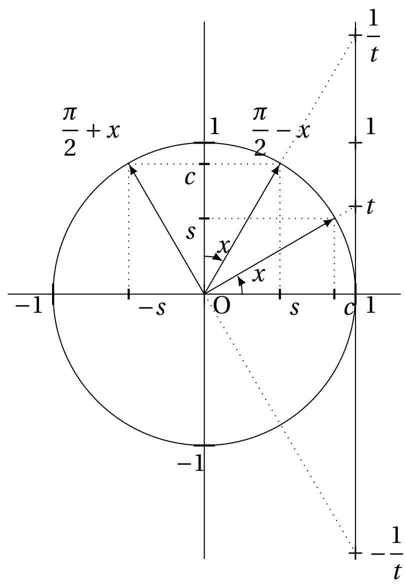
Pour tout réel x :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x),\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x),\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x).$$

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}\}$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan(x)},\qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan(x)}.$$



II – Les formules de trigonométrie

1 – Liens entre $\cos^2$, $\sin^2$ et $\tan^2$

Soit $a\in\mathbb{R}$. Puisque $\cos(a)$ et $\sin(a)$ sont les coordonnées d'un point sur le cercle trigonométrique,

$$\boxed{\cos^2(a)+\sin^2(a)=1.}$$

En factorisant cette expression par $\cos^2(a)$ lorsque $\cos(a)\neq 0$, on obtient

$$\cos^2(a)\left(1+\frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)}\right)=1$$

autrement dit

$$\cos^2(a)=\frac{1}{1+\tan^2(a)}.$$

Ensuite, avec la relation $\sin^2(a)=1-\cos^2(a)$, et la relation précédente, on obtient :

$$\sin^2(a)=1-\frac{1}{1+\tan^2(a)}=\frac{\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}.$$

On retiendra que lorsque $\tan(a)$ est définie,

$$\boxed{\cos^2(a)=\frac{1}{1+\tan^2(a)}\quad\text{et}\quad \sin^2(a)=\frac{\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}.}$$

2 – Les formules d'addition

Proposition 3.3 – Formules d'addition de sinus et cosinus

Pour tous réels a et b :

1. $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

2. $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

3. $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

4. $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$

Démonstration.

□

De ces quatre formules, on déduit la formule d'addition de la fonction tangente :

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\tan(a)$, $\tan(a+b)$ et $\tan(b)$ soit définies.

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)} \\
&= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} \quad \text{(on divise par } \cos(a)\cos(b) \text{ pour faire apparaître les tangentes)} \\
&= \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)}+\frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1-\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\frac{\sin(b)}{\cos(b)}} = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}
\end{aligned}$$

De même, avec l'imparité de la tangente, on obtient, lorsque $\tan(a-b)$ est définie :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}.$$

On retiendra que pour deux réels a et b, tels que $\tan(a)$ et $\tan(b)$ existent.

1. Si $\tan(a+b)$ est définie, alors $\boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.}$
2. Si $\tan(a-b)$ est définie, alors $\boxed{\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}.}$

Remarque 3.4 – Nous étudierons dans le chapitre suivant le corps des nombres complexes, et nous verrons en particulier la formule d'Euler qui permet de faire le lien entre les formes algébriques et trigonométriques d'un nombre complexe :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Cette formule nous fournira un outil beaucoup plus puissant et efficace pour démontrer les formules d'addition du cosinus et du sinus.

3 – Les formules de duplication

Avec la formule d'addition de cosinus pour $b = a$, on obtient pour tout réel a,

$$\boxed{\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a).}$$

On ajoute et on retranche $\sin^2(a)$ et l'on obtient :

$$\cos(2a) = \sin^2(a) + \cos^2(a) - \sin^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a).$$

On ajoute et on retranche $\cos^2(a)$ et l'on obtient :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) + \cos^2(a) - \sin^2(a) - \cos^2(a) = 2\cos^2(a) - 1.$$

On retiendra donc deux formules supplémentaires :

$$\boxed{\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 \quad \text{et} \quad \cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a).}$$

Avec la formule d'addition de sinus pour $b = a$, on obtient pour tout réel a,

$$\boxed{\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).}$$

Avec la formule d'addition de tangente pour $b = a$, on obtient pour tout réel a,

$$\boxed{\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}.}$$

À partir de la formule $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$, on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{c} \cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}, \quad \sin^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2} \quad \text{et} \\ \tan^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)} \text{ lorsque } \cos(2a) \neq -1. \end{array}}$$

4 – Transformation de produits en sommes

$$\text{On a :} \begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & (1) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) & (2) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & (3) \\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b). & (4) \end{cases}$$

En additionnant les lignes (1) et (2), on obtient $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$, de sorte que

$$\boxed{\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}.}$$

En soustrayant la ligne (1) à la ligne (2), on obtient de la même manière

$$\boxed{\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}.}$$

En faisant de même (addition ou soustraction) avec les lignes (3) et (4), on obtient

$$\boxed{\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\cos(a)\sin(b) = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}.}$$

5 – Expressions en fonction de $t = \tan(x/2)$

On suppose dans tout le paragraphe que $\tan(x/2)$ est définie (x est un réel).

En posant $a = x/2$ dans la formule $\cos(2a) = \dfrac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}$, on obtient

$$\boxed{\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{avec } t = \tan(x/2).}$$

En posant $a = x/2$ dans la formule $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$, on obtient

$$\boxed{\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{avec } t = \tan(x/2).}$$

En écrivant que $\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$, on obtient

$$\boxed{\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{avec } t = \tan(x/2).}$$

Les expressions de $\cos x, \sin x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan \dfrac{x}{2}$ ne sont pas à connaître par cœur, vous devez en revanche savoir les retrouver rapidement en cas de besoin.

III – Limites classiques et dérivées

Proposition 3.5 – Limites classiques à connaître

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Lemme 3.6

Pour tout $x \in]0;\frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) < x < \tan(x)$.

Preuve du lemme.

□

Corollaire 3.7 – Inégalité du sinus

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Démonstration. Pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leqslant \sin(x) \leqslant x$ d'après le Lemme 3.6, donc $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$, on a $0 \leqslant \sin(-x) \leqslant -x$. En changeant le signe, comme $-\sin(-x) = \sin(x)$, on a $x \leqslant \sin(x) \leqslant 0$ et donc $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, alors $|x| > 1 \geqslant |\sin(x)|$. L'inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$ est donc vraie dans tous les cas. □

Preuve de la Proposition 3.5.

□

Proposition 3.8 – Dérivées trigonométriques

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\cos' = -\sin \qquad \text{et} \qquad \sin' = \cos.$$

La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ (où $k \in \mathbb{Z}$) et sur un tel intervalle,

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

En particulier, la fonction tangente est strictement croissante sur tout intervalle de cette forme.

Démonstration.

□

IV – Résolution d'équations trigonométriques

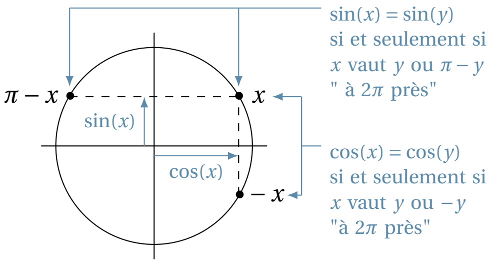
Définition 3.9 – Soient x et y des réels. On dit que x est **congru à** y **modulo** 2π et on note $x \equiv y[2\pi]$ lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + 2k\pi$.

Remarque 3.10 – On notera de la même manière $x \equiv y[\alpha]$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\alpha$.

Proposition 3.11

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \cos(x) = \cos(y) & \iff & x \equiv y[2\pi] & \text{ou} & x \equiv -y[2\pi] \\ \sin(x) = \sin(y) & \iff & x \equiv y[2\pi] & \text{ou} & x \equiv \pi - y[2\pi] \end{cases}$$



Exemple 3.12 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x) = \cos(x) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

Démonstration.

□

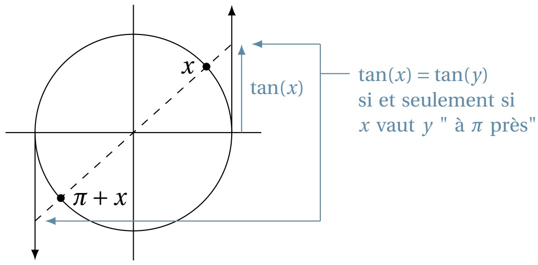
Parfois, l'équation n'est pas directement sous la forme de la Proposition 3.11. Il faut alors, en général, reconnaître une valeur usuelle de cosinus ou de sinus.

Exemple 3.13 – Résoudre l'équation $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Proposition 3.14

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$\tan(x) = \tan(y) \quad \Longleftrightarrow \quad x \equiv y[\pi]$.



Exemple 3.15 – Résoudre l'équation $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

Exemple 3.16 – Résoudre l'équation $\tan(2x) = 3\tan(x)$

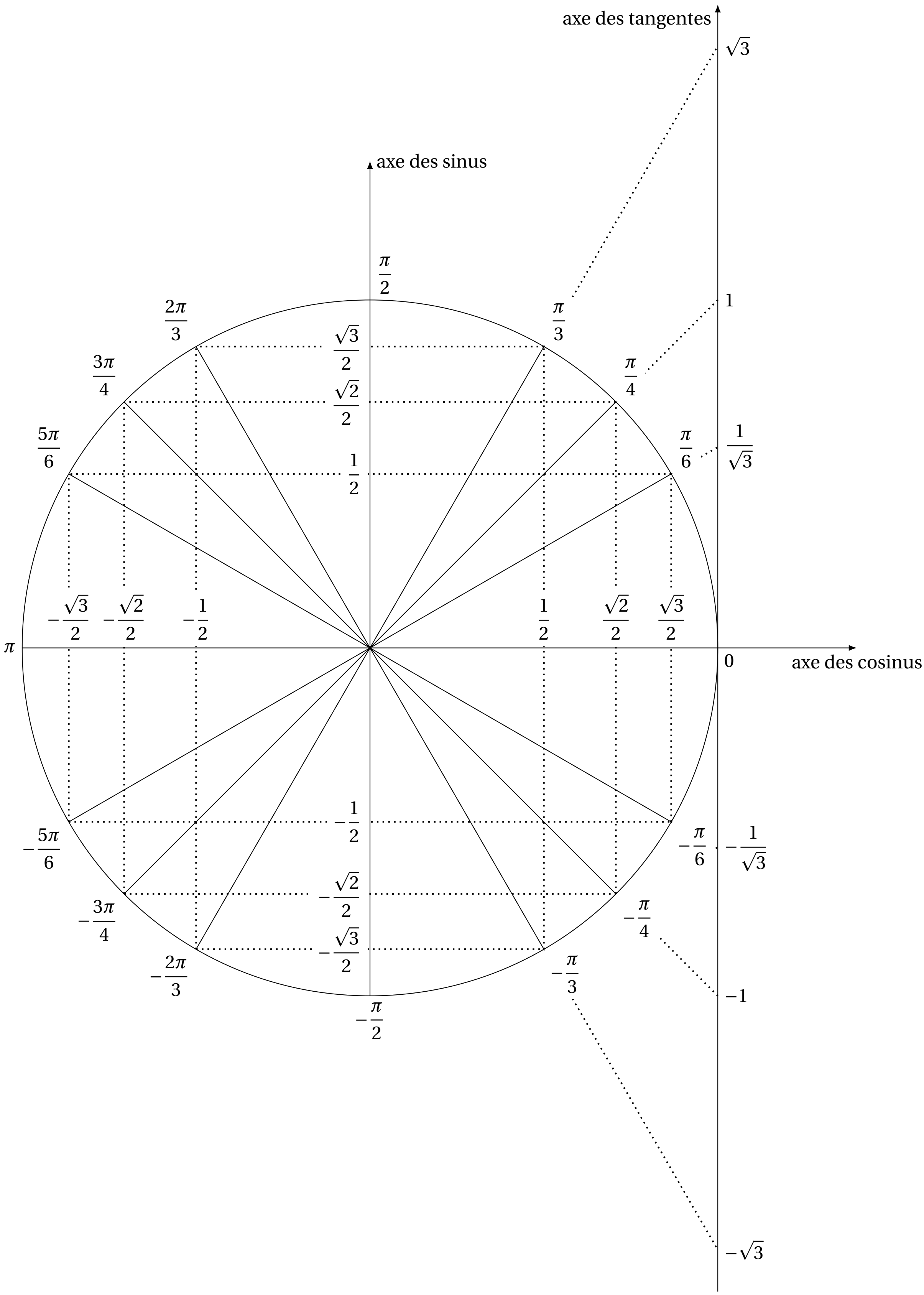
Méthode 3.17 – Résoudre une équation de la forme $A\cos(x) + B\sin(x) = C$
Soient A, B et C des réels. On suppose que A et B sont non nuls (sinon on est dans l'un des cas précédents). Pour résoudre ce genre d'équation, on commence par la transformer en une équation du type $\cos(x-\varphi) = a$ et ainsi on est ramené à ce que l'on a vu précédemment.(On peut également la transformer en une équation du type $\sin(x+\varphi) = a$)
Pour transformer la quantité $A\cos(x) + B\sin(x)$ en une expression de la forme $r\cos(x-\varphi)$, on effectue les étapes suivantes :

- En factorisant l'expression par $r = \sqrt{A^2+B^2} \neq 0$, on obtient
$$A\cos(x) + B\sin(x) = r(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x))$$
avec $\alpha = A/r$ et $\beta = B/r$;
- Puisque $\alpha^2+\beta^2 = 1$, il existe un nombre réel φ tel que $\cos(\varphi) = \alpha$ et $\sin(\varphi) = \beta$, ce qui donne
$$A\cos(x) + B\sin(x) = r(\cos(\varphi)\cos(x) + \sin(\varphi)\sin(x)) = r\cos(x-\varphi).$$

On notera que φ est un argument du nombre complexe $A + iB$
Cette transformation permet, en physique, de déterminer l'amplitude et la phase d'un signal de la forme $A\cos(x) + B\sin(x)$ (électromagnétique, sonore, . . .).

Exemple 3.18 – Résoudre l'équation (E_4) $\quad \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$.

V – Le cercle trigonométrique et le formulaire



$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$	$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$	$\sin^2\theta=\dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	✗

$\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$	$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$ $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$	$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ $\cos 2a=1-2\sin^2 a$ $\sin 2a=2\sin a\cos a$ $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$	$\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$ $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$ $\tan^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$

A savoir retrouver rapidement :

$\cos(a)\cos(b)=\dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$	$\sin(a)\sin(b)=\dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$	$\sin(a)\cos(b)=\dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$

$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$	$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$