

33 | Espaces préhilbertiens réels

Dans ce chapitre, on travaille seulement avec le corps de base \mathbb{R} .

I – Produit scalaire et norme

1 – Définitions et généralités

Définition 33.1 – Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On appelle **produit scalaire sur E** une application

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

- **bilinéaire**, c'est à dire linéaire à gauche :

$$\forall x_1, x_2, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \langle \lambda x_1 + x_2, y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle,$$

et linéaire à droite :

$$\forall x, y_1, y_2 \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \langle x, \lambda y_1 + y_2 \rangle = \lambda \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle.$$

- **symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
- **positive** : $\forall x \in E, \quad \langle x, x \rangle \geq 0$.
- **définie** : $\forall x \in E, \quad \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0_E$. (propriété de **séparation**),

Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est appelé un **espace préhilbertien réel**. Un espace préhilbertien réel **DE DIMENSION FINIE** est appelé un **espace euclidien**.

Notation 33.2 – Le produit scalaire $\langle x, y \rangle$ est aussi parfois noté $\langle x | y \rangle$, $(x | y)$ ou bien sûr $x \cdot y$.

Remarque 33.3 –

1. Si l'on commence par montrer la symétrie, il suffit de montrer que l'application est linéaire à gauche. La bilinéarité découle de la symétrie. Prenez le temps de l'écrire pour vous en convaincre!
2. Un cas particulier de la bilinéarité est $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ avec $\lambda = 0$. On obtient alors que pour tout x on a (en utilisant également la symétrie) :

$$\forall x \in E, \quad \langle x, 0_E \rangle = \langle 0_E, x \rangle = 0.$$

Définition-Théorème 33.4 –

1. L'application $(X, Y) \longmapsto X^T Y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n appelé son **produit scalaire canonique**.
2. L'application $(A, B) \longmapsto \text{tr}(A^T B) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} b_{ij}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ appelé son **produit scalaire canonique**.

Remarque 33.5 –

- Pourquoi *canonique*? Parce qu'il s'agit du produit scalaire le plus *naturel* à poser sur ces espaces! Pensez au cas de \mathbb{R}^2 pour vous en convaincre. La première définition donne dans ce cas :

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

qui correspond bien à la définition de produit scalaire dans le plan à laquelle vous avez été habitués.

- Pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, le produit matriciel $X^T Y$ est une matrice carrée de taille 1, i.e. un réel. Plus généralement, $A^T B$ est une matrice carrée de taille p pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, que l'on convertit en un réel grâce à la trace.

Démonstration.

□

Exemple 33.6 – De nombreux produits scalaires peuvent exister sur un même espace vectoriel. L'application $(X, Y) \mapsto X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$ est par exemple un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 distinct du produit scalaire canonique.

Démonstration.

□

Exemple 33.7 – Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. L'application $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Démonstration.

□



ATTENTION ! Muni du produit scalaire défini ci-dessus, $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ n'est pas un espace **EUCLIDIEN** car ce n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension **FINIE**. C'est seulement un **ESPACE PRÉHILBERTIEN RÉEL**.

Exemple 33.8 – Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. L'application $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(x_k) Q(x_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration.

□

Définition 33.9 – Soit E un espace préhilbertien réel.

- **Norme :** On appelle **norme** sur E (associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$) l'application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in E$ par : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. On dit qu'un vecteur x de E est **unitaire** si $\|x\| = 1$.
- **Distance :** Pour tous $x, y \in E$, le réel $\|x - y\|$, souvent noté $d(x, y)$, est appelé la **distance** entre x et y (associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$).



ATTENTION ! La notion de distance n'est pas forcément celle qu'on croit! La distance dépend d'un choix de produit scalaire. Par exemple, pour le produit scalaire $(X, Y) \mapsto X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$ sur \mathbb{R}^2 : $\|(1, 0)\| = \sqrt{2} \neq 1$.

Définition 33.10 – Un vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ est appelé vecteur unitaire.

Remarque 33.11 –

- Soit $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E . Alors, pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|.$$

Cette propriété est aussi appelée propriété d'homogénéité.

- On note aussitôt que si $x \neq 0_E$ alors $y = \frac{x}{\|x\|}$ est un vecteur unitaire colinéaire à x .

Proposition 33.12 – Identités remarquables

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire. Alors, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \\ \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle \\ \|x\|^2 - \|y\|^2 &= \langle x - y, x + y \rangle\end{aligned}$$

Démonstration.

□

Ces identités sont des généralisations des identités remarquables sur \mathbb{R} étudiées au lycée avec $\langle x, y \rangle = xy$ et la norme associée $\|x\|^2 = x^2$.

Remarque 33.13 – On peut aussi « inverser » ces relations et récupérer le produit scalaire en fonction de la norme. On obtient alors ce qu'on appelle des **identités de polarisation**. Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)\end{aligned}$$

Morale : connaissant la norme, on peut retrouver le produit scalaire, et inversement.

2 – Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire

Proposition 33.14 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire. Alors,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

avec égalité, si et seulement si, les vecteurs x et y sont colinéaires.

Démonstration.

□

Exemple 33.15 – Traduisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit canonique sur \mathbb{R}^n ; pour tous (x_1, \dots, x_n) et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

En particulier, en prenant $(y_1, \dots, y_n) = (1, \dots, 1)$, on a pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$, avec égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

Exemple 33.16 – Traduisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit canonique sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$:

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \quad \left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

Exemple 33.17 – Pour toute fonction $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ pour laquelle $f(0) = 0$: $f(1)^2 \leq 2 \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 dt}$.

Démonstration.

□

Remarque 33.18 – Si nous avons défini le produit scalaire à partir de normes et d'angles, l'inégalité de Cauchy-Schwarz serait une pure trivialité : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$, mais dans le contexte de ce chapitre, cette inégalité est remarquable justement parce que nous n'avons pas encore de définition propre des angles.

Proposition 33.19 – Inégalité triangulaire

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire. Alors,

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires **DE MÊME SENS** (on dit aussi *positivement liés*).

Démonstration.

□

Corollaire 33.20 – Inégalité triangulaire généralisée

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire. Alors,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire : $\|x\| = \|(x + y) + (-y)\| \leq \|x + y\| + \|-y\| = \|x + y\| + \|y\|$, donc $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$, et de même $\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|$. □

Exemple 33.21 – Dans le cadre de l'espace préhilbertien $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ vu précédemment, l'inégalité triangulaire s'écrit

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \quad \sqrt{\int_0^1 (f + g)^2} \leq \sqrt{\int_0^1 f^2} + \sqrt{\int_0^1 g^2}$$

II – Orthogonalité

1 – Définitions

Définition 33.22 – Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, $x, y \in E$, X et Y deux parties de E et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que :

- x et y sont **orthogonaux**, ce que l'on note $x \perp y$, ssi $\langle x, y \rangle = 0$;
- les parties X et Y sont **orthogonales**, ce que l'on note $X \perp Y$, si pour tout $x \in X$ et $y \in Y$: $\langle x, y \rangle = 0$;
- la famille $(x_i)_{i \in I}$ est **orthogonale** si pour tous $i, j \in I$ distincts : $\langle x_i, x_j \rangle = 0$;
-
- la famille $(x_i)_{i \in I}$ est **orthonormale** si elle est orthogonale et constituée de vecteurs unitaires, i.e si pour tous $i, j \in I$: $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$.

Remarque 33.23 –

- Jusqu'ici, la notion d'orthogonalité reposait sur la notion d'angle, qui elle-même permettait de définir un produit scalaire via la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$. Ici, on raisonne dans l'autre sens : la notion d'orthogonalité repose sur la définition préalable d'un produit scalaire. En particulier, à chaque produit scalaire est associée une notion d'orthogonalité, ce qui fait que les angles droits ne sont pas droits absolument, mais relativement.
- La propriété de séparation énonce que **LE VECTEUR NUL EST LE SEUL VECTEUR ORTHOGONAL À LUI MÊME**. En particulier, seul le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Exemple 33.24 –

- Pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n , la base canonique $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{R}^n est orthonormale :
- La base canonique de \mathbb{R}^2 n'est pas orthonormale pour le produit scalaire $(X, Y) \mapsto X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$ sur \mathbb{R}^2 , mais la famille $\left(\frac{(1, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{(1, -2)}{\sqrt{6}} \right)$ l'est.

- Pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est orthonormale.

Exemple 33.25 – La famille de fonctions $c_k : x \mapsto \cos(kx)$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, est orthonormale dans $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$.

Exemple 33.26 – Soit a_0, \dots, a_n des réels deux à deux distincts. Considérons, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme interpolateur de Lagrange

$$L_i(X) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Alors la famille $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une famille orthonormale pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 33.27 – Soit x et y deux vecteurs de même norme. Alors $x - y$ et $x + y$ sont orthogonaux car $\langle x - y, x + y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$. On retrouve l'une des propriétés des losanges.

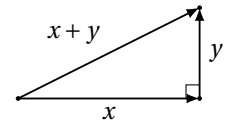
Théorème 33.28 – Propriétés des familles orthogonales

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. **Théorème de Pythagore** : Pour tous $x, y \in E$, x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

En outre, pour toute famille orthogonale $(x_1, \dots, x_n) \in E$: $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

2. **Liberté** : Toute famille orthogonale de vecteurs **NON NULS** de E est libre. En particulier, toute famille orthonormale de E est libre.



Démonstration.

□

Remarque 33.29 – Il est important de noter qu'avec plus de deux vecteurs, la réciproque du théorème de Pythagore est fautive. considérons en effet les vecteurs $e_1 = (2, 0)$, $e_2 = (2, 0)$ et $e_3 = (-1, 2)$ de \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire canonique. Alors

$$\|e_1 + e_2 + e_3\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \|e_3\|^2,$$

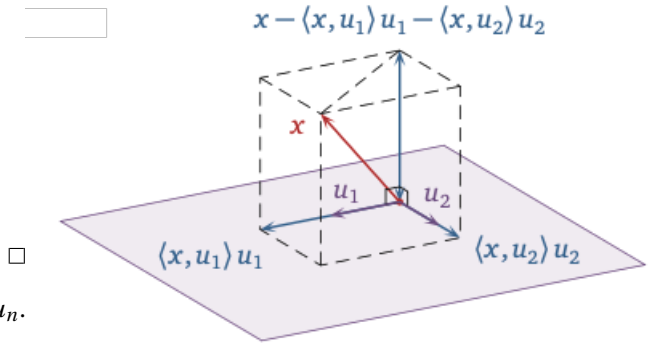
et pourtant ces vecteurs ne sont pas orthogonaux entre eux.

Terminons par un petit résultat qui nous sera bien utile dans la suite du chapitre.

Théorème 33.30

Soient E un espace préhilbertien réel, (u_1, \dots, u_n) une famille **ORTHONORMALE** de E et $x \in E$. Le vecteur $x - \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k$ est orthogonal à u_1, \dots, u_n .

Démonstration.



Quelconque, x n'a aucune raison d'être orthogonal à u_1, \dots, u_n .
 Mais si on le « redresse » correctement, il le devient.

2 – Coordonnées dans une base orthonormale

Nous démontrerons bientôt que tout espace euclidien possède une base orthonormale, mais en attendant, quelques remarques simples sur les coordonnées dans une telle base.

Théorème 33.31 – Coordonnées dans une base orthonormale

Soient E un espace euclidien, (e_1, \dots, e_n) une base ORTHONORMALE de E et $x \in E$.

Alors, $x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$. En d'autres termes, les coordonnées de x dans (e_1, \dots, e_n) sont $(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$.

Démonstration.

□

Théorème 33.32 – Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale

Soient E un espace euclidien et $x, y \in E$ de coordonnées respectives $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ dans une certaine base ORTHONORMALE de E .

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = X^T Y \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \sqrt{X^T X}.$$

Démonstration.

□

En d'autres termes, le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n est un modèle pour tous les produits scalaires des espaces euclidiens. Calculer le produit scalaire $\langle x, y \rangle$ dans un espace euclidien abstrait revient à calculer le produit scalaire canonique des coordonnées des vecteurs x et y dans une base orthonormale quelconque.



ATTENTION ! Ces formules sont fausses en général pour des coordonnées dans une base non orthonormale!

3 – Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 33.33 – Gram-Schmidt

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille libre d'un espace préhilbertien E . Il existe une unique famille orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ telle que pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

- (e_1, \dots, e_p) et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ engendrent le même sous-espace;
- $\langle e_p, \varepsilon_p \rangle > 0$.

La première condition est essentielle pour la construction qui suit alors que la seconde condition ne sert intuitivement qu'à garantir l'unicité (en conservant « l'orientation » de la base).

Démonstration.

□

L'algorithme de Gram-Schmidt construit ε_p en « redressant » e_{p+1} , i.e en le rendant orthogonal à $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}$ (voir le Théorème 33.30) puis en le rendant unitaire.

Exemple 33.34 – Soit $e_1 = (3, 4, 0)$, $e_2 = (5, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ des vecteurs qui forment une base de \mathbb{R}^3 (muni du produit scalaire canonique). Déterminons la base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ associée par l'algorithme de Gram-Schmidt.

Exemple 33.35 – La famille $(1, \sqrt{3}(2X - 1), \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1))$ est orthonormale pour le produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ sur $\mathbb{R}[X]$. Exercice en passant : justifier que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Essentiel en pratique, l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt a aussi des conséquences théoriques.

Théorème 33.36 – Existence de bases orthonormales en dimension finie

1. Tout espace euclidien possède une base orthonormale.
2. **Théorème de la base orthonormale incomplète :** Soit E un espace euclidien. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E .

Démonstration.

□

III – Sous-espace orthogonal et projection orthogonale

1 – Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition-Théorème 33.37 – Soit E un espace préhilbertien réel et X une partie de E . On appelle **orthogonal de X dans E** l'ensemble $X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X, \langle x, y \rangle = 0\}$.

1. X^\perp est un sous-espace vectoriel de E , orthogonal à X .
2. Si X est un sous-espace vectoriel de E , X et X^\perp sont en somme directe.
3. $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$ et $X \subset (X^\perp)^\perp$.

Démonstration.

□

Remarque 33.38 –

- On fera bien attention à noter que X^\perp est un espace vectoriel pour toute partie X , même si X n'est pas un sous-espace vectoriel.
- L'égalité $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$ signifie que pour déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F , il n'est pas nécessaire d'exiger l'orthogonalité à **TOUS** les vecteurs de F , l'orthogonalité à tout vecteur d'une partie génératrice suffit.



ATTENTION ! Pour un sous-espace vectoriel F de E , F et F^\perp sont **TOUJOURS** en somme directe. En revanche, il n'est pas vrai en général que F et F^\perp sont supplémentaires dans E , ils sont seulement en somme directe. Contrairement aux apparences, il n'est pas non plus vrai en général que $F^{\perp\perp} = F$. Nous y reviendrons.

Exemple 33.39 – Pour tout espace préhilbertien réel E : $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

Exemple 33.40 – Dans l'espace euclidien canonique \mathbb{R}^3 , le plan vectoriel d'équation $3x - y + 2z = 0$ n'est jamais que l'orthogonal $\{(3, -1, 2)\}^\perp$ car pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $\langle (3, -1, 2), (x, y, z) \rangle = 3x - y + 2z$. En termes géométriques, le vecteur $(3, -1, 2)$ est normal au plan d'équation $3x - y + 2z = 0$.

Exemple 33.41 – On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P, Q) \mapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$ (c'est bien un produit scalaire puisqu'il s'agit d'un cas particulier de l'exemple 33.8). Montrer que $\mathbb{R}_1[X]^\perp = \text{Vect}(3X^2 - 2)$.

Définition-Théorème 33.42 – Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel **DE DIMENSION FINIE** de E .

1. **Supplémentaire orthogonal :** F^\perp est un supplémentaire de F dans E , orthogonal à F , et c'est même le seul. On l'appelle par conséquent **LE supplémentaire orthogonal** de F dans E . Pour résumer, on écrit souvent les choses ainsi : $E = F \oplus F^\perp$.

ainsi : $E = F \oplus F^\perp$.

En particulier, si E lui-même est de dimension finie : $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

2. **Bi-orthogonal :** $F^{\perp\perp} = F$.

Démonstration.

□



ATTENTION ! Il est ici essentiel que F soit **DE DIMENSION FINIE**. Par ailleurs, il existe un unique supplémentaire orthogonal mais tout plein de supplémentaires en toute généralité.

Exemple 33.43 – Dans l'espace euclidien canonique \mathbb{R}^4 , le plan vectoriel P d'équations $x - y - z - t = 0$ et $2x + y + z - t = 0$ admet $\text{Vect}((1, -1, -1, -1), (2, 1, 1, -1))$ pour orthogonal.

Démonstration.

□

Exemple 33.44 – On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique - cela veut dire qu'on travaille avec le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans ce contexte : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

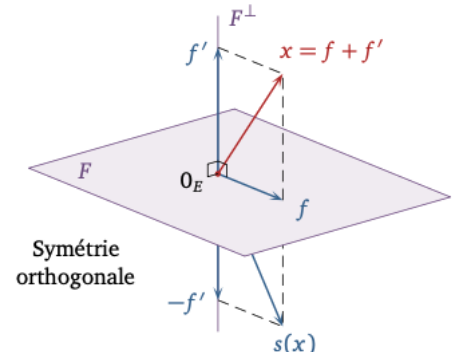
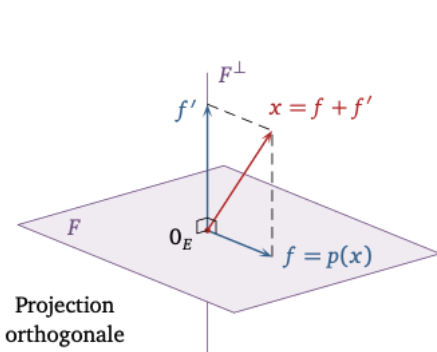
Démonstration.

□

2 – Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition 33.45 – Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel **DE DIMENSION FINIE** de E . On appelle **projection orthogonale sur F** ou **projecteur orthogonal sur F** la projection sur F parallèlement à F^\perp .

Comme F est de dimension finie, d'après le Théorème 33.42, on a $E = F \oplus F^\perp$, et il est donc légitime de parler de la projection sur F parallèlement à F^\perp . On pourrait également s'intéresser à la symétrie par rapport à F parallèlement à F^\perp .



Théorème 33.46 – Expression d'un projeté orthogonal dans une base orthonormale

Soient E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel **DE DIMENSION FINIE** de E et (f_1, \dots, f_n) une base orthonormale de F .

Pour tout $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur F vaut $\sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k$.

Démonstration.

□

Méthode 33.47 –

On peut calculer essentiellement de deux manières un projeté orthogonal. Donnons-nous E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , (f_1, \dots, f_n) une base pas forcément orthonormale de F et $x \in E$. Comment calculer le projeté orthogonal $p(x)$ de x sur F ? Si la base (f_1, \dots, f_n) est orthonormale, on peut bien sûr utiliser le théorème précédent, mais sinon?

- **Première stratégie** : On s'y ramène de force en orthonormalisant (f_1, \dots, f_n) grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt.
- **Deuxième stratégie** : Le projeté $p(x)$ est caractérisé par deux assertions :

$$p(x) \in F \quad \text{et} \quad x - p(x) \in F^\perp.$$

Concrètement, on introduit les coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de $p(x)$ dans (f_1, \dots, f_n) : $p(x) = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$, puis on les calcule grâce aux relations $\langle x - p(x), f_j \rangle = 0$, j décrivant $\llbracket 1, n \rrbracket$. Ces relations expriment l'appartenance de $x - p(x)$ à F^\perp et fournissent un système de n équations à n inconnues qu'on n'a plus qu'à résoudre.

Illustrons ces deux stratégies sur deux exemples.

Exemple 33.48 – Dans \mathbb{R}^4 muni de son produit scalaire canonique, on considère F le sous-espace vectoriel défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0\}.$$

Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 8, 1, 1)$ sur F .



Exemple 33.49 – On note F le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\cos, \sin)$ de $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Le projeté orthogonal de l'identité Id sur F pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ est la fonction $t \mapsto -2 \sin t$.

Démonstration.

□

3 – Distance à un sous-espace de dimension finie

Définition 33.50 – Soit E un espace préhilbertien réel, F un sev de E de dimension finie et $x \in E$. On appelle **distance de x à F** , le réel noté $d(x, F)$ défini par $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

Intuitivement, la distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel F est la plus petite distance séparant x d'un élément de F , mais qui nous dit qu'une telle plus petite distance existe? Elle n'existe justement pas forcément et c'est pour cela que la définition introduit une borne inférieure. Ici, l'ensemble $\{\|x - y\| \mid y \in F\}$ est une partie de \mathbb{R} non vide (car $F \neq \emptyset$) et minorée par 0, donc possède bien une borne inférieure d'après la propriété de la borne inférieure.

Proposition 33.51

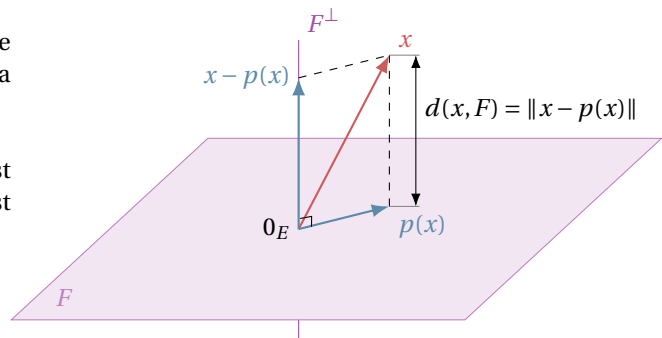
Soit E un espace préhilbertien, $x \in E$ et F un sous-espace de E de dimension finie. Alors $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$, où p_F est la projection orthogonale sur le sous-espace F .

Théorème 33.52 – Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soient E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel **DE DIMENSION FINIE** de E et $x \in E$. On note p la projection orthogonale sur F .

La distance de x à F est mieux qu'une borne inférieure, c'est un minimum : $d(x, F) = \|x - p(x)\|$, et ce minimum n'est atteint qu'en $p(x)$.

Par ailleurs : $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2$.



Démonstration.

□

Exemple 33.53 – Voyons un problème de minimisation classique. Objectif : calculer $\inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt$.