34 | Fonctions de deux variables réelles

En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue.

John von Neumann (1903-1957), mathématicien et physicien.

Dans ce cours, on considérera les éléments de $\mathbb{R}^2$ tantôt comme des vecteurs, tantôt comme des points du plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On rapportera aussi l'espace de dimension 3 au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

I – Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

1 – Distance dans $\mathbb{R}^2$, ouverts de $\mathbb{R}^2$

Dans tout ce chapitre, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\| \cdot \|$ désigne sa norme euclidienne associée définis par :

$$\forall \underbrace{(x,y)}_{=\vec{u}} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \underbrace{(x',y')}_{=\vec{v}} \in \mathbb{R}^2, \qquad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy'$$

et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Si le point M du plan a pour coordonnées (x,y) dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, alors $\|(x,y)\|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Sur la droite réelle $\mathbb{R}$, on définit la distance $d(s,t)$ entre les réels s et t grâce à la valeur absolue en posant $\mathrm{d}(s,t) = |t-s|$. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, c'est la norme euclidienne qui joue ce rôle.

Définition 34.1 – Soit $u = (x,y)$ et $v = (x',y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. On appelle **distance euclidienne** entre u et v et on note $\mathrm{d}(u,v)$ le réel positif ou nul défini par

$$\mathrm{d}(u,v) = \|v-u\| = \|(x'-x, y'-y)\| = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}.$$

La notion de distance nous permet de définir l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ dont la distance à un point fixé a est strictement inférieure ou inférieure ou égale à un réel r strictement positif :

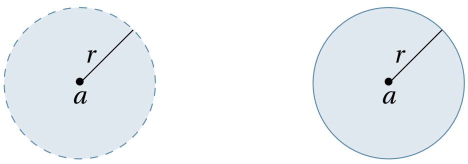
Définition 34.2 – Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- ▹ On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B(a,r) = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \mid d(a,u) < r \right\}.$$

- ▹ On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\overline{B(a,r)} = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \mid d(a,u) \leqslant r \right\}.$$



Les boules ouvertes sont à $\mathbb{R}^2$ ce que sont les intervalles ouverts bornés sont à $\mathbb{R}$. Les boules fermées sont à $\mathbb{R}^2$ ce que sont les segments sont à $\mathbb{R}$.

La « géométrie » des boules ouvertes étant très restrictive, on utilise une autre notion pour les parties de $\mathbb{R}^2$:

Définition 34.3 – Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est une **partie ouverte** de $\mathbb{R}^2$, ou un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$, si pour tout $a \in A$, il existe un réel $r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) \subset A$. Autrement dit, une partie A de $\mathbb{R}^2$ est ouverte, si et seulement si, chacun de ses points est le centre d'une boule ouverte elle même incluse dans A (on dit alors que chaque point est intérieur à A).

Remarque 34.4 – Concrètement, un ouvert ne contient aucun des points de sa frontière. Les boules ouvertes sont des ouverts.

Exemple 34.5 – Représenter les ensembles A et B suivants. Sont-ils des parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$?
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|x| \leqslant 1$ et $|y| < 1\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|x| + |y| < 1\}$.

2 – Fonctions réelles de deux variables réelles, représentation graphique

Définition 34.6 – Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On appelle **fonction réelle de deux variables** sur A une application

$$f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y). \end{array}$$

Remarque 34.7 – On peut voir $f(x, y)$ comme « l'altitude » du point de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ dans l'espace et donc représenter f par la surface de l'espace dont les coordonnées des points forment l'ensemble

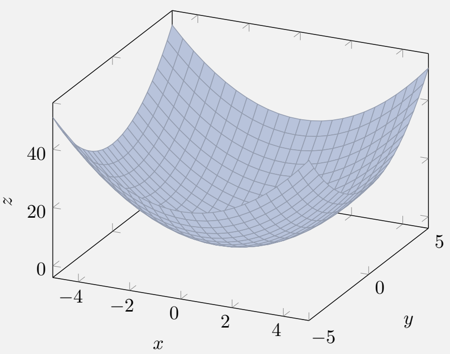
$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in A\}.$$

Exemple 34.8 –

On donne ci-contre la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

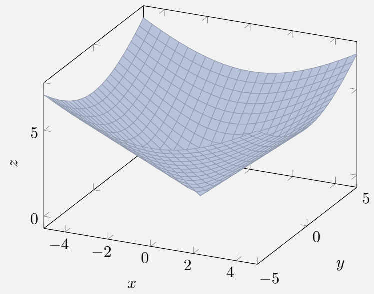
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 1 + x^2 + y^2,$$

qui est un **paraboloïde**.

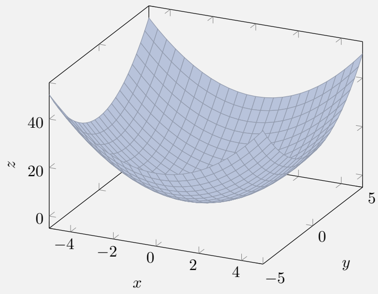


Exemple 34.9 – Autres exemples de surfaces :

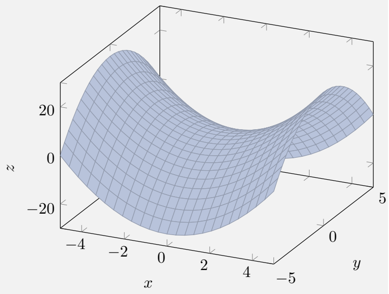
$z = \sqrt{x^2+y^2}$



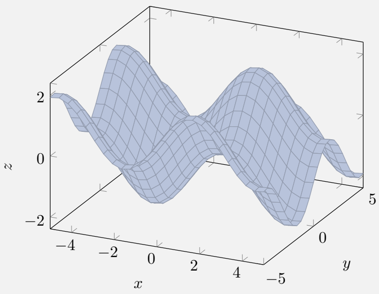
$z = x^2+y^2$



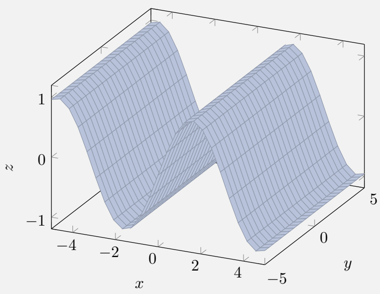
$z = x^2-y^2$



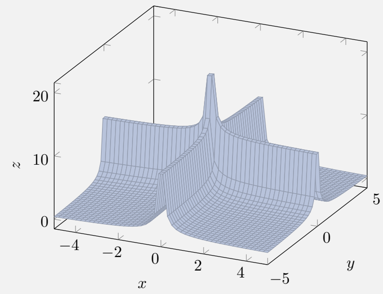
$z = \sin x + \sin y$



$z = \sin x$



$z = \dfrac{1}{|x|} + \dfrac{1}{|y|}$



3 – Continuité des fonctions réelles de deux variables réelles

Définition 34.10 – Soit A une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, f une application de A dans $\mathbb{R}$ et $a \in A$.
On dit que f est **continue** en a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall u \in A, \quad \|u-a\| \leqslant \eta \implies |f(u)-f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, f est continue a si et seulement si l'on peut rendre $f(u)$ arbitrairement proche de $f(a)$ en choisissant u suffisamment proche de a, c'est-à-dire dans une boule fermée centrée en a de rayon suffisamment petit.

Définition 34.11 – Soit A une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'une fonction de 2 variables est **continue** sur A si, et seulement si, elle est continue en tout point de A.

Proposition 34.12 – Opérations sur les fonctions continues

Soit f et g deux fonctions définies et continues sur une partie ouverte A de $\mathbb{R}^2$.

1. $f+g$ est continue sur A,
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est continue sur A,
3. $f \times g$ est continue sur A,
4. si g ne s'annule pas sur A, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur A.

Exemple 34.13 – Les fonctions affines de la forme $f : (x,y) \longmapsto ax+by+c$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Les fonctions polynomiales à deux variables sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Les quotients de fonctions polynomiales à deux variables sont continues sur toute partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ où le dénominateur ne s'annule pas.

Remarque 34.14 – Graphiquement, une fonction de deux variables est continue sur A si la surface qui la représente ne présente pas de « saut »en un point de A.

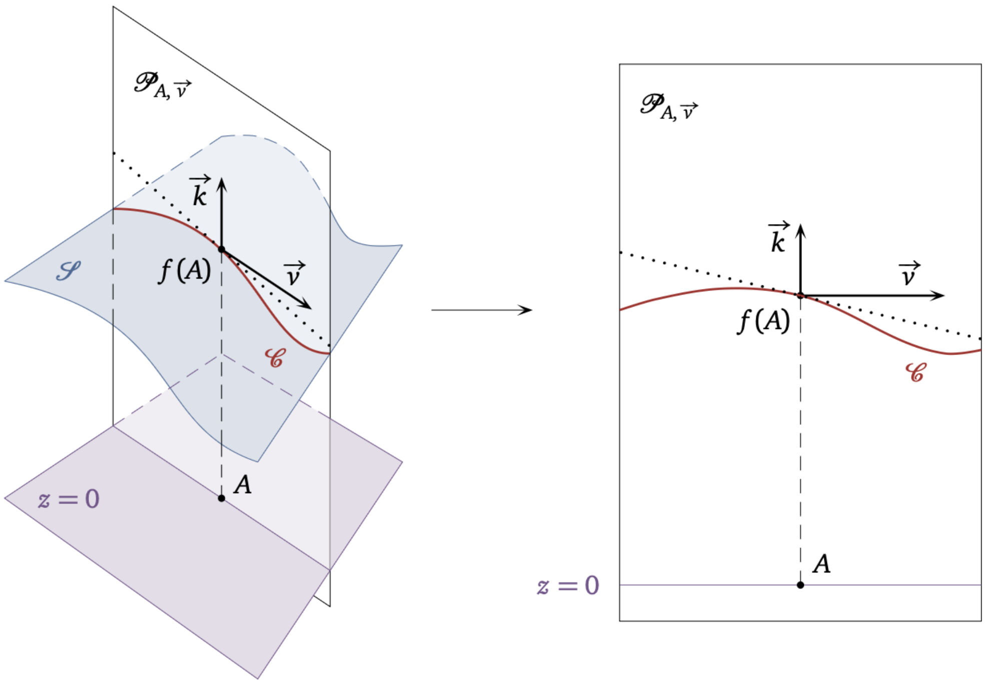
II – Dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles

1 – Section de la surface représentative par un plan vertical

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction réelle définie sur U.
On note $\mathcal{S}$ la surface représentative de f dans l'espace.
Soit $a = (x_0, y_0)$ un élément de U et $\overrightarrow{V} = (\alpha, \beta)$ un vecteur unitaire (de norme 1) de $\mathbb{R}^2$.
On considère la courbe $\mathcal{C}$ obtenue par intersection entre $\mathcal{S}$ et le plan $\mathcal{P}_{A,\overrightarrow{V}}$ perpendiculaire au plan (Oxy) passant par le point de coordonnées $A(x_0, y_0, 0)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{V}(\alpha, \beta, 0)$ et $\overrightarrow{k}$.
Alors la courbe $\mathcal{C}$ représente dans le plan $\mathcal{P}_{A,\overrightarrow{V}}$ rapporté au repère $(A, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{k})$ la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) \end{array}$$

où D est la partie de $\mathbb{R}$ définie par $D = \{t \in \mathbb{R} \mid (x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) \in U\}$.



2 – Dérivée suivant un vecteur

Définition 34.15 – Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables définie sur U. Soit $a = (x_0, y_0) \in U$ et $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.

On dit que f est **dérivable en a suivant le vecteur $\overrightarrow{v}$** si, et seulement si, le taux d'accroissement de f entre $a = (x_0, y_0)$ et $a + t\overrightarrow{v} = (x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta)$ possède une limite finie lorsque t tend vers 0, c'est-à-dire si, et seulement si, la fonction

$$t \longmapsto \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

possède une limite finie lorsque t tend vers 0. Dans ce cas, on appelle cette limite le **nombre dérivé** de f en a suivant le vecteur $\overrightarrow{v}$ et on la note $D_{\overrightarrow{v}} f(a)$

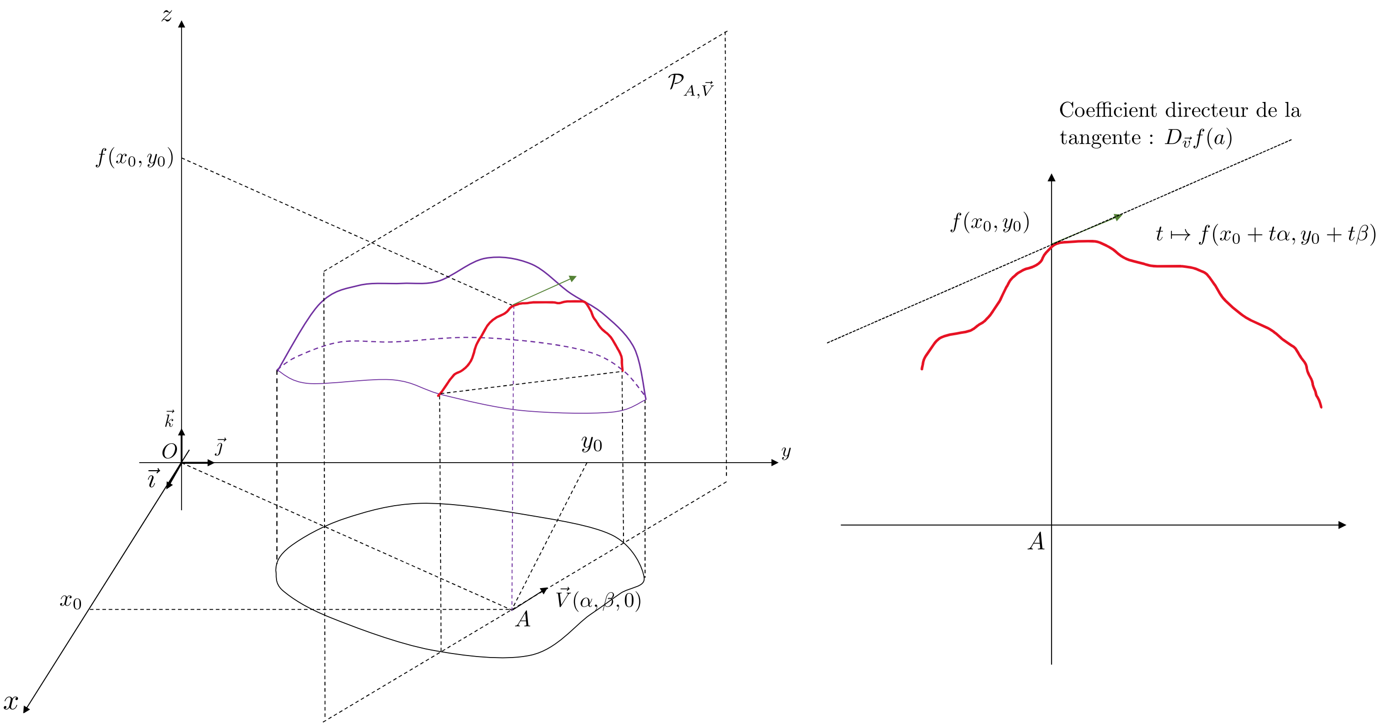
$$D_{\overrightarrow{v}} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Le nombre $D_{\vec{v}} f(a)$ est, si il existe, le nombre dérivé en 0 de la fonction $t \longmapsto f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta)$.

Remarque 34.16 – Graphiquement, si f est dérivable en a suivant le vecteur v, alors le nombre dérivé $D_{\overrightarrow{v}} f(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à courbe représentant $t \longmapsto f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta)$ en 0 (cf dessin page suivante).

Exemple 34.17 – Soit $a=(1,1)$, $\overrightarrow{v}=(1,2)$ et $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (x,y) & \longmapsto & x^2y^3 \end{array}$

Montrer que f est dérivable en a suivant $\overrightarrow{v}$ et calculer $D_{\vec{v}}f(a)$.



3 – Dérivées partielles en un point

Lorsqu'elles existent, les dérivées en un point suivant les vecteurs $\overrightarrow{e_1}=(1,0)$ et $\overrightarrow{e_2}=(0,1)$ portent le nom de dérivées partielles de f en ce point.

Définition 34.18 – Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f: \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ une fonction réelle définie sur U et $a=(x_0,y_0)\in U$.
On appelle **dérivées partielles (premières)** de f en $a=(x_0,y_0)$ les dérivées de f en a suivant les vecteurs $\overrightarrow{e_1}=(1,0)$ et $\overrightarrow{e_2}=(0,1)$ si elles existent. On les note

$$D_1f(x_0,y_0),\ D_2f(x_0,y_0) \qquad \text{ou plus couramment} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Autrement dit, si les limites existent et sont finies :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} \qquad \text{dérivée partielle par rapport à } x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} \qquad \text{dérivée partielle par rapport à } y$$

Proposition 34.19 – Existence des dérivées partielles

Par définition, une fonction f admet des dérivées partielles (premières) en $a = (x_0, y_0)$ si, et seulement si, ses applications partielles (fonctions d'une variable)

$$f_{(\cdot, y_0)} : x \longmapsto f(x, y_0) \qquad \text{et} \qquad f_{(x_0, \cdot)} : y \longmapsto f(x_0, y)$$

possèdent une dérivée en x_0 et y_0 respectivement : dans ce cas

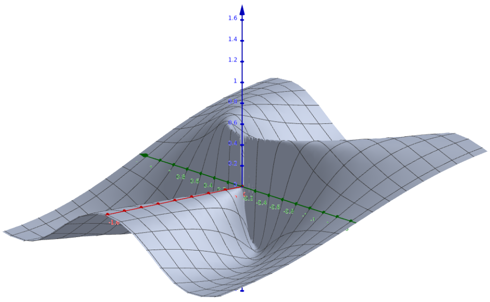
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \big(f(\cdot, y_0)\big)'(x_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \big(f(x_0, \cdot)\big)'(y_0).$$

Exemple 34.20 –

1. Soit $\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \operatorname{Arctan}(\frac{y}{x}) \end{array}$ et $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$ et $a = (x_0, y_0)$.

Remarque 34.21 – La fonction $f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$ possède des dérivées suivant tout vecteur au point $(0,0)$ (et donc en particulier des dérivées partielles en $(0,0)$). Pourtant, c'est une fonction qui n'est pas continue en $(0,0)$. Contrairement aux fonctions d'une variable réelle, pour qui la dérivabilité entraîne la continuité, les fonctions de deux variables peuvent très bien admettre des dérivées dans toutes les directions en un point sans être continues en ce point.



4 – Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 34.22 – Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si elle admet des dérivées partielles en tout point de U et si les fonctions dérivées partielles

$$D_1(f): \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array} \quad \text{et} \quad D_2(f): \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}$$

sont continues sur U.

On note $\mathcal{C}^1(U)$ ou $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Exemple 34.23 – La fonction θ définie plus haut est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Proposition 34.24 – Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1. $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel stable par multiplication.
2. Le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur toute partie ouverte de U où le dénominateur ne s'annule pas.

5 – Développement limité d'ordre un

Théorème 34.25 – Existence d'un développement limité d'ordre 1

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Pour tout point $a=(x_0,y_0) \in U$ fixé, il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x_0+h, y_0+k) \in U$

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + \|(h,k)\|\varepsilon(\|(h,k)\|) \qquad \text{avec} \quad \lim_{h\longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

ce que l'on peut noter aussi

$$f(x_0+h,y_0+k) \underset{\|(h,k)\|\to 0}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + o(\|(h,k)\|).$$

On dit que f admet un **développement limité à l'ordre 1** en $a=(x_0,y_0)$.

Remarque 34.26 – Avec les notations du théorème, la fonction

$$\varphi_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (h,k) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k \end{array}$$

est une forme linéaire. Le développement limité énonce donc la possibilité pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ d'approcher la fonction $(h,k) \longmapsto f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$ par une application linéaire. L'erreur commise en chaque point est alors négligeable par rapport à la norme du vecteur (h,k).

Corollaire 34.27 – $\mathcal{C}^1$ implique continue

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ alors elle est continue sur U.

Théorème 34.28 – Existence de dérivées directionnelles pour les fonctions $\mathcal{C}^1$

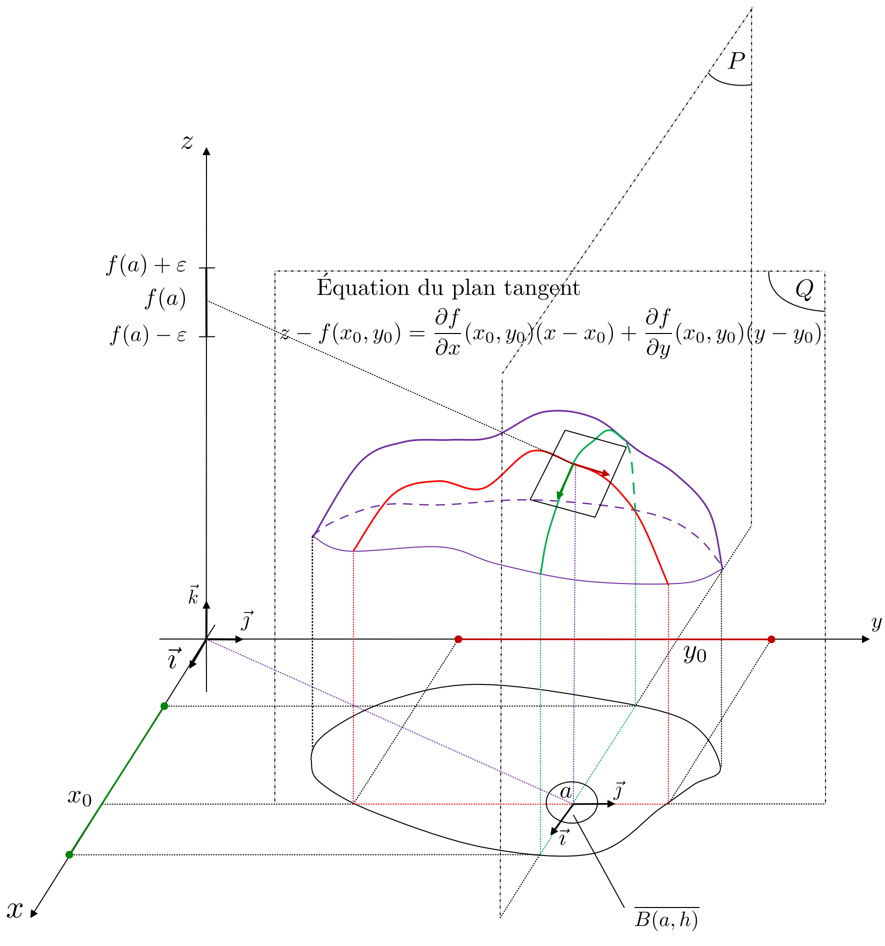
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction réelle définie sur U. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors f admet en tout point $a = (x_0, y_0)$ de U une dérivée suivant tout vecteur $v = (\alpha, \beta)$ et

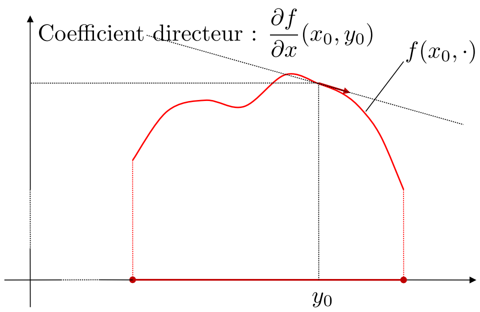
$$D_v f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\beta.$$

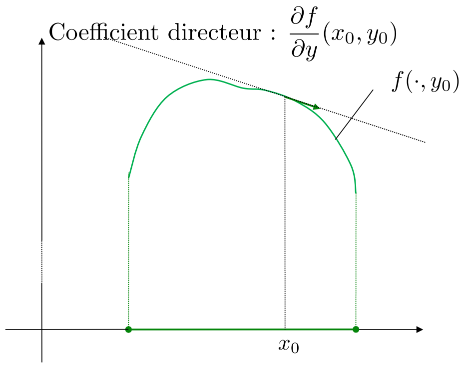
On peut interpréter géométriquement ce théorème :

Définition 34.29 – Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout point $a = (x_0, y_0) \in U$, il existe un **plan tangent** à la surface d'équation $z = f(x,y)$ et une équation cartésienne de ce plan tangent est

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0).$$







Exemple 34.30 – Écrire le développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$ de $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{\cos(y)}{1-x}$. En déduire une équation du plan tangent en $(0,0)$ à la surface représentant f.

6 – Gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 34.31 – Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction réelle définie sur U et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Soit $a = (x_0, y_0) \in U$. On appelle **gradient** de f en a et l'on note $\nabla f(x_0, y_0)$ le vecteur défini par

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

Le calcul de la dérivée selon un vecteur se reformule alors de la manière suivante :

Théorème 34.32 – Existence du gradient pour les fonctions $\mathcal{C}^1$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction réelle définie sur U. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors f admet en tout point $a = (x_0, y_0)$ de U une dérivée suivant tout vecteur $v = (\alpha, \beta)$) et

$$D_v f(x_0, y_0) = < \nabla f(x_0, y_0), v > .$$

On peut aussi réécrire les développements limités d'ordre 1 à l'aide du gradient :

Corollaire 34.33 – Ecriture du développement limité d'ordre 1 avec le gradient

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Pour tout point $a = (x_0, y_0) \in U$ fixé, et pour tout vecteur $v = (h, k)$ de $\mathbb{R}^2$, on a

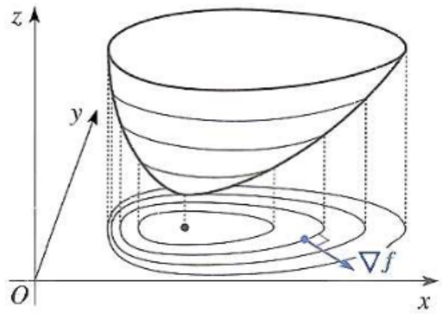
$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + < \nabla f(x_0, y_0), v > + o(\|(h,k)\|).$$

Interprétation géométrique du gradient

Soit U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On considère une fonction réelle f définie sur U et de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a = (x_0, y_0) \in U$.

Si l'on calcule le nombre dérivé de f en a suivant le vecteur gradient, on a :

$$D_{\nabla f(x_0,y_0)} f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \nabla f(x_0, y_0)\rangle = \|\nabla f(x_0, y_0)\|^2 \geqslant 0$$



donc lorsqu'on se déplace dans le sens du vecteur gradient, les valeurs de f augmentent.

Enfin, pour tout vecteur unitaire $\vec{u}$, puisque

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = < \nabla f(x_0, y_0), \vec{u} > = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos(\nabla f(x_0, y_0), \vec{u})$$

la variation de f lorsqu'on suit le vecteur $\vec{u}$ en partant de a est d'autant plus grande que l'angle formé par $\vec{u}$ et $\nabla f(x_0, y_0)$ est petit.
On déduit de cela que :

$$\boxed{\text{En tout point, le gradient indique la direction dans laquelle } f \text{ croît le plus vite.}}$$

III – Dérivées partielles et composées

1 – Règle de la chaîne

Théorème 34.34 – Règle de la chaîne

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ une fonction réelle définie sur U.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux fonctions réelles définies sur I telles que : $\forall t \in I,\ (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \in U$.
On note g l'application réelle définie sur I par :

$$\forall t \in I,\ g(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)).$$

Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a :

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))\mathbf{x}'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))\mathbf{y}'(t)$$

ce qui s'écrit, en utilisant la notation de Leibniz :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))\mathbf{x}'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))\mathbf{y}'(t).$$

On considère un point mobile $M(t)$ qui se déplace dans U en fonction du temps t et qui a pour coordonnées $\gamma(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$.

Ainsi la fonction $f \circ \gamma : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(\gamma(t)) = f\big(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)\big) \end{array}$ est la variation de f au cours du déplacement du point M.

[Dessin]

La dérivée de $f \circ \gamma$ est donnée par :

$$\forall t \in I,\ (f \circ \gamma)'(t) = < \nabla f\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t) >$$

où l'on a noté $\gamma'(t) = (\mathbf{x}'(t), \mathbf{y}'(t))$.

Le vecteur de coordonnées $\big(\mathbf{x}'(t), \mathbf{y}'(t)\big)$ est le **vecteur vitesse** du mobile donc la dérivée $f \circ \gamma$ au cours du voyage de M est le produit scalaire du gradient de f par le vecteur vitesse du mobile.

On retrouve qu'en valeur absolue, $(f \circ \gamma)'(t)$ est d'autant plus grand que le vecteur vitesse est dans la direction du gradient. Cela signifie que la variation de f est plus grande lorsque le mobile «suit» le vecteur gradient.

Si le mobile se déplace à vitesse constante $v > 0$ et dans la direction du gradient, on a $|(f\circ\gamma)'(t)| = v \times \|\nabla f(\gamma(t))\|$ donc f varie beaucoup lorsque $\|\nabla f(\gamma(t))\|$ est grand.

Gradient et lignes de niveaux de f

Soit $a = (x_0, y_0) \in U$. On pose $k = f(a)$ et on considère la ligne de niveau k de f, c'est-à-dire l'ensemble des points de U qui ont pour image k par f :

$$E_k = \{(x,y) \in U,\ f(x,y) = k\}$$

(Évidemment on a $a \in E_k$.)

On considère un point mobile $M(t)$ qui se déplace dans la ligne de niveau E_k en fonction du temps t et qui a pour coordonnées $\gamma(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$.

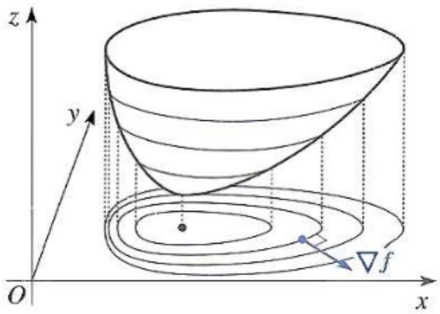
Puisque M reste dans E_k, à tout instant t, on a $f(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)) = k$ autrement dit, la valeur de f reste constante tout au long du trajet, donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)) = 0$.

Or, d'après le paragraphe précédent, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)) = <\nabla f\big(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)\big), \gamma'(t)>$$

où $\gamma'(t)$ est le vecteur vitesse de $M(t)$, qui reste tangent à la courbe décrite par $M(t)$. On obtient donc

$$<\nabla f\big(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)\big), \gamma'(t)> = 0$$



ce qui signifie que le gradient de f en un point de E_k est orthogonal à E_k.
On retiendra que :

> En tout point, le gradient est orthogonal aux lignes de niveau, dirigé dans le sens des pentes croissantes. Il indique la direction dans laquelle f croît le plus vite.

2 – Composition par une fonction de deux variables

Théorème 34.35 – Dérivées partielles d'une composée

Soit A et B deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et soit

$$f : \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \quad \mathbf{x} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \mathbf{x}(u,v) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathbf{y} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \mathbf{y}(u,v) \end{array}$$

On suppose que $\forall (u,v) \in A,\ \big(\mathbf{x}(u,v), \mathbf{y}(u,v)\big) \in B$. On pose $g : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (u,v) & \longmapsto & f\big(\mathbf{x}(u,v),\mathbf{y}(u,v)\big) \end{array}$

Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur B, alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et l'on a

$$\forall (u,v) \in A,\quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\mathbf{x}(u,v),\mathbf{y}(u,v)\big)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\mathbf{x}(u,v),\mathbf{y}(u,v)\big)\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u}(u,v)$$

$$\text{et} \qquad \forall (u,v) \in A,\quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\mathbf{x}(u,v),\mathbf{y}(u,v)\big)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\mathbf{x}(u,v),\mathbf{y}(u,v)\big)\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v}(u,v).$$

Exemple 34.36 – Calcul en coordonnées polaires.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$, $\mathbf{x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & r\cos(\theta) \end{array}$ et $\mathbf{y} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (r,\theta) & \longmapsto & r\sin(\theta) \end{array}$

On considère $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (r,\theta) & \longmapsto & f\big(\mathbf{x}(r,\theta),\mathbf{y}(r,\theta)\big) = f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \end{array}$

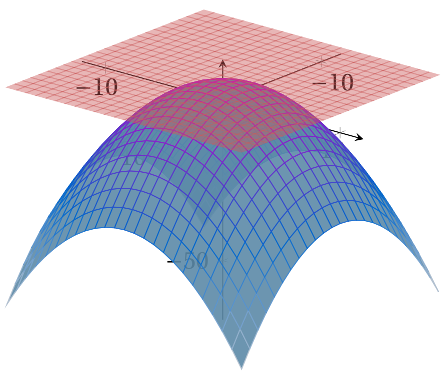
Calculer les dérivées partielles de g en tout point (r,θ), en supposant f de classe $\mathcal{C}^1$.

IV – Extremums

Définition 34.37 – Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a = (x_0, y_0) \in A$. On dit que :

- f présente un **maximum local** en a lorsqu'il existe une boule ouverte $B(a,r)$ centrée en a telle que $\forall v \in B(a,r) \cap A,\ f(v) \leqslant f(a)$.
- f présente un **minimum local** en a lorsqu'il existe une boule ouverte $B(a,r)$ centrée en a telle que $\forall v \in B(a,r) \cap A,\ f(v) \geqslant f(a)$.
- f présente un **maximum global** en a lorsque $\forall v \in U,\ f(v) \leqslant f(a)$.
- f présente un **minimum global** en a lorsque $\forall v \in U,\ f(v) \geqslant f(a)$.
- f présente un **extremum local** en a lorsque f admet en a un minimum local ou un maximum local.
- f présente un **extremum global** en a lorsque f admet en a un minimum global ou un maximum global.

Remarque 34.38 – Graphiquement, la fonction f admet un extremum local en a si la surface représentant f reste localement en dessous ou au dessus du plan d'équation $z = f(a)$.



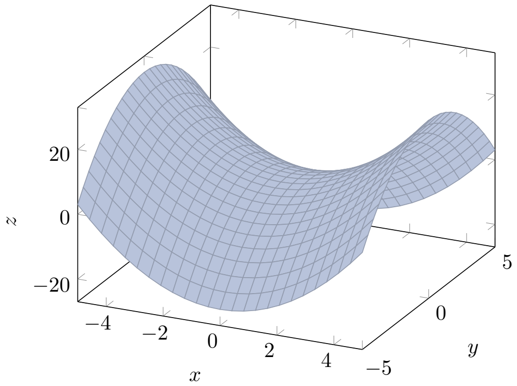
Proposition 34.39 – Lien entre extremum local et point critique

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $a = (x_0, y_0) \in U$.

Si f présente un extremum local en a, alors son gradient en a est nul, autrement dit, pour que f présente un extremum local en $a = (x_0, y_0)$, il est nécessaire (mais non suffisant) que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Démonstration. Si f présente un extremum local en $a = (x_0, y_0)$, alors les deux applications partielles $f_{(\cdot, y_0)}$ et $f_{(x_0, \cdot)}$ admettent un extremum local respectivement en x_0 et y_0. Les dérivées de ces applications d'une seule variable réelle s'annulent donc en ce point. □

ATTENTION ! Le gradient de f peut s'annuler en un point qui n'est pas un extremum local. Il se peut par exemple que l'une des dérivées partielles admette en ce point un maximum local et l'autre un minimum local et donc que f n'admette pas d'extremum local en ce point. C'est le cas pour la fonction $(x, y) \longmapsto x^2 - y^2 + 3$ (représentée ci-dessous) dont le graphe est en forme de selle à cheval : en $(0, 0)$, le gradient s'annule sans que la surface ne présente d'extremum local.



Définition 34.40 – Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Un point où les deux dérivées partielles de f sont nulles s'appelle un **point critique** de f. Un point critique n'est pas toujours un extremum local mais un extremum local se situe toujours en un point critique.

Remarque 34.41 – Le fait que les extremums d'une fonction de deux variables se situent en des points critiques n'est vrai que lorsqu'on travaille sur un ouvert avec une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On peut très bien avoir un extremum en un point où la fonction n'admet pas de dérivée partielle ou sur un « bord »d'un ensemble non ouvert.

Exemple 34.42 – Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 - 2x - 4y. \end{array}$

Trouver les éventuels extremums de f.

Spoiler Alert – Vous verrez l'an prochain une méthode pour déterminer si un point critique est un extremum local à l'aide des dérivées partielles secondes ! (lorsqu'elles existent)