32 | Groupe symétrique et déterminants

I am the Architect, I created the Matrix. I've been waiting for you.

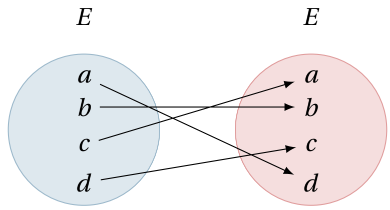
The Architect

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Groupe symétrique

Rappelons tout d'abord que pour E, ensemble non vide, on appelle permutation E de toute bijection de E sur E, et groupe symétrique de E, l'ensemble des permutations de E, noté S_E. Lorsque l'on parlera de « produit » de permutation, ce sera toujours au sens de la loi de groupe sur S_E, i.e la composition.

Il peut être bon de se rappeler la représentation sagitale d'une application bijective : chaque élément de l'ensemble E est « envoyé » sur un unique élément de E. Une permutation de E est donc une sorte de « mélange » des éléments de E.



Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le groupe symétrique de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ est noté S_n plutôt que $S_{[\![1,n]\!]}$.

Commençons par remarquer que $\boxed{\operatorname{Card}(S_n) = n!}$. En effet, construire une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ revient à choisir $\sigma(1)$ dans $[\![1,n]\!]$ (n possibilités), puis $\sigma(2)$ dans $[\![1,n]\!] \setminus \{\sigma(1)\}$ ($n-1$ possibilités), puis $\sigma(3)$ dans $[\![1,n]\!] \setminus \{\sigma(1), \sigma(2)\}$ ($n-2$ possibilités)… et enfin $\sigma(n)$ (il ne reste alors plus qu'une seule possibilité).

Les éléments de S_n peuvent être représentés de plusieurs façons. La première consiste à écrire toute permutation σ sous la forme d'une matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Exemple 32.1 – La permutation σ de $[\![1,4]\!]$ définie par les égalités : $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 3$ est notée

Produit et inversion sont faciles à effectuer à partir de cette représentation. Par exemple, dans S_5 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

Pour l'inverse, lisez simplement la matrice de σ du bas vers le haut au lieu de la lire du haut vers le bas.

Remarque 32.2 – Dans la pratique, lorsqu'il est clair que l'on travaille avec des permutations (et non des matrices par exemple…), on omettra très souvent le symbole $\circ$ de la composition entre deux permutations.

Définition 32.3 – Soit $\sigma \in S_n$. On appelle **support** de σ l'ensemble des éléments de $[\![1,n]\!]$ qui NE sont PAS fixés par σ : $\operatorname{supp}(\sigma) = \{k \in [\![1,n]\!] \mid \sigma(k) \neq k\}$.

Exemple 32.4 – La permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ admet pour support.

Proposition 32.5

Deux permutations à supports disjoints commutent.

Démonstration. On parle bien évidemment de commutativité … pour la composition ! On omet d'ailleurs dans la preuve ci-dessous les symboles $\circ$ de composition.

□

Définition 32.6 –

- **Cycle :** Soit $p \in [\![2, n]\!]$. On appelle p-cycle de $[\![1, n]\!]$ ou cycle de longueur p de $[\![1, n]\!]$ toute permutation σ de $[\![1, n]\!]$ pour laquelle il existe des éléments distincts $x_1, \ldots, x_p$ de $[\![1, n]\!]$ pour lesquels :

$$\sigma(x_1) = x_2, \quad \sigma(x_2) = x_3, \quad \ldots \quad \sigma(x_{p-1}) = x_p \quad \text{et} \quad \sigma(x_p) = x_1$$

  et $\quad \sigma(x) = x \quad$ si x n'est aucun des éléments $x_1, \ldots, x_p$.

  Un tel p-cycle est alors noté $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_p)$, ou $(x_2\ x_3\ \ldots\ x_p x_1)$, ou $(x_3\ x_4\ \ldots\ x_p\ x_1\ x_2)$, etc.
- **Transposition :** Un 2-cycle de $[\![1, n]\!]$ est aussi appelé une transposition de $[\![1, n]\!]$.

Exemple 32.7 –

- La permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
- La permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
- La transposition $(1\ \ 3)$ correspond, dans S_4, à la permutation

Exemple 32.8 – Tâchons de décrire explicitement les groupes S_2 et S_3. D'après ce qui a été dit précédemment, on sait déjà que $\mathrm{Card}(S_2) = 2! = 2$ et que $\mathrm{Card}(S_3) = 3! = 6$.

Théorème 32.9 – Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints

Toute permutation de $[\![1, n]\!]$ peut être décomposée d'une et une seule manière - à l'ordre des facteurs près - comme un produit de cycles disjoints.

Puisque les cycles en jeu sont à supports disjoints, ils commutent (Proposition 32.5) et donc l'ordre dans lequel on les écrit n'a pas d'importance.

Démonstration. La démonstration ci-dessous n'est pas exigible et est donnée à titre indicatif. Nous prouverons par ailleurs seulement l'existence d'une telle décomposition. Soit $\sigma \in S_n$. On définit une relation $\sim$ sur $[\![1, n]\!]$ de la manière suivante - pour tous $x, y \in [\![1, n]\!]$: $\quad x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad y = \sigma^k(x)$.

- La relation $\sim$ ainsi définie est une relation d'équivalence. En effet, soient $x, y, z \in [\![1, n]\!]$.
  Réflexivité : $x = \mathrm{Id}(x) = \sigma^0(x)$, donc $x \sim x$.
  Symétrie : Si $x \sim y$, alors $y = \sigma^k(x)$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, donc $x = \sigma^{-k}(x)$, i.e. $y \sim x$.
  Transitivité : Si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $y = \sigma^k(x)$ et $z = \sigma^l(y)$ pour certains $k, l \in \mathbb{Z}$, donc $z = \sigma^{k+l}(x)$, i.e. $x \sim z$.
  Notons alors $X_1, \ldots, X_r$ les classes d'équivalence de $[\![1, n]\!]$ pour $\sim$ et choisissons x_1 dans $X_1, \ldots, x_r$ dans X_r. Par définition, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $X_i = \left\{\sigma^k(x_i) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Comme X_i est un ensemble fini : $\sigma^k(x_i) = \sigma^l(x_i)$ pour certains $k, l \in \mathbb{N}$ pour lesquels $k < l$, et donc $\sigma^{l-k}(x_i) = x_i$. Nous pouvons dès lors noter p_i le plus entier naturel non nul pour lequel $\sigma^{p_i}(x_i) = x_i$. Il n'est alors pas trop dur de se convaincre que $X_i = \left\{x_i, \sigma(x_i), \ldots, \sigma^{p_i-1}(x_i)\right\}$ avec $|X_i| = p_i$ - via une petite division euclidienne par p_i.
- Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, notons finalement σ_i le p_i-cycle $\left(x_i \sigma(x_i) \ldots \sigma^{p_i-1}(x_i)\right)$ de support X_i. Ce sont là r cycles disjoints et pour tout $i \in [\![1, r]\!]$: $\sigma_{i|_{X_i}} = \sigma_{|X_i}$ et $\sigma_{i|_{[\![1,n]\!] \setminus X_i}} = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!] \setminus X_i}$. Il en découle que $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_r$ et c'est bien une telle décomposition qu'on cherchait.

□

Exemple 32.10 – Décomposer en produit de cycles à supports disjoints les permutations suivantes :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\end{pmatrix} =$$

Théorème 32.11 – Décomposition en produit de transpositions

Toute permutation de $[\![1, n]\!]$ peut être décomposée comme un produit de transposition.

En d'autres termes, quand on doit permuter n objets - quelle que soit la complexité apparente de la permutation - on peut toujours le faire progressivement par des échanges de deux objets.

Démonstration. Grâce au théorème précédent, il nous suffit d'établir le résultat dans le seul cas des cycles. Or tout simplement, pour tous $x_1, \ldots, x_p \in [\![1, n]\!]$ distincts : $(x_1 \ldots x_p) = (x_1 x_2)(x_2 x_3) \ldots (x_{p-1} x_p)$, donc en effet tout cycle est un produit de transpositions. □

Attention, la décomposition d'une permutation en produit de transpositions **N**'est **PAS DU TOUT** unique, par exemple : $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$. À défaut d'unicité, cela dit, deux décompositions en produit de transpositions d'une même permutation n'ont-elles rien de commun ? Nous allons voir que si. Deux décompositions de ce genre ne font pas forcément intervenir les mêmes nombres p et p' de transpositions, **MAIS** p et p' ont **TOUJOURS** la même parité.

Définition-Théorème 32.12 –

- **Signature :** Il existe un et un seul morphisme de groupes ε de S_n dans $\{-1, 1\}$ qui donne à toute transposition la valeur -1 . On l'appelle la signature de S_n.
- Permutation paire/impaire : Pour tout $\sigma \in S_n$, on dit que σ est paire si $\varepsilon(\sigma) = 1$ et impaire si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

En dépit du mystère qui l'entoure, la signature sera un allié précieux dans la construction du déterminant.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est encore une fois non exigible.

- Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des paires $\{i, j\}$ d'entiers $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts, et pour toute permutation $\sigma \in S_n$, μ_σ l'application $\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \{i, j\} & \longmapsto & \{\sigma(i), \sigma(j)\},\end{array}\right.$ bijective de réciproque $\mu_{\sigma^{-1}}$. Cette bijectivité nous autorise à effectuer le changement d'indice $\{u, v\} = \mu_\sigma(\{i, j\})$: $\displaystyle\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}} |\sigma(j) - \sigma(i)| = \prod_{\{u,v\} \in \mathcal{P}} |v - u| = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}} |j - i|$. Le produit $\displaystyle\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$ vaut donc ± 1, notons-le $\varepsilon(\sigma)$.
- Montrons que ε est un morphisme de groupes. Pour tous $\sigma, \sigma' \in S_n$:

$$\begin{aligned}(\sigma\sigma') &= \prod_{\{i,j\} \in \mathscr{P}} \frac{\sigma\sigma'(j) - \sigma\sigma'(i)}{j - i} = \prod_{\{i,j\} \in \mathscr{P}} \frac{\sigma\sigma'(j) - \sigma\sigma'(i)}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \times \prod_{\{i,j\} \in \mathscr{P}} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j - i} \\ &= \prod_{\{u,v\} \in \mathscr{P}} \frac{\sigma(v) - \sigma(u)}{v - u} \times \prod_{\{i,j\} \in \mathscr{P}} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j - i} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon\left(\sigma'\right) \quad \text{après le changement d'indice } \{u, v\} = \mu_{\sigma'}(\{i, j\})\end{aligned}$$

- Soit $\tau = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \in S_n$ une transposition avec $a < b$. Pour montrer l'égalité $\varepsilon(\tau) = -1$, nous allons simplement passer en revue les uns après les autres les termes du produit $\varepsilon(\tau) = \prod_{\{i,j\}\in\mathcal{P}} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}$.
  — Si $\{i,j\} \in \mathcal{P}$ ne contient ni a ni b : $\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i} = \frac{j-i}{j-i} = 1$.
  — Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ distinct de a et b, regroupons les termes d'indices $\{i,a\}$ et $\{i,b\}$. Leur contribution au produit vaut $\frac{\tau(a)-\tau(i)}{a-i} \times \frac{\tau(b)-\tau(i)}{b-i} = \frac{b-i}{a-i} \times \frac{a-i}{b-i} = 1$.
  — Pour finir, le terme d'indice $\{a,b\}$ vaut -1 car $\frac{\tau(b)-\tau(a)}{b-a} = \frac{a-b}{b-a} = -1$.

  Conclusion : $\varepsilon(\tau) = -1$ par produit.
- Pour l'unicité de la signature sur S_n, soient η et η' deux applications de S_n dans $\{-1,1\}$ qui satisfont la conclusion du théorème. Pour tout $\sigma \in S_n$, disons $\sigma = \tau_1 \dots \tau_p$ où $\tau_1, \dots, \tau_p$ sont des transpositions : $\eta(\sigma) = \eta(\tau_1)\dots\eta(\tau_p) = (-1)^p = \eta'(\tau_1)\dots\eta'(\tau_p) = \eta'(\tau_1\dots\tau_p) = \eta'(\sigma)$, donc $\eta = \eta'$.

□

Dans la pratique, le calcul de la signature d'une permutation se fait très souvent via la proposition suivante.

Proposition 32.13 – Signature d'un cycle

Soit $p \in [\![2,n]\!]$. La signature d'un p-cycle de $[\![1,n]\!]$ est $(-1)^{p-1}$.

Démonstration.

□

Exemple 32.14 – $\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & 6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}$ est une permutation paire.

II – Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

1 – Formes multilinéaires alternées

Définition 32.15 – Soient $E_1, \dots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ une application. On dit que f est n-**linéaire** si :

pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et pour tout $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \dots \times E_n$ fixé,
l'application $x \longmapsto f(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n)$ est linéaire de E_k dans F.

On dit que f est **bilinéaire** si $n = 2$, **trilinéaire** si $n = 3$, et si $F = \mathbb{K}$, que f est une **forme n-linéaire**.

En résumé, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, f est linéaire par rapport à sa k-ième variable quand on fixe les $n-1$ variables restantes. Bien sûr, une application 1-linéaire n'est rien d'autre qu'une application linéaire.

Exemple 32.16 –

- Dans $\mathbb{R}^2$, le produit scalaire $(x_1, x_2)\cdot(y_1, y_2) \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$ est une forme bilinéaire.
- Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, le produit vectoriel $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$ est bilinéaire.
- Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, la multiplication par un scalaire $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ est bilinéaire de $\mathbb{K} \times E$ dans E.
- Le produit matriciel $(A, B) \longmapsto AB$ est bilinéaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$.
- Pour tous $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, E' et E'', la composition $(f, g) \longmapsto g \circ f$ est bilinéaire de $\mathcal{L}\left(E, E'\right) \times \mathcal{L}\left(E', E''\right)$ dans $\mathcal{L}\left(E, E''\right)$.

Définition 32.17 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une forme n-linéaire de E^n. On dit que f est **alternée** si f est nulle sur toute famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux.

Théorème 32.18 – Propriétés des formes multilinéaires alternées

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une forme n-linéaire alternée de E^n.

1. f est nulle sur toute famille liée.
2. On ne change pas la valeur de f quand on ajoute à l'une de ses variables une combinaison linéaire des autres.
3. f est **antisymétrique** - cela revient à dire que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ pour lesquels $i < j$:

$$f\left(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots\right) = -f\left(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots\right).$$

Démonstration.

□

2 – Déterminant dans une base donnée

Proposition 32.19

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\boxed{n}$. L'ensemble des formes $\boxed{n}$-linéaires alternées sur E est un espace vectoriel de dimension 1. Plus précisément, si E est un espace vectoriel de dimension n dont une base est $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, alors, pour toute forme n-linéaire alternée f, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n, \quad f(x_1, \cdots, x_n) = \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(j),j},$$

où, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i$, c'est-à-dire que les $(x_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont les coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration.

□

Définition 32.20 – Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On appelle **déterminant en base** $\mathcal{B}$ l'unique forme n-linéaire alternée f telle que $f(e_1, \cdots, e_n) = 1$. On la note $\det_{\mathcal{B}}$.
D'après la proposition précédente,

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n, \quad \det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(j),j},$$

où pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $x_{i,j}$ désigne la i-ième coordonnée de x_j dans $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $(x_1,\cdots,x_n)\in E^n$ et pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, on note $x_{i,j}$ la i-ième coordonnées de x_j dans $\mathcal{B}$. Alors on note

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n}\\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n}\end{vmatrix}.$$

Remarque 32.21 – Utilisons cette formule explicitement dans le cas $n=2$ et $n=3$.

- S_2 contient deux éléments : l'identité de signature 1 et la transposition $(1\ 2)$ de signature -1.

  Par conséquent $\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2}\\ x_{2,1} & x_{2,2}\end{vmatrix}=1\cdot x_{1,1}x_{2,2}+(-1)\cdot x_{1,2}x_{2,1}$, ce que vous connaissez déjà sous la formule

  $$\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{K}^4,\qquad \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc.$$

- S_3 contient 6 éléments : l'identité, 3 transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(2\ 3)$ de signature (-1), et 2 permutations circulaires $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$ de signature 1. Par conséquent,

  $$\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3}\\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3}\\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3}\end{vmatrix}=1\cdot x_{1,1}x_{2,2}x_{3,3}+1\cdot x_{2,1}x_{3,2}x_{1,3}+1\cdot x_{3,1}x_{1,2}x_{2,3}$$
  $$+(-1)\cdot x_{1,1}x_{2,3}x_{3,2}+(-1)\cdot x_{1,3}x_{2,2}x_{3,1}+(-1)\cdot x_{1,2}x_{2,1}x_{3,3}.$$

  Ce résultat s'appelle règle de Sarrus. Il ne faut **PAS RETENIR** cette formule (cf méthodes de calcul d'un déterminant plus loin).

3 – Caractérisation des bases

Théorème 32.22 – Propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.

1. **Formule de changement de base :** $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})=\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F})$.
2. **Caractérisation des bases :** $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\neq 0$.

   Dans ce cas : $\det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})=\dfrac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})}$.

Démonstration.

1. L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire alternée, donc de la forme $\det_{\mathcal{B}}=\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}'}$ d'après le théorème 32.19. Pour conclure, évaluer en $\mathcal{F}$.
2. Si $\mathcal{F}$ est une base de E, alors d'après 1 : $1=\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})=\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$, donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est non nul d'inverse $\det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$.
   Réciproquement, par contraposition, si $\mathcal{F}$ n'est pas une base de E, alors $\mathcal{F}$ est liée - car de cardinal n en dimension n. Or $\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire alternée, donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})=0$.

□

Exemple 32.23 – Calculer le déterminant de la famille de polynômes

$$P_1=X^2+5X+3,\quad P_2=2X^2-X+2,\quad P_3=3X+4.$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Que peut on en déduire?

III – Déterminant d'une matrice carrée

1 – Définition et premières propriétés

Définition 32.24 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Par définition, donc : $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$.

ATTENTION ! Seul le déterminant d'une matrice **CARRÉE** est ainsi défini.

Exemple 32.25 – Si l'on note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors : $\det(I_n) = \det_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{B}_n) = 1$.

Théorème 32.26 – Lien entre le déterminant d'une matrice carrée et celui d'une famille de vecteurs dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$$

Démonstration. C'est évident. Les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ sont les coordonnées des vecteurs de X dans la base B, et les deux déterminants sont définis par la même formule. □

Théorème 32.27 – Premières propriétés du déterminant d'une matrice carrée

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) **Multilinéarité par rapport aux colonnes** : l'application $A \longmapsto \det(A)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est n-linéaire par rapport aux colonnes de A. En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

(ii) **Déterminant d'un produit** : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(iii) **Caractérisation de l'inversibilité** : A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
En outre, dans ce cas : $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

(iv) **Invariance par similitude** : Deux matrices semblables ont même déterminant.
Autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\det\left(P^{-1}AP\right) = \det(A)$$

(v) **Invariance par transposition** : $\det\left(A^\top\right) = \det(A)$..
A fortiori, l'application $A \longmapsto \det(A)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est également n-linéaire par rapport aux lignes de A.

En particulier, d'après (ii) et (iii), det est un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$.

ATTENTION ! Le déterminant n'est pas linéaire. En général, si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\det(\lambda A + \mu B) \cancel{=} \lambda \det(A) + \mu \det(B)$$

Démonstration.

$\square$

2 – Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Théorème 32.28 – Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Pour tous $A_1 \in \mathcal{M}_{p_1}(\mathbb{K})$, ... , $A_r \in \mathcal{M}_{p_r}(\mathbb{K})$:

$$\begin{vmatrix} A_1 & \times & \times \\ & \ddots & \times \\ & & A_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & & \\ \times & \ddots & \\ \times & \times & A_r \end{vmatrix} = \det(A_1)\dots\det(A_r)$$

De plus, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Démonstration. L'invariance par transposition permet de ne travailler qu'avec des matrices triangulaires supérieures par blocs.

- **Cas d'une matrice triangulaire tout court :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.

  Dans la relation $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$, si le terme associé à une permutation σ est non nul, alors $a_{\sigma(i)i} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, donc $\sigma(i) \leqslant i$. Il est alors facile de se convaincre (et pas beaucoup plus difficile de le démontrer par récurrence forte) qu'en fait $\sigma(i) = i$.

  Conclusion : si le terme associé à une permutation σ est non nul dans la définition de $\det(A)$, forcément $\sigma = \mathrm{Id}$. En retour : $\det(A) = \varepsilon(\mathrm{Id}) \prod_{i=1}^{n} a_{\mathrm{Id}(i)i} = a_1 \dots a_n$.

- **Cas d'une matrice triangulaire par blocs :** Nous prouverons seulement le résultat pour $r = 2$, le cas général s'obtient ensuite aisément par récurrence. Fixons $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et notons $\mathcal{B}_p$ (resp. $\mathcal{B}_q$) la base canonique de $\mathbb{K}^p$ (resp. $\mathbb{K}^q$). Objectif : $\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$.

  L'application $(M_1, \ldots, M_p) \overset{\varphi}{\longmapsto} \begin{vmatrix} M & X \\ 0 & B \end{vmatrix}$ de $(\mathbb{K}^p)^p$ dans $\mathbb{K}$ - où M est la matrice de colonnes $M_1, \ldots, M_p$ - est clairement linéaire alternée, donc $\varphi = \varphi(\mathcal{B}_p)\det_{\mathcal{B}_p}$. A fortiori, en notant $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A :

$$\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \varphi(C_1, \ldots, C_p) = \det_{\mathscr{B}_p}(C_1, \ldots, C_p)\,\varphi(\mathscr{B}_p) = \det(A)\begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & B \end{vmatrix}.$$

  De même, l'application $(N_1, \ldots, N_q) \overset{\psi}{\longmapsto} \begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & N \end{vmatrix}$ de $(\mathbb{K}^q)^q$ dans $\mathbb{K}$ - où N est la matrice de lignes $N_1, \ldots, N_q$ - est linéaire alternée, donc $\psi = \psi(\mathcal{B}_q)\det_{\mathcal{B}_q}$, et en notant $L_1, \ldots, L_q$ les lignes de B :

$$\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\psi(L_1, \ldots, L_q) = \det(A)\det_{\mathscr{B}_q}(L_1, \ldots, L_q)\,\psi(\mathscr{B}_q) = \det(A)\det(B)\begin{vmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{vmatrix},$$

  et donc comme la matrice $\begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ est « vraiment » triangulaire : $\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$.

$\square$

Exemple 32.29 –

- $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$
- $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$.

3 – Calcul de déterminants par la méthode du pivot

Fixons à présent $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$ et notons $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

- Par linéarité par rapport à la j ème variable et caractère alterné de l'application $\det_{\mathcal{B}_n}$:

$$\det_{\mathcal{B}_n}(\ldots, C_j + \lambda C_i, \ldots) = \det_{\mathcal{B}_n}(C_1, \ldots, C_n) + \lambda \det_{\mathcal{B}_n}(\ldots, C_i, \ldots) = \det(A) + 0 = \det(A).$$

- Par linéarité par rapport à la j ème variable : $\det_{\mathcal{B}_n}(\ldots, \lambda C_j, \ldots) = \lambda \det_{\mathcal{B}_n}(C_1, \ldots, C_n) = \lambda \det(A)$.
- Par caractère alterné : $\det_{\mathcal{B}_n}(\ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots) = -\det_{\mathcal{B}_n}(\ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots) = -\det(A)$.

En résumé, on dispose du résultat suivant :

Théorème 32.30 – Déterminant d'une matrice et opérations élémentaires

Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ ne modifient pas les déterminants.
- Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $C_j \leftarrow \lambda C_j$ multiplient les déterminants par λ.
- Les opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_j \leftrightarrow C_i$ multiplient les déterminants par -1 .

Il nous a suffi de montrer le résultat sur les colonnes car le déterminant est invariant par transposition.

Exemple 32.31 –

1. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Calculer $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$.

4 – Développement par rapport à une ligne/colonne

Proposition 32.32 – Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\Delta_{i,j}$ la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A.

1. Pour tout $i_0 \in [\![1, n]\!]$, on a $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0,j} \det(\Delta_{i_0,j})$. (Développement par rapport à la ligne L_{i_0})
2. Pour tout $j_0 \in [\![1, n]\!]$, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{i,j_0} \det(\Delta_{i,j_0})$. (Développement par rapport à la colonne C_{j_0})

Démonstration. Nous démontrons la formule de développement par rapport à une colonne ; celle par rapport à une ligne s'en déduit par transposition.

Soit $A = \left(C_1, \ldots, C_n\right)$ où C_j désigne la j-ème colonne de A. On travaille avec la base canonique $\left(E_1, \ldots, E_n\right)$ de $\mathbb{K}^n$, de sorte que l'on peut écrire la j-ème colonne sous la forme $\quad C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i$.

Donc par multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes, on a :

$$\det(A) = \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) = \det\left(C_1, \ldots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i, C_{j+1}, \ldots, C_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \ldots, C_n).$$

Fixons i. Étudions :
$$D_{ij} = \det(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n).$$

On effectue des permutations de colonnes pour amener E_i en première position. Chaque échange de colonnes change le signe du déterminant. Pour amener E_i de la position j à la position 1, il faut j transpositions, ce qui donne un facteur $(-1)^j$.

Ensuite, on échange les lignes pour placer le 1 de E_i sur la diagonale. Cela introduit un facteur supplémentaire $(-1)^i$.

Au total, on obtient un facteur global :
$$(-1)^{i+j}.$$

Après ces opérations, la matrice devient triangulaire par blocs, et son déterminant est exactement le terme $\det\big(\Delta_{ij}(A)\big)$.

Ainsi :
$$D_{ij} = (-1)^{i+j}\det\big(\Delta_{ij}(A)\big).$$

En reportant dans la somme :
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det\big(\Delta_{ij}(A)\big).$$

Ceci établit le développement par rapport à la j-ème colonne. □

Voici ce que ce résultat donne pour les matrice de taille 3 et 4.

- ▹ Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 : on met en exposant à gauche des coefficients entre parenthèses la valeur de $(-1)^{i+j}$ où i et j sont les numéros respectifs de la ligne et de la colonne de ce coefficient.

  Développement suivant une colonne :
$$\det(A) = \begin{vmatrix} {}^{(+)}a & {}^{(-)}b & {}^{(+)}c \\ {}^{(-)}d & {}^{(+)}e & {}^{(-)}f \\ {}^{(+)}g & {}^{(-)}h & {}^{(+)}k \end{vmatrix} = \begin{cases} a\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la première colonne)} \\ -b\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la deuxième colonne)} \\ c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la troisième colonne)} \end{cases}$$

  Développement suivant une ligne :
$$\det(A) = \begin{vmatrix} {}^{(+)}a & {}^{(-)}b & {}^{(+)}c \\ {}^{(-)}d & {}^{(+)}e & {}^{(-)}f \\ {}^{(+)}g & {}^{(-)}h & {}^{(+)}k \end{vmatrix} = \begin{cases} a\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la première ligne)} \\ -d\begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la deuxième ligne)} \\ g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} & \text{(développement par rapport à la troisième ligne)} \end{cases}$$

- ▹ Voici un exemple de développement d'un déterminant d'une matrice d'ordre $n \geqslant 4$.

  Soit $A = (a_{i,j})_{i \leqslant i,j \leqslant 4}$ une matrice carrée d'ordre 4 à coefficients dans $\mathbb{K}$.

  Le développement suivant la première colonne donne :
$$\det(A) = \begin{vmatrix} {}^{(+)}a_{1,1} & {}^{(-)}a_{1,2} & {}^{(+)}a_{1,3} & {}^{(-)}a_{1,4} \\ {}^{(-)}a_{2,1} & {}^{(+)}a_{2,2} & {}^{(-)}a_{2,3} & {}^{(+)}a_{2,4} \\ {}^{(+)}a_{3,1} & {}^{(-)}a_{3,2} & {}^{(+)}a_{3,3} & {}^{(-)}a_{3,4} \\ {}^{(-)}a_{4,1} & {}^{(+)}a_{4,2} & {}^{(-)}a_{4,3} & {}^{(+)}a_{4,4} \end{vmatrix} = a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{3,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{4,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix}.$$

  Remarquons qu'on peut calculer ce déterminant car le calcul fait apparaître des déterminants de matrices d'ordre 3, que l'on sait calculer.

  On dispose donc d'une méthode pour calculer le déterminant des matrices d'ordre 4.

- ▹ En procédant de la même façon (développement suivant une ligne ou une colonne), on peut calculer le déterminant d'une matrice d'ordre 5 en faisant intervenir des déterminants de matrices d'ordre 4 qu'on calcule suivant la méthode précédente.

- ▹ En itérant le procédé, on peut définir par récurrence une méthode de calcul du déterminant d'une matrice d'ordre n à partir des déterminants de matrices d'ordre $n-1$.

Exemple 32.33 – Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ en développant par rapport à la dernière colonne.

Le développement par rapport à une ligne/colonne est souvent utile, mais dans la mesure du possible, il faut choisir de développer par rapport à une ligne/colonne contenant beaucoup de zéros. En règle générale, je vous conseille de privilégier la méthode du pivot, qui fournit davantage des résultats sous forme factorisée - car après tout, ce que l'on veut savoir d'un déterminant, c'est souvent s'il est nul ou non.

Exemple 32.34 –

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

Exemple 32.35 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ où la matrice est de taille n.

Exemple 32.36 – Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(x_j - x_i\right)$$

Ce déterminant est appelé, « déterminant de Vandermonde », et contrairement à ce que l'on pourrait penser, il n'a rien d'anecdotique et apparaît dans de nombreuses situations.

Démonstration.

$\square$

5 – Comatrice et formule d'inversion

Définition 32.37 – Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.

- **Mineurs :** On appelle mineur de A de position (i, j) le déterminant de la matrice extraite de A par suppression de la i-ième ligne et de la j-ième colonne. Nous le noterons $\Delta_{ij}(A)$ ici mais la notation n'est pas universelle.
- **Cofacteurs :** On appelle cofacteur de A de position (i, j) le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)$.
- **Comatrice :** On appelle comatrice de A la matrice des cofacteurs de A : $\quad \mathrm{com}(A) = \Big((-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Exemple 32.38 – La comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice

Théorème 32.39 – Formule d'inversion

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\qquad A\,\mathrm{com}(A)^\top = \mathrm{com}(A)^\top A = \det(A) I_n$.

En particulier, si A est inversible : $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\mathrm{com}(A)^\top$.

Démonstration. Nous montrerons seulement que $A\,\mathrm{com}(A)^\top = \det(A) I_n$, i.e. que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k}\Delta_{jk}(A) = \det(A)\delta_{ij}.$$

Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$.

- Pour $i = j$, le résultat n'est qu'un développement par rapport à la i ème ligne.
- Et pour $i \neq j$? Remplaçons dans A la j-ième ligne par la $i^{\text{ème}}$ et notons B la matrice obtenue. Les i-ième et j-ième lignes de B étant égales : $\det(B) = 0$. Développons par ailleurs $\det(B)$ par rapport à sa j-ième ligne. Les mineurs $\Delta_{jk}(A)$ de A et $\Delta_{jk}(B)$ de B associés à cette ligne étant égaux :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k}\Delta_{jk}(A) = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}(-1)^{j+k}\Delta_{jk}(B) = \det(B) = 0.$$

$\square$

Exemple 32.40 – Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$: $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\mathrm{com}(A)^\top = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Résultat bien connu !

ATTENTION ! La formule d'inversion est plus satisfaisante pour l'esprit qu'en pratique. Ne vous en servez pas pour inverser une matrice concrète ! Elle ramène en effet le calcul de A^{-1} au calcul de $\det(A)$ et $\mathrm{com}(A)$, c'est-à-dire au calcul d'un déterminant de taille n et de n^2 déterminants de taille $n-1$ - ce qui est fort coûteux.

IV – Déterminant d'un endomorphisme

Considérons un endomorphisme f d'un espace vectoriel E et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Notons A la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$, A' la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
On a $A' = P^{-1}AP$ donc

$$\det(A') = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P') = \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \det(A).$$

On vient de montrer que les déterminants de toutes les matrices représentant l'endomorphisme f sont égaux. Cette propriété nous permet définir le déterminant d'un endomorphisme :

Théorème 32.41 – Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. Les matrices de f relativement à une base quelconque de E ont toutes le même déterminant.

Ce determinant commun est appelé **déterminant** de f et est noté $\det(f)$.

On déduit des propriétés du déterminant d'une matrice et des matrices des endomorphismes :

Proposition 32.42 – Propriétés du déterminant d'endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.
2. $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
3. $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$ et donc $\det(g \circ f) = \det(f \circ g)$.
4. f est bijective si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$.
5. Si f est bijective, $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Exemple 32.43 – Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P(0)X^2 + P - P' \end{array}$, on peut montrer facilement qu'il s'agit bien d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculons son déterminant.