31 Variables aléatoires réelles

> La fusée interplanétaire des Shadoks n'était pas très au point, mais ils avaient calculé qu'elle avait quand même une chance sur un million de marcher. Et ils se dépêchaient de bien rater les 999999 premiers essais pour être sûrs que le millionième marche.
>
> Jacques Rouxel.

I – Généralités sur les variables aléatoires

1 – Définitions et exemples

Quand on étudie une probabilité, l'univers Ω (l'ensemble des résultats possibles) n'est pas forcément composé d'objets mathématiques : par exemple $\{\text{PILE}, \text{FACE}\}$. Dans ce cas, à chaque issue, on associe un nombre réel. On définit ainsi une fonction de l'univers Ω dans $\mathbb{R}$. On peut par exemple considérer le gain obtenu à l'issu d'un jeu de hasard ou encore le temps d'attente d'un bus. Dans toute la suite, Ω désigne un univers fini et E un ensemble quelconque.

Définition 31.1 – Une **variable aléatoire** X est une application $X : \Omega \longrightarrow E$. Dans la plupart des situations, $E = \mathbb{R}$ et on parle alors de **variable aléatoire réelle**.
On appelle **support** de X et on note $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par X.

En dépit de son nom, une variable aléatoire sur Ω n'est pas une variable, c'est une fonction. De plus, en tant que fonction, une variable aléatoire associe fixement une valeur à tout élément de Ω et ceci n'a rien d'aléatoire. L'aléatoire fera irruption quand nous attribuerons à tout événement de Ω une probabilité, i.e. une certaine mesure de sa vraisemblance.

Exemple 31.2 – Tout au long de ce chapitre, on s'appuie sur les deux exemples suivants pour illustrer les différentes notions rencontrées.

1. Pour modéliser le lancer d'un dé à 6 faces 2 fois, on peut choisir pour univers Ω l'ensemble $[\![1,6]\!]^2$ des couples de $[\![1,6]\!]$. La fonction Y_1 (resp. Y_2) « valeur obtenue au premier (resp. deuxième) lancer » est une variable aléatoire réelle sur Ω d'image $[\![1,6]\!]$. La fonction $X = Y_1 + Y_2$ en est une autre, de support $[\![2,12]\!]$.
   Par exemple, pour $\omega = (2,5) \in \Omega$: $\quad Y_1(\omega) = 2, \qquad Y_2(\omega) = 5 \qquad$ et $\qquad X(\omega) = 7$.
2. Pour modéliser le tirage simultané de 4 entiers entre 1 et 10 , on peut choisir pour univers Ω l'ensemble des parties à 4 éléments de $[\![1,10]\!]$. La fonction X « plus petit entier tiré » est une variable aléatoire réelle sur Ω de support $[\![1,7]\!]$ - comme on tire 4 entiers, il est impossible que le plus petit entier tiré vaille 8,9 ou 10 .

   Par exemple, pour $\omega = \{2,5,6,8\} \in \Omega$: $\quad X(\omega) = 2$.

2 – Évènements associés à une variable aléatoire

Définition 31.3 – Soit X une variable aléatoire sur Ω et $x \in E$. On note $\quad [X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.
De la même manière, si $E = \mathbb{R}$, on définit

$$[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}, \qquad [X < x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\},$$

$$[X \geqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\}, \qquad [X > x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}.$$

Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors on note

$$[x \leqslant X \leqslant y] = \{\omega \in \Omega \mid x \leqslant X(\omega) \leqslant y\}.$$

Plus généralement, si I désigne une partie de $\mathbb{R}$, on note

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}.$$

Exemple 31.4 – On reprend les deux exemples de l'exemple 31.2 et les notations associées.

1. Calculer $P(X=3)$ et $P(X \leqslant 2)$.
   La somme des deux dés vaut 3 si on obtient $(1,2)$ ou $(2,1)$ avec les deux dés. Puisqu'il y a au total 36 issues possibles, alors
   $$P(X=3) = P\big(\{(1,2),(2,1)\}\big) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$
   Par ailleurs, la somme des deux dés est inférieure ou égale à 2 seulement lorsque l'on obtient $(1,1)$ avec les deux dés. Ainsi
   $$P(X \leqslant 2) = P\big(\{(1,1)\}\big) = \frac{1}{36}.$$

2. Calculer $P(X \geqslant 6)$.
   Notons tout d'abord que $P(X \geqslant 6) = P(X=6) + P(X=7)$.
   La seule possibilité pour obtenir 7 correspond au tirage $\{7,8,9,10\}$. Pour obtenir 6, la situation est un peu plus compliquée. Il faut qu'un des tirages soit un 6, les trois autres tirages sont ensuite à choisir parmi les valeurs 7, 8, 9 ou 10, soit $\binom{4}{3} = 4$ possibilités. Puisqu'il y a $\binom{10}{4} = 210$ tirages possibles, on a :
   $$P(X \geqslant 6) = \frac{1}{210} + \frac{4}{210} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$$

Proposition 31.5

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Alors $\big\{[X=x] \mid x \in X(\Omega)\big\}$, l'ensemble des événements $[X=x]$ pour tous les x du support $X(\Omega)$, forme un système complet d'évènements. En particulier,
$$\sum_{x \in X(\Omega)} P\big([X=x]\big) = 1.$$

Exemple 31.6 – On reprend les deux exemples de l'exemple 31.2.

1. Un système complet d'évènements est donné par $\big\{[X=2],[X=3],[X=4],\dots,[X=12]\big\}$.
2. Un système complet d'évènements est donné par $\big\{[X=1],[X=2],[X=3],\dots,[X=7]\big\}$.

Remarque 31.7 – Dans toute la suite, on convient d'alléger la notation $P\big([X=x]\big)$ en $P(X=x)$ et de même pour les autres ensembles.

3 – Loi d'une variable aléatoire finie

Définition-Théorème 31.8 – Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ à valeurs dans un ensemble E.
On appelle **loi de probabilité de** X (ou simplement loi de X), la probabilité P_X définie sur $X(\Omega)$ par
$$P_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0;1] \\ A & \longmapsto & P(X \in A) \end{array}$$
Autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, $P_X(A) = P(X \in A)$.

Démonstration. Montrons que P_X est une probabilité.

- Pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, $P_X(A) = P(\{X \in A\}) \in [0,1]$. Donc P_X est bien définie.
- $P_X(X(\Omega)) = P(X \in X(\Omega)) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in X(\Omega)\}) = P(\Omega) = 1$.
- Soient A et B des parties incompatibles de $X(\Omega)$. Alors,

$$\begin{aligned} P_X(A \cup B) &= P\big(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A \cup B\}\big) = P\big(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \cup \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}\big) \\ &= P\big(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}\big) + P\big(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}\big) = P_X(A) + P_X(B) \end{aligned}$$

Donc P_X est bien une probabilité. □

Exemple 31.9 – Avec la variable aléatoire X du premier exemple de l'exemple 31.2 de ce cours,

$$P_X\big([\![2,4]\!]\big) = P\big(X \in [\![2,4]\!]\big) = P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) = \frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Proposition 31.10 – Distribution de probabilités d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

1. La famille $\big(P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est une distribution de probabilités sur $X(\Omega)$ appelée la distribution de probabilités de X.
2. La donnée de la distribution de probabilités $\big(P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ détermine entièrement la loi de X : plus précisément, on a

$$\forall A \in \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big), \quad P(X\in A) = P_X(A) = \sum_{x\in A} P(X=x).$$

Démonstration. Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $P(X=x) = P_X\big(\{x\}\big)$. Or, puisque P_X est une probabilité, la famille $\big(P_X\{x\}\big)\big)_{x\in X(\Omega)}$ des probabilités des événements élémentaires $\{x\}$ de $X(\Omega)$ forme une distribution de probabilités (théorème 26.33) et on a

$$P(X\in A) = P_X(A) = \sum_{x\in A} P_X\big(\{x\}\big) = \sum_{x\in A} P(X=x).$$

□

Méthode 31.11 – Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie

1. On détermine le support $X(\Omega)$, i.e l'ensemble des valeurs prises par X.
2. On calcule les probabilités $P(X=x)$ pour tous les $x\in X(\Omega)$.

On résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec sur la première ligne l'ensemble des valeurs prises par X et sur la seconde ligne les probabilités correspondantes.

Exemple 31.12 – On reprend les deux exemples de l'exemple 31.2.

1. On calcule les 11 probabilités

$$P(X=2) = P\big(\{(1,1\}\big) = \frac{1}{36}, \qquad P(X=3) = P\big(\{(1,2),(2,1)\}\big) = \frac{2}{36}, \qquad P(X=4) = P\big(\{(1,3),(2,2),(3,1)\}\big) = \frac{3}{36}, \qquad \text{etc.}$$

Finalement on obtient le tableau suivant :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. On procède de la même manière. La valeur de X étant donnée, on connait une des valeurs du tirage, il reste donc 3 valeurs à déterminer, qui doivent toutes être strictement plus grande que la valeur prise par X. Cela donne :

$$P(X=1) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{84}{210}, \qquad P(X=2) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{56}{210}, \qquad P(X=3) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{35}{210}, \qquad \text{etc.}$$

Finalement on obtient le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x)$	$\frac{84}{210}$	$\frac{56}{210}$	$\frac{35}{210}$	$\frac{20}{210}$	$\frac{10}{210}$	$\frac{4}{210}$	$\frac{1}{210}$

Remarque 31.13 – On n'oublie pas de vérifier **à chaque fois** que la somme des probabilités inscrites dans le tableau fait 1.

Notation 31.14 – Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Lorsque X et Y ont la même loi, c'est-à-dire lorsque $P_X = P_Y$, on notera $X \sim Y$.

4 – Loi d'une composée

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P)$ à valeurs dans un ensemble E et g une application définie sur un ensemble F contenant $X(\Omega)$ et à valeur dans un ensemble G.

On peut considérer l'application $Y = g\circ X$ définie sur Ω à valeurs dans G :

$$Y : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & G \\ \omega & \longmapsto & g\big(X(\omega)\big) \end{array}$$

Y est une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans G

Méthode 31.15 –
Comment connaître la loi de Y à partir de celle de X ?

Pour cela on procède en deux étapes :
• Première étape : On détermine l'univers image de Y.
Si $X(\Omega) = \{x_1;\dots;x_n\}$, alors $Y(\Omega) = g\big(X(\Omega)\big) = \{g(x_1);\dots;g(x_n)\}$. On fera attention au fait que dans ce dernier ensemble, certains éléments peuvent être égaux.

• Deuxième étape : Pour chaque $y \in Y(\Omega)$:

- ▷ on note $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ tous les éléments de $X(\Omega)$ tels que $g(x_i) = y$, de sorte que

$$\{Y = y\} = \{X = x_{i_1}\}\cup\cdots\cup\{X = x_{i_k}\}.$$

- ▷ On calcule $P(Y = y)$ grâce à :

$$P(Y = y) = P(X = x_{i_1}) + \cdots + P(X = x_{i_k}),$$

les événements étant deux à deux incompatibles.

Exemple 31.16 – On considère un joueur qui lance deux fois, de manière indépendante, une pièce de monnaie équilibrée. À chaque fois qu'il obtient « pile », il gagne un euro et à chaque fois qu'il obtient « face », il perd deux euros. Ici $\Omega = \{\text{PILE};\text{FACE}\}^2$ muni de la probabilité uniforme sur Ω.
On note X le gain algébrique du joueur. Déterminer la loi de X puis celle de $Y = 2X + X^2$?

$$X\big((\text{PILE},\text{PILE})\big) = 2,\quad X\big((\text{PILE},\text{FACE})\big) = -1,\quad X\big((\text{FACE},\text{PILE})\big) = -1,\quad X\big((\text{FACE},\text{FACE})\big) = -4.$$

Donc $X(\Omega) = \{-4,-1,2\}$.
$P_X\big(\{2\}\big) = P(X = 2) = P\big(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega) = 2\}\big) = P\big((\text{PILE},\text{PILE})\big) = \dfrac{1}{4}$.
$P_X\big(\{-1\}\big) = P(X = -1) = P\big(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega) = -1\}\big) = P\big(\{(\text{PILE},\text{FACE}),(\text{FACE},\text{PILE})\}\big) = \dfrac{1}{2}$.
$P_X\big(\{-4\}\big) = P(X = -4) = P\big(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega) = -4\}\big) = P\big((\text{FACE},\text{FACE})\big) = \dfrac{1}{4}$.

Donc la loi de X est entièrement déterminée par :

k	-4	-1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On a ensuite $Y = g\circ X$ avec $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x + x^2 \end{array}$
Puis $Y(\Omega) = g\big(X(\Omega)\big) = g\big(\{-4,-1,2\}\big)$ et $g(2) = 8$, $\quad g(-1) = -1$, $\quad g(-4) = 8$, $\quad$ donc $Y(\Omega) = \{-1,8\}$.
Décrivons les évènements élémentaires de l'univers image :
$\{Y = -1\} = \{X = -1\}$ et $\{Y = 8\} = \{X = 2\}\cup\{X = -4\}$. Donc

$$P(Y = -1) = P(X = -1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(Y = 8) = P(X = 2) + P(X = -4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Donc la loi de Y est entièrement déterminée par :

k	-1	8
$P(Y = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

.

Remarque 31.17 – Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ à valeurs dans E. Soit g une application définie sur E à valeurs dans F. Si $X \sim Y$, alors $g(X) \sim g(Y)$.

5 – Loi conditionnelle

Théorème 31.18 – Loi de probabilité conditionnellement à un événement

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}, P)$ à valeurs dans un ensemble E. Soit B un événement de probabilité non nulle. On appelle **loi conditionnelle de X sachant B**, la probabilité définie sur $\big(X(\Omega), \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)\big)$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) & \longrightarrow & [0;1] \\ A & \longmapsto & P_B(X \in A). \end{array}$$

Démonstration. C'est bien une probabilité, car P_B est une probabilité sur Ω. □

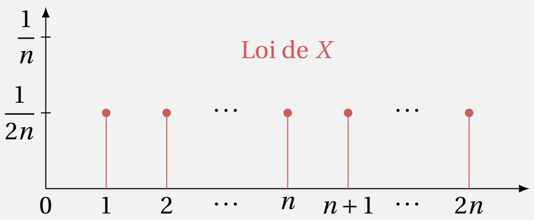
La loi conditionnelle de X sachant B est entièrement déterminée par la distribution de probabilités $(P_B(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

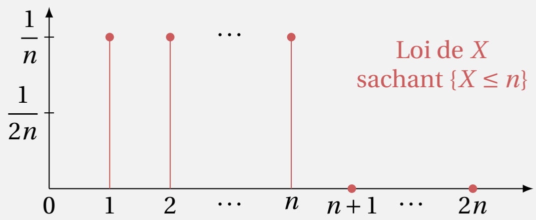
Exemple 31.19 – On choisit un entier X au hasard entre 1 et $2n$. Quelle est la loi de X sachant $\{X \leqslant n\}$?

Par définition : $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 2n \rrbracket)$, donc $P(X \leqslant n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $P_{\{X \leqslant n\}}(X = k) = \dfrac{P(X = k)}{P(X \leqslant n)} = \dfrac{1}{n}$ et pour tout $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$: $P_{\{X \leqslant n\}}(X = k) = 0$,

donc la loi conditionnelle de X sachant $\{X \leqslant n\}$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.





6 – Variables aléatoires indépendantes

Définition 31.20 – Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $\big(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); P\big)$.
On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants c'est-à-dire lorsque

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad \forall B \subset Y(\Omega), \quad P\big(\{X \in A \text{ et } Y \in B\}\big) = P(X \in A) \times P(Y \in B).$$

En particulier, si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $x \in X(\Omega)$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a

$$P\big(\{X = x \text{ et } Y = y\}\big) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Proposition 31.21 – Caractérisation des variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); P)$.
Si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, on a

$$P\big(\{X = x \text{ et } Y = y\}\big) = P(X = x) \times P(Y = y),$$

alors X et Y sont indépendantes.

Démonstration. On suppose pour tout $x \in X(\Omega)$, $y \in Y(\Omega)$, on a $P\big(\{X = x \text{ et } Y = y\}\big) = P(X = x) \times P(Y = y)$. Soient $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$. Alors

$$P\big(\{X \in A \text{ et } Y \in B\}\big) = P\Bigg(\bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \{X = a \text{ et } Y = b\}\Bigg)$$

Par incompatibilité deux à deux des événements,

$$\begin{aligned} P\big(\{X \in A \text{ et } Y \in B\}\big) &= \sum_{\substack{a\in A\\ b\in B}} P\big(\{X = a \text{ et } Y = b\}\big) \\ &= \sum_{\substack{a\in A\\ b\in B}} P(X=a)\times P(Y=b) \qquad \text{(par hypothèse)} \\ &= \sum_{b\in B}\left(\sum_{a\in A} P(X=a)\times P(Y=b)\right) = \sum_{b\in B}\left(P(Y=b)\sum_{a\in A}P(X=a)\right) \end{aligned}$$

Or $\sum_{a\in A} P(X=a)$ ne dépend pas de b dans la somme en b, donc on peut le sortir de la somme en b pour obtenir :

$$P(\{X\in A \text{ et } Y\in B\}) = \left(\sum_{a\in A} P(X=a)\right)\left(\sum_{b\in B} P(Y=b)\right) = P(X\in A)\times P(Y\in B).$$

□

Remarque 31.22 – Les variables X et Y sont indépendantes lorsque pour tout $x\in X(\Omega)$ et tout $y\in Y(\Omega)$ tel que $P(Y=y)\neq 0$, on a $P(X=x) = P_{\{Y=y\}}(X=x)$. Autrement dit, il y a indépendance de X et Y lorsque le fait de savoir que $\{Y=y\}$ n'apporte rien sur la probabilité de $\{X=x\}$.

Exemple 31.23 – Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{U}(\{0;1\})$.
On pose $Z = |X-Y|$. Montrer que X et Z sont indépendantes.
Les univers images sont $X(\Omega)=\{0,1\}$ et $Y(\Omega)=\{0,1\}$. On en déduit que $Z(\Omega)=\{0,1\}$.
Par ailleurs, $\{Z=0\} = \big\{(X,Y)=(0,0)\big\}\cup\big\{(X,Y)=(1,1)\big\}$, cette union est disjointe, donc

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= P((X,Y)=(0,0)) + P((X,Y)=(1,1)) \\ &= P(X=0)P(Y=0) + P(X=0)P(Y=0) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendants} \\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$P(Z=1) = 1-P(Z=0) = \frac{1}{2}$. Donc Z suit une loi uniforme sur $\{0,1\}$. Ensuite,
$P\big((X,Z)=(0,0)\big) = P\big((X=0 \text{ et } Y=0)\big) = \frac{1}{4} = P(X=0)P(Z=0)$.
$P\big((X,Z)=(0,1)\big) = P\big((X=0 \text{ et } Y=1)\big) = \frac{1}{4} = P(X=0)P(Z=1)$.
$P\big((X,Z)=(1,0)\big) = P\big((X=1 \text{ et } Y=0)\big) = \frac{1}{4} = P(X=1)P(Z=0)$.
$P\big((X,Z)=(1,1)\big) = P\big((X=1 \text{ et } Y=1)\big) = \frac{1}{4} = P(X=1)P(Z=1)$.
Donc X et Z sont indépendantes.

7 – Indépendance de plusieurs variables aléatoires

Remarque 31.24 – Si on reprend l'exemple précédent, on a montré que X, Y et Z sont deux à deux indépendantes.
On peut remarquer que malgré cette indépendance deux à deux, on a

$$P(X=0,Y=0,Z=1) = 0 \text{ et } P(X=0)P(Y=0)P(Z=1) = \frac{1}{8}, \text{ donc}$$

$$P(X=0,Y=0,Z=1) \neq P(X=0)P(Y=0)P(Z=1).$$

La notion précédente d'indépendance ne permet donc pas de travailler avec ces trois variables simultanément. Pour cela, il faut étendre cette notion d'indépendance de manière plus contraignante.

Définition 31.25 – Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P)$.
On dit que les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont **indépendantes** lorsque pour tout $A_1\in X_1(\Omega),\dots,A_n\in X_n(\Omega)$, les événements $\{X_1\in A_1\},\dots,\{X_n\in A_n\}$ sont indépendants.

Proposition 31.26 – Caractérisation de variables aléatoires dans leur ensemble

Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires définies sur $\big(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P\big)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes.
2. Pour tous $A_1\in X_1(\Omega),\dots,A_n\in X_n(\Omega)$, on a
$$P(X_1\in A_1,\dots,X_n\in A_n)=P(X_1\in A_1)\times\cdots\times P(X_n\in A_n)$$
3. Pour tous $x_1\in X_1(\Omega),\dots,x_n\in X_n(\Omega)$, on a
$$P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=P(X_1=x_1)\times\cdots\times P(X_n=x_n).$$

Démonstration. 1 $\Longrightarrow$ 2 provient de la définition. 2 $\Longrightarrow$ 3 est immédiat. Les autres implications sont admises. □

Proposition 31.27 – Application de fonctions à des variables aléatoires indépendantes

Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables indépendantes définies sur $\big(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P\big)$ et $g_1,\dots g_n$ des applications respectivement définies sur $X_1(\Omega),\dots,X_n(\Omega)$.

Les variables aléatoires $g_1(X_1),\dots,g_n(X_n)$ sont indépendantes.

Démonstration. Soient $a_1\in g(X_1)(\Omega),\dots,a_n\in g(X_n)(\Omega)$. Alors,
$$\begin{aligned}P\big(g(X_1)=a_1,\dots,g(X_n)=a_n\big)&=P\Big(X_1\in g^{-1}\big(\{a_1\}\big),\dots,X_n\in g^{-1}\big(\{a_n\}\big)\Big)=P\Big(X_1\in g^{-1}\big(\{a_1\}\big)\Big)\times\cdots\times\Big(X_n\in g^{-1}\big(\{a_n\}\big)\Big)\\&=P\big(g(X_1)=a_1\big)\times\cdots\times P\big(g(X_n)=a_n\big)\end{aligned}$$
Ainsi, d'après la caractérisation, $g(X_1),\dots,g(X_n)$ sont indépendantes. □

Exemple 31.28 – Cet énoncé a l'air compliqué mais il s'applique en fait assez facilement : si X, Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes, alors e^X+1, $2Y-1$ et Z^2 sont aussi indépendantes.

Théorème 31.29 – Lemme des coalitions

Soient m et n deux entiers tels que $1\leqslant m\leqslant n$. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables indépendantes définies sur $\big(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P\big)$ et f et g des applications définies sur des ensembles contenant respectivement $X_1(\Omega)\times\cdots\times X_m(\Omega)$ et $X_{m+1}(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$.

Les variables aléatoires $f(X_1,\dots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ sont alors aussi indépendantes.

Démonstration. Dans l'énoncé du théorème, $(X_1,\dots,X_m)$ est la fonction $\omega\longmapsto(X_1(\omega),\dots,X_m(\omega))$ sur Ω, qui est tout autant que $X_1,\dots,X_n$ une variable aléatoire, mais à valeurs dans un ensemble produit. Son image $(X_1,\dots,X_n)(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs atteintes par $(X_1,\dots,X_n)$: $(X_1,\dots,X_n)(\Omega)\subset X_1(\Omega)\times\ldots\times X_n(\Omega)$, sans égalité en général. Même chose avec $(X_{m+1},\dots,X_n)$. Posons $X=(X_1,\dots,X_m)$ et $Y=(X_{m+1},\dots,X_n)$.

- Montrons que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Pour tous $x=(x_1,\dots,x_m)\in(X_1,\dots,X_m)(\Omega)$ et $y=(x_{m+1},\dots,x_n)\in(X_{m+1},\dots,X_n)(\Omega)$:
$$P(X=x\text{ et }Y=y)=P(X_1=x_1\text{ et }\dots\text{ et }X_n=x_n)\overset{\text{Indép.}}{=}P(X=x_1)\dots P(X_n=x_n)$$
$$\overset{\text{Indép.}}{=}P(X_1=x_1\text{ et }\dots\text{ et }X_m=x_m)P(X_{m+1}=x_{m+1}\text{ et }\dots\text{ et }X_n=x_n)=P(X=x)P(Y=y).$$
- Montrons que $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Pour tous $a\in f(X)(\Omega)$ et $b\in g(Y)(\Omega)$:
$$P(f(X)=a\text{ et }g(Y)=b)=P\left(X\in f^{-1}(\{a\})\text{ et }Y\in g^{-1}(\{b\})\right)\overset{\text{Indép.}}{=}P\left(X\in f^{-1}(\{a\})\right)P\left(Y\in g^{-1}(\{b\})\right)=P(f(X)=a)P(g(Y)=b).$$

□

Remarque 31.30 – Plus généralement, toutes variables aléatoires $Y_1,\dots,Y_k$, définies à partir de $X_1,\dots,X_n$ de sorte que chaque X_i n'intervient que dans au plus une des variables aléatoires Y_j, sont indépendantes.

Exemple 31.31 – Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes.
Les variables aléatoires $X+Y^2$ et $3Z+1$ sont indépendantes.

II – Moments d'une variable aléatoire finie

1 – Espérance

Définition 31.32 – Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P)$.
On note $X(\Omega)=\{x_1;x_2;\dots;x_n\}$. On appelle **espérance** de X et on note $E(X)$ le réel défini par :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k P(X=x_k)=\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x).$$

Remarque 31.33 –

- L'espérance $E(X)$ correspond à la moyenne des valeurs x_k affectées des fréquences $P(X=x_k)$.
- Dans le cas particulier d'un jeu, l'espérance $E(X)$ est le gain moyen par partie qu'un joueur peut espérer obtenir s'il joue un grand nombre de fois.

Définition 31.34 – Une variable aléatoire réelle d'espérance nulle est dite **centrée**.

Remarque 31.35 –

- ▷ L'espérance d'une variable aléatoire réelle ne dépend que de sa loi. En particulier, si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers probabilisé $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P)$ et différentes (c'est-à-dire s'il existe au moins un $\omega\in\Omega$ tel que $X(\omega)\neq Y(\omega)$) mais que X et Y ont la même loi, alors $E(X)=E(Y)$.
- ▷ Si X s'exprime selon une unité, son espérance a la même unité.

Exemple 31.36 – Calculer l'espérance $E(X)$ pour chacun des deux exemples de l'exemple 31.2.

1. En utilisant la loi donnée précédemment,

$$E(X)=2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+\cdots+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}=\frac{252}{36}=7.$$

2. En utilisant la loi donnée précédemment,

$$E(X)=\frac{84+112+105+80+50+24+7}{210}=\frac{462}{210}=\frac{11}{5}.$$

Proposition 31.37 – Formule d'atomisation

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $\big(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P\big)$. On a alors :

$$E(X)=\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\big(\{\omega\}\big).$$

Démonstration. On pose $X(\Omega)=\{x_1;x_2;\dots;x_n\}$. On a alors

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} x_kP(X=x_k)=\sum_{k=1}^{n} x_kP\big(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=x_k\}\big)=\sum_{k=1}^{n} x_kP\Big(\bigcup_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x_k}}\{\omega\}\Big).$$

Comme les évènements élémentaires sont deux à deux incompatibles,

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k\Big(\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x_k}} P(\{\omega\})\Big)=\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x_k}} x_kP\big(\{\omega\}\big)\Big)=\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\big(\{\omega\}\big).$$

□

Proposition 31.38 – Principales propriétés de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P)$.

1. **Linéarité.** Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $E(\lambda X+Y)=\lambda E(X)+E(Y)$.
2. **Positivité.** Si $X\geqslant 0$ (c'est-à-dire si $\forall\omega\in\Omega,\ X(\omega)\geqslant 0$), alors $E(X)\geqslant 0$.
3. **Croissance.** Si $X\geqslant Y$ (c'est-à-dire si $\forall\omega\in\Omega,\ X(\omega)\geqslant Y(\omega)$), alors $E(X)\geqslant E(Y)$.
4. **Encadrement.** Si a et b sont deux réels tels que $a\leqslant X\leqslant b$, alors $a\leqslant E(X)\leqslant b$.
5. **Inégalité triangulaire.** $|E(X)|\leqslant E(|X|)$.

Démonstration.

1. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. D'après la formule d'atomisation :
$$E(\lambda X+Y)=\sum_{\omega\in\Omega}(\lambda X+Y)(\omega)P(\{\omega\})=\lambda\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\{\omega\})+\sum_{\omega\in\Omega}Y(\omega)P(\{\omega\})=\lambda E(X)+E(Y).$$
2. Si $X\geqslant 0$, alors pour tout $\omega\in\Omega$, $X(\omega)\geqslant 0$. De plus , $P(\{\omega\})\geqslant 0$ car P est une probabilité, donc
$$E(X)=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\{\omega\})$$
est une somme de termes tous positifs, donc $E(X)\geqslant 0$.
3. Si $X\geqslant Y$, alors $X-Y\geqslant 0$, donc $E(X-Y)\geqslant 0$, d'où par le premier point $E(X)-E(Y)\geqslant 0$.
4. C'est un cas particulier du point précédent avec des variables aléatoires constantes, en utilisant que $E(a)=a$ et $E(b)=b$.
5. On utilise la formule d'atomisation :
$$\left|E(X)\right|=\left|\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\{\omega\})\right|\leqslant\sum_{\omega\in\Omega}|X(\omega)|P(\{\omega\})=E(|X|)$$

□

Exemple 31.39 – On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu. Soit g la fonction définie par $g(x)=2x+3$ et $Y=g(X)=2X+3$. Déterminer l'espérance de Y.

Le support de X est $X(\Omega)=[\![1,6]\!]$ et comme le dé est non truqué, il s'agit d'une situation d'équiprobabilité. Ainsi $\forall k\in[\![1,6]\!],\quad P(X=k)=\dfrac{1}{6}$ et
$$E(X)=\sum_{k=1}^{6}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{6}k\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}k=\frac{1}{6}\times\frac{6\times 7}{2}=\frac{7}{2}.$$
On en déduit que
$$E(Y)=E(2X+3)=2E(X)+3=2\times\frac{7}{2}+3=7+3=10.$$

Remarque 31.40 – $\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$ étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, le point 1. montre que $E:\begin{array}{ccc}\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}\\ X & \mapsto & E(X)\end{array}$ est une forme linéaire.

Proposition 31.41 – Centrage d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P)$.
En posant $m=E(X)$, la variable aléatoire réelle $Y=X-m$ est centrée.

Démonstration. On remarque que $E(m)=m$. Donc, par linéarité de l'espérance,
$$E(Y)=E(X-m)=E(X)-E(m)=m-m=0.$$

□

2 – Le théorème de transfert

Pour déterminer l'espérance d'une variable aléatoire réelle $Y=g\circ X=g(X)$, où X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P)$ et g une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut commencer par chercher la loi de Y puis calculer
$$E(Y)=\sum_{y\in Y(\Omega)}y\,P(Y=y).$$
Mais connaissant la loi de X, il est plus efficace d'utiliser la formule suivante :

Théorème 31.42 – Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire finie. On note le support $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$E\big(g(X)\big)=\sum_{i=1}^{n} g(x_i)P(X=x_i)=\sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X=x).$$

Démonstration. D'après la formule d'atomisation,

$$E\big(g(X)\big)=\sum_{\omega\in\Omega} g\circ X(\omega)P\big(\{\omega\}\big)=\sum_{k=1}^{n}\Bigg(\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\X(\omega)=x_k}} g\circ X(\omega)P(\{\omega\})\Bigg)=\sum_{k=1}^{n}\Bigg(\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\X(\omega)=x_k}} g(x_k)P\big(\{\omega\}\big)\Bigg)=\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Bigg(\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\X(\omega)=x_k}} P\big(\{\omega\}\big)\Bigg)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} g(x_k)P\Bigg(\bigcup_{\substack{\omega\in\Omega\\X(\omega)=x_k}}\{\omega\}\Bigg)=\sum_{k=1}^{n} g(x_k)P\big(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=x_k\}\big)=\sum_{k=1}^{n} g(x_k)P(X=x_k).$$

□

Exemple 31.43 – On considère la fonction $g(x)=x^2$. Calculer $E\big(g(X)\big)$ pour chacun des deux exemples de l'exemple 31.2.

1. D'après le théorème de transfert et la loi de X calculée précédemment,

$$E\big(g(X)\big)=E\big(X^2\big)=2^2\times\frac{1}{36}+3^2\times\frac{2}{36}+4^2\times\frac{3}{36}+\cdots+11^2\times\frac{2}{36}+12^2\times\frac{1}{36}=\frac{1974}{36}=\frac{329}{6}.$$

2. D'après le théorème de transfert et la loi de X calculée précédemment,

$$E\big(g(X)\big)=E\big(X^2\big)=1^2\times\frac{84}{210}+2^2\times\frac{56}{210}+3^2\times\frac{35}{210}+\cdots+6^2\times\frac{4}{210}+7^2\times\frac{1}{210}=\frac{1386}{210}=\frac{33}{5}.$$

Remarque 31.44 –

- Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$: il suffit de connaître la loi de X.
- Dans les applications pratiques, ce théorème est principalement utilisé pour calculer $E\big(X^2\big)$, l'espérance du carré d'une variable aléatoire, quantité nécessaire au calcul de la variance de X en utilisant la formule de König-Huygens.

3 – Variance

Définition 31.45 – Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$.

- On appelle **variance** de X le réel, noté $V(X)$, défini par

$$V(X)=E\Big(\big(X-E(X)\big)^2\Big)=\sum_{k=1}^{n}\big(x_k-E(X)\big)^2P(X=x_k).$$

- On appelle **écart-type** de X et on note $\sigma(X)$ le réel

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}.$$

Remarque 31.46 –

▷ La variance mesure la dispersion (quadratique) de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

▷ Si X a une unité u, $V(X)$ est en u^2 et $\sigma(X)$ en u.

▷ Le nombre $V(X)$ ne dépend que de la loi de X.

▷ Si X est une variable aléatoire réelle constante, alors $V(X)=0$. En effet, on a alors $X=E(X)$ et donc $V(X)$ est l'espérance d'une variable réelle nulle.

Théorème 31.47 – Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Alors

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2.$$

Démonstration. Notons $m = E(X)$ (c'est une constante !). On a alors :

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left((X-m)^2\right) = E(X^2 - 2mX + m^2) \\ &= E(X^2) - 2mE(X) + E(m^2), \qquad \text{par linéarité de } E. \\ &= E(X^2) - 2m^2 + m^2 = E(X^2) - m^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \end{aligned}$$

□

Méthode 31.48 – Calculer la variance d'une variable aléatoire

1. On calcule $E\left(X^2\right)$ grâce au théorème de transfert.
2. Puis on utilise la formule de König-Huygens :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2.$$

Exemple 31.49 – Calculer la variance $V(X)$ pour les deux exemples de l'exemple 31.2.

1. On a déjà calculé $E\left(X^2\right)$ dans la partie précédente et trouvé que $E\left(X^2\right) = \dfrac{329}{6}$.
   Par ailleurs $E(X) = 7$, donc $E(X)^2 = 49$. Alors d'après la formule de König-Huygens,
   $$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \frac{329}{6} - 49 = \frac{329}{6} - \frac{294}{6} = \frac{35}{6}.$$
2. On a déjà calculé $E\left(X^2\right)$ dans la partie précédente et trouvé que $E\left(X^2\right) = \dfrac{33}{5}$.
   Par ailleurs $E(X) = \dfrac{11}{5}$, donc $E(X)^2 = \dfrac{121}{25}$. Alors d'après la formule de König-Huygens,
   $$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \frac{33}{5} - \frac{121}{25} = \frac{165}{25} - \frac{121}{25} = \frac{44}{25}.$$

Proposition 31.50 – Principales propriétés de la variance

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); P)$.

1. $V(X) \geqslant 0$.
2. Pour tous réels λ et μ, $V(\lambda X + \mu) = \lambda^2 V(X)$.
   On obtient en particulier : $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$ et $V(X+\mu) = V(X)$.

Démonstration.

1. Pour tout $\omega \in \Omega$, $\left(X(\omega) - m\right)^2 \geqslant 0$. Donc $(X-m)^2$ est une variable aléatoire positive, donc $V(X) = E\left((X-m)^2\right) \geqslant 0$.
2. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} V(\lambda X + \mu) &= E\left(\left(\lambda X + \mu - E(\lambda X + \mu)\right)^2\right) = E\left(\left(\lambda X + \mu - (\lambda E(X) + \mu)\right)^2\right) \qquad \text{par linéarité de } E \\ &= E\left(\left(\lambda X - \lambda E(X)\right)^2\right) = E\left(\lambda^2\left(X - E(X)\right)^2\right) \\ &= \lambda^2 E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) \qquad \text{par linéarité de } E \\ &= \lambda^2 V(X) \end{aligned}$$

□

Remarque 31.51 –

1. Lorsqu'on rajoute une constante à une variable aléatoire réelle X, il est normal que sa variance ne bouge pas, puisque ses valeurs sont distribuées de la même façon que celles de X par rapport à leur moyenne. Autrement dit, sa moyenne change, mais pas les écarts à la moyenne.
2. Contrairement à l'espérance, la variance **N'**est **PAS** linéaire.

Exemple 31.52 – On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu. Soit $Y = 2X+3$.
Calculer la variance de la variable aléatoire X puis celle de Y.

On a déjà calculé l'espérance et trouvé que $E(X) = \frac{7}{2}$ (voir l'exemple 31.39). En appliquant le théorème de transfert, on trouve

$$E\left(X^2\right) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{91}{6}.$$

Alors d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}.$$

Enfin d'après la Proposition 31.50,

$$V(Y) = V(2X+3) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{3}.$$

Définition 31.53 – Une variable aléatoire réelle de variance ou d'écart-type égal à 1 (c'est pareil), est dite **réduite**.

Proposition 31.54 – Réduction d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P)$. On note $m = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$.
Si $\sigma(X) \neq 0$, la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ est une variable aléatoire centrée et réduite.

Démonstration. $E(Y) = E\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{\sigma}\left(E(X)-m\right) = \dfrac{1}{\sigma}(m-m) = 0.$ Donc Y est centrée.

$\sigma(Y) = \sigma\left(\dfrac{X}{\sigma} - \dfrac{m}{\sigma}\right) = \sigma\left(\dfrac{X}{\sigma}\right) = \dfrac{\sigma(X)}{\sigma} = 1$ Donc Y est réduite. □

III – Lois usuelles

1 – Loi uniforme

Définition 31.55 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P)$ à valeurs dans $E = \{x_1;x_2;\ldots;x_n\}$.
On dit que X **suit la loi uniforme** sur E, notée $\mathcal{U}(E)$, lorsque tous les événements du système complet d'événements $\left\{\{X=x_1\},\{X=x_2\},\ldots,\{X=x_n\}\right\}$ sont équiprobables, autrement dit, lorsque

$$X(\Omega) = E \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1;n]\!],\quad P(X=x_i) = \frac{1}{n}.$$

Cela revient à dire que P_X est la probabilité uniforme sur E. On note alors $X \sim \mathcal{U}(E)$.

Exemple 31.56 – Deux exemples classiques :

1. On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu.
   Alors X suit une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$, *i.e.* $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![1,6]\!]\right)$, car $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,6]\!]$, $P(X=k) = \frac{1}{6}$.
2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on note X le numéro obtenu.
   Alors X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, *i.e.* $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![1,n]\!]\right)$, car $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P(X=k) = \frac{1}{n}$.

Exemple 31.57 – Deux exemples moins classiques :

1. On lance un dé à six faces déséquilibré, de sorte que les probabilités d'apparition de chaque face sont les suivantes :

k	1	2	3	4	5	6
$P(\{k\})$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$

On note X le reste de la division euclidienne du numéro de la face obtenue par 3. Quelle est la loi de X ?
Déjà, on note que $\Omega = [\![1,6]\!]$ et $X(\Omega) = \{0,1,2\}$.
   (a) $(X=0)$ est l'événement $\{3,6\}$, donc $P(X=0) = \frac{5}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{3}$.
   (b) $(X=1)$ est l'événement $\{1,4\}$, donc $P(X=1) = \frac{1}{20} + \frac{17}{60} = \frac{1}{3}$.
   (c) $(X=2)$ est l'événement $\{2,5\}$, donc $P(X=2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$.

   En résumé, $X \sim \mathcal{U}\big(\{0,1,2\}\big)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1,2n]\!]$. Quelle est la loi de $Y = (-1)^X$?
Notons $f : x \mapsto (-1)^x$. On a $f\big([\![1,2n]\!]\big) = \{-1,1\}$, donc $Y(\Omega) = \{-1,1\}$.
   (a) $P(Y=1) = P\big((-1)^X = 1\big) = P(X = 2 \text{ Ou } \dots \text{ Ou } X = 2n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} [X=2k]\right) = \sum_{k=1}^{n} P(X=2k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.
   (b) $P(Y=-1) = 1 - P(Y=1) = \frac{1}{2}$.

   Donc $Y \sim \mathcal{U}\big(\{-1,1\}\big)$.

Proposition 31.58

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![1,n]\!]$.
Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Démonstration. Le support de X est $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$. On a :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Or d'après la formule de transfert

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On a alors :

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right) = \frac{n+1}{2} \times \frac{n-1}{6} = \frac{n^2-1}{12}.$$

□

Proposition 31.59

Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![a,b]\!]$. Alors la variable aléatoire $X - a + 1$ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[\![1, b-a+1]\!]$ et l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

où $n = b - a + 1$ est le nombre de valeurs.

Démonstration. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ alors $X-a+1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,b-a+1]\!])$ et donc $E(X-a+1) = \dfrac{b-a+2}{2}$. Or $E(X-a+1) = E(X)-a+1$ ainsi
$$E(X) = E(X-a+1)+a-1 = \frac{b-a+2}{2}+a-1 = \frac{b-a+2+2a-2}{2} = \frac{a+b}{2}.$$
On a également : $V(X-a+1) = \dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$. Or $V(X-a+1) = V(X)$, donc
$$V(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$
□

Exemple 31.60 – Trouver l'espérance et la variance de Y suivant une loi uniforme sur $\{5,7,9,11,13\}$.
On pose $X = \dfrac{Y-3}{2}$ (et donc $Y = 2X+3$). Alors $X(\Omega) = [\![1,5]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,5]\!]$, $P(X=k) = P(Y=2k+3) = \dfrac{1}{5}$.
Donc X suit une loi uniforme sur $[\![1,5]\!]$.
D'où $E(X) = 3$ et $V(X) = 2$.
$$E(Y) = E(2X+3) = 2E(X)+3 = 9, \qquad V(Y) = V(2X+3) = 4V(X) = 8.$$

2 – Loi de Bernoulli

Définition 31.61 – On dit qu'une variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P)$ **suit la loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0;1]$, notée $\mathcal{B}(p)$, lorsque
$$X(\Omega) = \{0;1\}, \qquad P(X=0) = 1-p = q, \qquad P(X=1) = p.$$
On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Remarque 31.62 –

- ▷ $\mathcal{B}(0)$ est la loi d'une variable aléatoire constante égale à 0.
- ▷ $\mathcal{B}(1)$ est la loi d'une variable aléatoire constante égale à 1.
- ▷ $\mathcal{B}(1/2)$ est la loi uniforme sur $\{0;1\}$.

Une **épreuve** de Bernoulli est une épreuve aléatoire qui comporte exactement deux issues : une que l'on qualifie de "succès", de probabilité p, et l'autre que l'on qualifie d'"échec", de probabilité $1-p$.
On réalise une fois cette épreuve de Bernoulli et si l'issue est un "succès", la variable aléatoire prend la valeur $X=1$, sinon elle prend la valeur $X=0$.

Exemple 31.63 – On considère une urne opaque contenant une proportion $p \in [0;1]$ de boules rouges et une proportion $q = 1-p$ de boules blanches. On tire une boule dans cette urne. On considère la variable aléatoire X qui vaut 1 si la boule tirée est rouge et 0 si la boule tirée est blanche.
$$X(\Omega) = \{0;1\}, \qquad P(X=0) = 1-p, \qquad P(X=1) = p$$
donc X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Proposition 31.64

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Alors l'espérance et la variance de X sont données par
$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

Démonstration. Le support de X est $X(\Omega) = \{0,1\}$. On a : $E(X) = 0\times(1-p)+1\times p = p$.
Et pour la variance : $V(X) = (0-p)^2\times(1-p)+(1-p)^2\times p = (1-p)(p^2+p(1-p)) = (1-p)p(p+1-p) = p(1-p)$. □

Exemple 31.65 – Soit A un événement de l'univers probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); P)$. On considère la fonction indicatrice de S qui est

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & \{0;1\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases} \end{array}$$

L'application $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire qui indique si A est réalisé ou non. On a $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0;1\}$ et, $P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$ et $P(\mathbb{1}_A = 0) = 1 - P(A)$ donc $\mathbb{1}_A$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\big(P(A)\big)$.
On a alors

$$E(\mathbb{1}_A) = P(A) \qquad \text{et} \qquad V(\mathbb{1}_A) = P(A)\big(1 - P(A)\big)$$

3 – Loi binomiale

Définition 31.66 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. On dit qu'une variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega; Pcal(\Omega); P)$ **suit la loi binomiale** de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n;p)$, lorsque :

$$X(\Omega) = [\![0;n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0;n]\!], \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{où } q = 1-p.$$

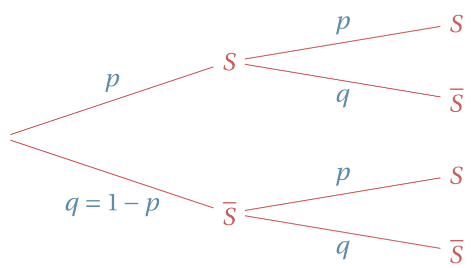
On note alors $X \sim \mathcal{B}(n;p)$.

Remarque 31.67 –

1. Ceci définit bien une loi probabilité sur $[\![0;n]\!]$ puisque pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \geqslant 0$ et d'après la formule du binôme de Newton, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$.
2. Une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres 1 et p suit la loi de Bernoulli de paramètre p. Si $n = 1$, $X(\Omega) = [\![0,1]\!]$ et $\quad P(X=0) = \binom{1}{0} p^0 q^1 = q, \quad \mathrm{P}(X=1) = \binom{1}{1} p^1 q^0 = p$. X suit donc bien la loi de Bernoulli de paramètre p.
3. Si une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$, alors $n - X$ suit la loi $\mathcal{B}(n, 1-p)$, par symétrie des coefficients binomiaux.

La loi $\mathcal{B}(n,p)$ est celle du nombre de succès dans une suite de n expériences identiques et indépendantes ayant chacune deux issues possibles : succès avec probabilité p et échec avec probabilité $1-p$. Illustrons cela dans les cas où $n = 2$ ou $n = 3$ à l'aide d'un arbre.

1. Cas $n = 2$
   On répète deux épreuves de Bernoulli de paramètre p, successivement et de manière indépendante.



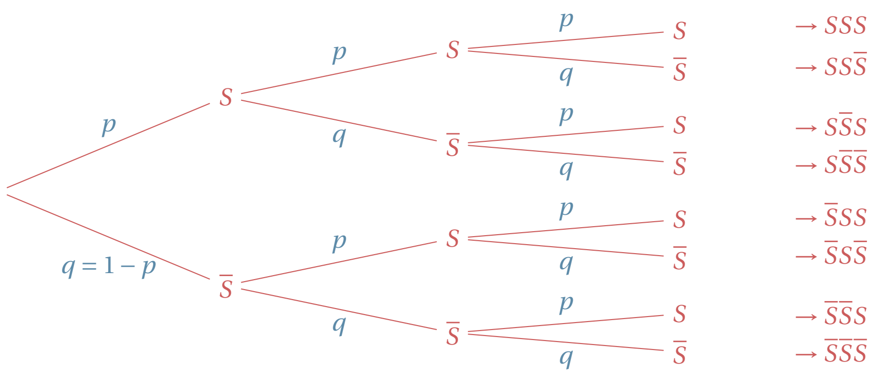
   La variable aléatoire X, égale au nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $n = 2$ et p.

Nombre de succès k	0	1	2
$P(X=k)$	q^2	$2 \times p \times q$	p^2

2. Cas $n = 3$
   On répète trois épreuves de Bernoulli de paramètre p, successivement et de façon indépendante.
   L'expérience comporte $2^3 = 8$ issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

$$\{SSS, SS\overline{S}, S\overline{S}S, \overline{S}SS, S\overline{S}\,\overline{S}, \overline{S}S\overline{S}, \overline{S}\,\overline{S}S, \overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\}.$$

   Pour obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire X, égale au nombre de succès, on dresse un arbre et on compte le nombre d'issues contenant k succès.



La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et p.

Nombre de succès k	0	1	2	3
$P(X = k)$	q^3	$3 \times p \times q^2$	$3 \times p^2 \times q$	p^3

Proposition 31.68

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} p^k(1-p)^{n-k} \\ &= n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} p^{i+1}(1-p)^{n-1-i} \quad \text{en posant } i = k-1 \\ &= np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} p^{i}(1-p)^{n-1-i} = np(p+1-p)^{n-1} \quad \text{par la formule du binôme de Newton} \\ &= np \end{aligned}$$

La démonstration de $V(X) = np(1-p)$ repose sur les mêmes idées mais est plus longue et plus technique. □

Exemple 31.69 – Lorsqu'on lance simultanément cinq dés à six faces, combien en moyenne donnent un 6 ?
Les lancers étant indépendants, si on note X le nombre de dés qui affiche 6, on a que $X \sim \mathcal{B}\left(5, \frac{1}{6}\right)$. Donc, le nombre moyen de 6 obtenus est $E(X) = \frac{5}{6}$.

4 – Somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes

Proposition 31.70

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $\big(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); P\big)$ indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$.
La variable aléatoire $S = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Interprétation : Une variable de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ compte le nombre de succès dans n expériences aléatoires indépendantes où la probabilité de succès de chaque expérience est p.

Démonstration. On a clairement $S(\Omega) = [\![0;n]\!]$. Soit $k \in [\![0;n]\!]$. On note $E_k = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \{0;1\}^n \mid x_1 + \dots + x_n = k\right\}$.
Avec cette notation

$$\{S = k\} = \{X_1 + \dots + X_n = k\} = \bigcup_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} \{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$$

Les événements intervenant dans cette réunion sont deux à deux incompatibles donc

$$\begin{aligned}
P(S=k) &= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} P(X_1=x_1, X_2=x_2,\dots,X_n=x_n) \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} P(X_1=x_1)P(X_2=x_2)\cdots P(X_n=x_n) && \text{par indépendance mutuelle} \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} P(X_1=x_1)P(X_1=x_2)\cdots P(X_1=x_n) && \text{car } X_1,\dots,X_n \text{ ont la même loi.}
\end{aligned}$$

Dans chacun des termes de la somme précédente, on trouve un produit de facteurs valant $P(X_1=0)$ ou $P(X_1=1)$. Puisque $x_1+\cdots+x_n=k$, il y a exactement k fois le facteur $P(X_1=1)$ et $n-k$ fois le facteur $P(X_1=0)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
P(S=k) &= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} P(X_1=1)^k P(X_1=0)^{n-k} \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= p^k(1-p)^{n-k} \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_k} 1 \\
&= p^k(1-p)^{n-k}\,\mathrm{Card}(E_k)
\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{Card}(E_k)$ est le nombre de possibilités pour que k des n coordonnées d'un élément de $\{0,1\}^n$ soient 1, soit $\binom{n}{k}$.

$$P(S=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

et donc S suit une loi binomiale de paramètres n et p. □

Situation d'apparition de la loi binomiale :

- ▹ La loi $\mathcal{B}(n,p)$ est celle du nombre de succès dans une suite de n expériences identiques et indépendantes ayant chacune deux issues possibles : succès avec probabilité p et échec avec probabilité $1-p$.
- ▹ Dans le langage des urnes et des boules, $\mathcal{B}(n,p)$ correspond aux tirages **avec** remise (pour garder les mêmes proportions à chaque tirage).

Exemple 31.71 –

1. On considère une urne qui contient une proportion p de boules rouges et $(1-p)$ de boules blanches. On effectue n tirages indépendants avec remise dans cette urne. On note X le nombre de boules rouges obtenues à l'issue des n tirages.
   L'univers est $\Omega = \{\text{rouge}, \text{blanc}\}^n$. Un élément de Ω est donc un n-uplet des tirages réalisés.
   On a alors $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
   Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i-ème boule tirée est rouge et 0 sinon. Alors, Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
   De plus, $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ et les Y_i sont indépendantes (car les tirages sont indépendants), donc par la proposition précédente, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.
2. On joue n fois à pile ou face avec la même pièce donnant « pile » avec probabilité p. On compte le nombre X de fois où on a obtenu « pile ».
   L'univers est $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}^n$. Un élément de Ω est donc un n-uplet des tirages réalisés. On a alors $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
   Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le i-ème lancer est « pile » et 0 sinon. Alors, Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
   De plus, $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ et les Y_i sont indépendantes (car les lancers sont indépendants), donc par la proposition précédente, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

IV – Couples de variables aléatoires

1 – Définition et exemples

Définition 31.72 – Soient $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P)$ un espace probabilisé fini et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **vecteur aléatoire** tout n−uplet

$$U = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

où chaque X_i est une variable aléatoire définie sur $\big(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P\big)$.
Dans le cas $n = 2$, on dira que $U = (X, Y)$ est un **couple de variables aléatoires.**

Remarque 31.73 –

1. Si X et Y sont des variables aléatoires sur Ω à valeurs respectives dans E et F, alors (X, Y) est une variable aléatoire à valeurs dans $E \times F$.
2. Définir un vecteur aléatoire, c'est se donner plusieurs variables aléatoires relatives à la même expérience.
3. Comme pour les variables aléatoires, le support $(X,Y)(\Omega) = \big\{\big(X(\omega), Y(\omega)\big) \mid \omega \in \Omega\big\}$est plus important que l'univers Ω lui-même.
4. Dans la pratique, on préfère souvent travailler avec le produit cartésien $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ plutôt que sur le support $(X,Y)(\Omega)$, même si $(X,Y)(\Omega)$ n'est qu'une partie du produit cartésien $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
5. Dans la suite, on n'étudiera que les couples de variables aléatoires, mais les définitions et résultats se généralisent naturellement à un n-uplet de variables aléatoires.

Exemple 31.74 –

1. On tire simultanément au hasard deux nombres distincts dans l'intervalle d'entiers $[\![1;n]\!]$.
L'univers ici est $\Omega = \big\{\{i,j\} \mid i \in [\![1;n]\!],\ j \in [\![1;n]\!] \text{ et } i \neq j\big\}$. On considère les variables aléatoires X et Y où X est la valeur du plus petit nombre tiré et Y la valeur du plus grand. On a
$$X(\Omega) = [\![1;n-1]\!],\ Y(\Omega) = [\![2;n]\!] \text{ donc } X(\Omega) \times Y(\Omega) = \big\{(x,y) \mid x \in [\![1;n-1]\!] \text{ et } y \in [\![2;n]\!]\big\}$$
ce qui n'est pas exactement l'univers image $(X,Y)(\Omega) = \Big\{(x,y) \in [\![1;n]\!]^2 \mid 1 \leqslant x < y \leqslant n\Big\}$.
2. **Exemple fil rouge :** Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement 2 boules dans cette urne sans remise. On considère la variable aléatoire X qui prend pour valeur 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon, et Y la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si la deuxième boule tirée est blanche et 0 sinon. Le couple (X,Y) de variables aléatoires a pour support $(X,Y)(\Omega) = [\![0;1]\!]^2$.

Notations : On utilise les mêmes notations que pour les variables aléatoires. Si (X,Y) est un couple de variables aléatoires tel que X soit à valeurs dans E et Y à valeurs dans F, pour toute partie A de $E \times F$, on note $\big\{(X,Y) \in A\big\}$ l'événement

$$\big\{(X,Y) \in A\big\} = \big\{\omega \in \Omega \mid \big(X(\omega), Y(\omega)\big) \in A\big\}.$$

On notera également $P(X = x, Y = y)$ pour $P\big((X,Y) = (x,y)\big)$.

Proposition 31.75 – Systèmes complets d'événements associés à un couple de v.a.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires.

1. La collection d'événements $\big\{\{X = x \text{ et } Y = y\} \mid (x,y) \in (X,Y)(\Omega)\big\}$ est un système complet d'événements.
2. La collection d'événements $\big\{\{X = x \text{ et } Y = y\} \mid (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\big\}$ est un système complet d'événements.

Démonstration. Ces événements sont clairement incompatibles deux à deux et leur réunion fait Ω. Dans la deuxième collection, certains événements sont l'événement impossible. □

2 – Loi conjointe d'un couple de variable aléatoire

Théorème 31.76 – Loi conjointe

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); P)$.
La **loi conjointe** du couple (X, Y) est la probabilité $P_{(X,Y)}$, qui est définie sur $\mathcal{P}\big((X,Y)(\Omega)\big)$ par :

$$P_{(X,Y)} : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}\big((X,Y)(\Omega)\big) & \longrightarrow & [0;1] \\ A & \longmapsto & P\Big(\{(X,Y) \in A\}\Big). \end{array}$$

Démonstration. Montrons que c'est bien une probabilité. Tout d'abord, $P_{(X,Y)}\big((X,Y)(\Omega)\big) = P(\Omega) = 1$ et pour toutes parties disjointes A et B de $(X,Y)(\Omega)$,

$$\begin{aligned} P_{(X,Y)}(A \cup B) &= P\big(\{(X,Y) \in A \cup B\}\big) = P\big(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in A \cup B\}\big) \\ &= P\big(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in A\} \cup \{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in B\}\big) \\ &= P\big(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in A\}\big) + P\big(\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in B\}\big) \\ &= P\big(\{(X,Y) \in A\}\big) + P\big(\{(X,Y) \in B\}\big) = P_{(X,Y)}(A) + P_{(X,Y)}(B). \end{aligned}$$

les deux événements étant incompatibles. □

Remarque 31.77 –

1. Pour définir complètement $P_{(X,Y)}$, il suffit de se donner les valeurs de $P\big(\{X = x \text{ et } Y = y\}\big)$ pour tout $(x,y) \in (X,Y)(\Omega)$. On préfère parfois donner les valeurs de $P\big(\{X = x \text{ et } Y = y\}\big)$ pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, sachant que $P\big(\{X = x \text{ et } Y = y\}\big) = 0$ lorsque $(x,y) \not\in (X,Y)(\Omega)$. On rassemble généralement les résultats dans un tableau.
2. On a toujours $\displaystyle\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P\big(\{X = x \text{ et } Y = y\}\big) = 1$.

Exemple 31.78 – On reprend l'exemple fil rouge. (Ex 31.74)
On note $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, N_1, N_2, N_3, N_4\}$ l'ensemble des 7 boules. On considère Ω l'ensemble des 2-arrangements de $\mathcal{B}$ muni de P la probabilité uniforme. (On a $\mathrm{Card}(\Omega) = 42$.
On se place dans $X(\Omega) \times Y(\Omega) = (X \times Y)(\Omega)$ l'univers image. $(X \times Y)(\Omega) = [\![0, 1]\!]^2$.
$\big\{(X,Y) = (1,1)\big\}$ est l'ensemble des 2-arrangements de $\{B_1, B_2, B_3\}$. Donc $\mathrm{Card}\big(\{(X,Y) = (1,1)\}\big) = 6$.
$\big\{(X,Y) = (0,0)\big\}$ est l'ensemble des 2-arrangements de $\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$. Donc $\mathrm{Card}\big(\{(X,Y) = (0,0)\}\big) = 12$.
$\big\{(X,Y) = (0,1)\big\} = \{N_1, N_2, N_3, N_4\} \times \{B_1, B_2, B_3\}$. Donc $\mathrm{Card}\Big(\big\{(X,Y) = (0,1)\big\}\Big) = 12$.
$\big\{(X,Y) = (1,0)\big\} = \{B_1, B_2, B_3\} \times \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$. Donc $\mathrm{Card}\Big(\big\{(X,Y) = (1,0)\big\}\Big) = 12$.
En divisant tous ces cardinaux par 42, on obtient que (X,Y) suit la loi déterminée par

$P\big((X,Y) = (x,y)\big)$:

$x \backslash y$	0	1
0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

3 – Lois marginales

Proposition 31.79 – Lois marginales

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); P)$.
Les lois de probabilité P_X et P_Y de X et de Y sont appelées les **lois marginales** du couple (X, Y) et on les obtient de la manière suivante :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P\big(\{X = x \text{ et } Y = y\}\big)$$

$$\text{et} \quad \forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P\big(\{X = x \text{ et } Y = y\}\big).$$

Méthode 31.80 –
Dans le tableau qui donne la loi du couple (X, Y), on obtient la loi de X et la loi de Y dans les marges (d'où le nom de « loi marginales »)
Le tableau qui suit explique comment on peut calculer P_X et P_Y à partir de $P_{(X,Y)}$. On a noté

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_m\} \qquad Y(\Omega) = \left\{y_1, \ldots, y_m\right\}, \qquad \forall (i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!],\ p_{i,j} = P(X = x_i \text{ et } Y = y_j).$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	
x_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\cdots$	$p_{1,n}$	$\to P(X = x_1) = \sum_{j=1}^{n} p_{1,j}$
x_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	$\cdots$	$p_{2,n}$	$\to P(X = x_2) = \sum_{j=1}^{n} p_{2,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
x_m	$p_{m,1}$	$p_{m,2}$	$\cdots$	$p_{m,n}$	$\to P(X = x_m) = \sum_{j=1}^{n} p_{m,j}$

Loi marginale P_X

$$\underbrace{P(Y = y_1) = \sum_{i=1}^{m} p_{i,1} \qquad\qquad P(Y = y_n) = \sum_{i=1}^{m} p_{i,n}}_{\text{Loi marginale } P_Y}$$

Remarque 31.81 – Plus généralement, pour $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P\big(\{X \in A \text{ et } Y = y\}\big) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P\big((X, Y) \in A \times \{y\}\big)$$

$$\text{et } P_Y(B) = P(Y \in B) = \sum_{x \in X(\Omega)} P\big(\{X = x \text{ et } Y \in B\}\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} P\big((X, Y) \in \{x\} \times B\big)$$

Exemple 31.82 – On reprend l'exemple fil rouge. (Ex 31.74)

$$P(X = 0) = \sum_{y \in \{0,1\}} P\big((X, Y) = (0, y)\big) = P\big((X, Y) = (0, 1)\big) + P\big((X, Y) = (0, 0)\big) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

$$P(X = 1) = \sum_{y \in \{0,1\}} P\big((X, Y) = (1, y)\big) = P\big((X, Y) = (1, 1)\big) + P\big((X, Y) = (1, 0)\big) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

De même, $P(Y = 0) = \dfrac{4}{7}$ et $P(Y = 1) = \dfrac{3}{7}$.

4 – Loi d'une composée

Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs réelles définies sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); P)$ et une fonction g de **deux** variables à valeurs réelles dont le domaine de définition contient $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. On considère la nouvelle variable aléatoire

$$g(X, Y) : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & g\big(X(\omega), Y(\omega)\big). \end{array}$$

On cherche à obtenir la loi de cette variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ quand on connaît la loi du couple (X, Y).

Méthode 31.83 – Loi d'une composée

Première étape : On détermine $Z(\Omega) = \{g(x,y) \mid (x,y) \in (X,Y)(\Omega)\}$

Deuxième étape : Pour tout $z \in Z(\Omega)$, on cherche les antécédents de z par g dans $(X,Y)(\Omega)$.

Si $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; y_2; \ldots; y_m\}$, on cherche tous les couples (x_{i_1}, y_{j_1}), (x_{i_2}, y_{j_2}), $\ldots$, (x_{i_r}, y_{j_r}) dans $(X,Y)(\Omega)$ tels que

$$g(x_{i_1}, y_{j_1}) = g(x_{i_2}, y_{j_2}) = \cdots = g(x_{i_r}, y_{j_r}) = z$$

de sorte que $\{Z = z\}$ soit la réunion des événements deux à deux incompatibles :

$$\{Z = z\} = \bigcup_{k=1}^{r} \{X = x_{i_k} \text{ et } Y = y_{j_k}\}.$$

Dernière étape : On calcule $P(Z = z)$ de la façon suivante : $P(Z = z) = \sum_{k=1}^{r} P\big(\{X = x_{i_k} \text{ et } Y = y_{j_k}\}\big)$.

Exemple 31.84 – On reprend l'exemple fil rouge (Ex 31.74) Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

On pose $g : \begin{array}{ccc} [\![0,1]\!]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$ et alors $Z = g(X,Y)$.

Alors l'univers image $Z(\Omega)$ est $\{0,1,2\}$.

$\{Z = 2\} = \{X = 1 \text{ et } Y = 1\}$. Donc $P(\{Z = 2\}) = P(X = 1 \text{ et } Y = 1) = \frac{1}{7}$.

$\{Z = 1\} = \{X = 1 \text{ et } Y = 0\} \cup \{X = 0 \text{ et } Y = 1\}$. Ces évènements sont incompatibles, donc

$$P(Z = 1) = P\big((X,Y) = (1,0)\big) + P\big((X,Y) = (0,1)\big) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}.$$

$\{Z = 0\} = \big\{(X,Y) = (0,0)\big\}$. Donc $P\big(\{Z = 0\}\big) = \frac{2}{7}$.

La loi de Z est déterminée par

z	0	1	2
$P(Z = z)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

5 – Formule de transfert vectorielle

La formule de transfert vue précédemment peut également s'appliquer à des couples de variables aléatoires. On obtient ainsi l'énoncé suivant.

Théorème 31.85 – Formule de transfert pour un couple

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et g est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on considère la variable aléatoire réelle $Z = g(X,Y)$. Alors,

$$E(Z) = E\big(g(X,Y)\big) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x,y)\, P(X = x, Y = y).$$

Remarque 31.86 – Le théorème s'étend de même à un n-uplet de variables aléatoires réelles.

Exemple 31.87 – On considère une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 4. On tire successivement sans remise deux boules. On note U le premier numéro obtenu et V qui vaut 1 si le second numéro est supérieur au premier et 0 sinon. On cherche $E\big(\sqrt{U + V}\big)$.

L'univers image est $(U,V)(\Omega) = \{(1,1),(2,1),(2,0),(3,0),(3,1),(4,0)\}$, que l'on munit de la probabilité P héritée de l'expérience. En utilisant que pour tout $(u,v) \in \Omega$, on a

$$P(U = u, V = v) = P(U = u) \times P_{\{U=u\}}(V = v).$$

Après calcul, on obtient le tableau suivant pour les valeurs $P(U = u, V = v)$:

$u\backslash v$	0	1
1		$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{4}$	

En appliquant le théorème précédent :

$$\begin{aligned} E(\sqrt{U+V}) &= \sqrt{1+1}\,P(U=1,V=1)+\sqrt{2+0}\,P(U=2,V=0)+\sqrt{2+1}\,P(U=2,V=1)\\ &\quad+\sqrt{3+0}\,P(U=3,V=0)+\sqrt{3+1}\,P(U=3,V=1)+\sqrt{4+0}\,P(U=4,V=0)\\ &=\sqrt{2}\times\frac{1}{4}+\sqrt{2}\times\frac{1}{12}+\sqrt{3}\times\frac{1}{6}+\sqrt{3}\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{3}\end{aligned}$$

6 – Covariance de deux variables aléatoires réelles

Définition 31.88 – Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$.

On appelle **covariance** de X et Y le réel $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\left[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\right]$.

Proposition 31.89 – Principales propriétés de la covariance

Soient X, Y et Z sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$,

1. **Symétrie.** $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$
2. **Espérance et covariance.** $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.
3. **Bilinéarité.** Pour tout $a,b\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{Cov}(aX+bZ,Y)=a\,\mathrm{Cov}(X,Y)+b\,\mathrm{Cov}(Z,Y)\qquad \mathrm{Cov}(X,aY+bZ)=a\,\mathrm{Cov}(X,Y)+b\,\mathrm{Cov}(X,Z)$$

4. **Positivité.** $\mathrm{Cov}(X,X)=V(X)\geqslant 0$.
5. **Variance et covariance.** $V(X+Y)=V(X)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)+V(Y)$.

Démonstration.

1. Évident.
2. $$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)\\ &= E\big(XY-E(X)Y-E(Y)X+E(X)E(Y)\times 1\big)\\ &= E(XY)-E(X)E(Y)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y)\underbrace{E(1)}_{=1} \quad \text{(linéarité de l'espérance)}\\ &= E(XY)-E(X)E(Y)\end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(aX_1+bX_2,Y) &= E((aX_1+bX_2)Y)-E(aX_1+bX_2)E(Y)\\ &= E(aX_1Y+bX_2Y)-(aE(X_1)+bE(X_2))E(Y)\\ &= aE(X_1Y)+bE(X_2Y)-aE(X_1)E(Y)-bE(X_2)E(Y)\\ &= a(E(X_1Y)-E(X_1)E(Y))+b(E(X_2Y)-E(X_2)E(Y))\\ &= a\,\mathrm{Cov}(X_1,Y)+b\,\mathrm{Cov}(X_2,Y)\end{aligned}$$
   La linéarité à droite s'obtient par symétrie.
4. Évident.
5. $$\begin{aligned}V(X+Y) &= \mathrm{Cov}(X+Y,X+Y)\\ &= \mathrm{Cov}(X,X+Y)+\mathrm{Cov}(Y,X+Y)\\ &= \mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(Y,X)+\mathrm{Cov}(Y,Y)\\ &= V(X)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)+V(Y).\end{aligned}$$

□

Exemple 31.90 – Reprenons l'exemple 31.87 et déterminons $\mathrm{Cov}(U,V)$.
En utilisant la formule de transfert,

$$\begin{aligned} E(UV) &= (1\times 1)\,P(U=1,V=1)+(2\times 0)\,P(U=2,V=0)+(2\times 1)\,P(U=2,V=1)\\ &\quad +(3\times 0)\,P(U=3,V=0)+(3\times 1)\,P(U=3,V=1)+(4\times 0)\,P(U=4,V=0)\\ &= \frac{1}{4}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{12}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

On remarque également que U suit une loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$ et V suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, de sorte que $E(U)=\frac{5}{2}$ et $E(V)=\frac{1}{2}$. Ainsi, $\mathrm{Cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{5}{6}-\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{5}{12}$.

Interprétation : La covariance mesure la corrélation entre les variables X et Y. Si cette covariance est strictement positive, alors X et Y ont tendance à varier dans le même sens (ce que l'on peut attendre de variables qui mesurent le poids et la taille d'un individu pris au hasard : « plus la taille augmente, plus le poids augmente »). Si cette covariance est strictement négative, alors X et Y ont tendance à varier dans des sens contraires (ce que l'on peut attendre de la température extérieure et du nombre de manteaux vendus chaque jour).

Définition 31.91 – On dit que deux variables aléatoires réelles X et Y sont **décorrélées** lorsque $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

Proposition 31.92 – Variance d'une somme de variables aléatoires décorrélées

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P)$.
Si X et Y sont décorrélées alors $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la relation $V(X+Y)=V(X)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)+V(Y)$. □

7 – Espérance et variance pour des variables aléatoires indépendantes

Proposition 31.93 – Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega;\mathcal{P}(\Omega);P)$.
Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY)=E(X)E(Y)$ et donc $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

Autrement dit, si deux variables sont indépendantes, alors elles sont décorrélées.

Démonstration.
On utilise le théorème de transfert : $E(XY)=\sum\limits_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\,P(X=x,Y=y)$. Par indépendance de X et Y,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\,P(X=x)P(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)}\Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} xy\,P(X=x)P(Y=y)\Big)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)\Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\,P(Y=y)\Big)=\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)E(Y)\\ &= E(Y)\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)=E(Y)E(X)\end{aligned}$$

□

Remarque 31.94 – Deux variables décorrélées ne sont pas nécessairement indépendantes.
Exemple : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{-1;0;1\}$ et $Y=\mathbb{1}_{[X=0]}$.

$$E(X)=-1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0$$

$$E(Y)=0\times P(Y=0)+1\times P(Y=1)=P(Y=1)=P(X=0)=\frac{1}{3}$$

$$E(XY)=E(X\mathbb{1}_{X=0})=E(0)=0$$

On a donc $E(XY)=E(X)E(Y)$ et pourtant X et Y ne sont pas indépendantes.
En effet, $P\big(\{X=1 \text{ et } Y=1\}\big)=P\big(\{X=1 \text{ et } X=0\}\big)=0$ et $P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\neq 0$.

Corollaire 31.95 – Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); P)$.
Si X et Y sont indépendantes alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Proposition 31.96 – Généralisation à un nombre quelconque de variables aléatoires

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Alors,

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$$

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n).$$

Démonstration. On utilise une récurrence sur n... □

V – Inégalité de Bienaymé - Tchebychev

Proposition 31.97 – Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles. Pour tout $a > 0$, $\quad P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$.

Remarque 31.98 – Ce lemme n'est intéressant que si a est grand et plus précisément lorsque $a > E[X]$.

Démonstration. Soit $a > 0$. On pose $\quad A = X(\Omega) \cap [a, +\infty[, \quad B = X(\Omega) \cap [0, a[$.
On a $A \cup B = X(\Omega)$ et $A \cap B = \varnothing$, donc $\{A, B\}$ est un système complet d'évènements de $X(\Omega)$.

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = \sum_{x \in A} xP(X = x) + \sum_{x \in B} xP(X = x)$$

$$\text{d'où} \quad \frac{E(X)}{a} = \sum_{x \in A} \frac{x}{a} P(X = x) + \sum_{x \in B} \frac{x}{a} P(X = x)$$

Cette deuxième somme est une somme de termes positifs, donc elle est positive. On en déduit que $\dfrac{E(X)}{a} \geqslant \displaystyle\sum_{x \in A} \frac{x}{a} P(X = x)$.
Pour $x \in A$, $\dfrac{x}{a} \geqslant 1$, donc $\dfrac{E(X)}{a} \geqslant \displaystyle\sum_{x \in A} P(X = x)$.
Comme les évènements sont deux à deux disjoints, on obtient $\dfrac{E(X)}{a} \geqslant P\left(\displaystyle\bigcup_{x \in A} \{X = x\}\right)$ i.e $\dfrac{E(X)}{a} \geqslant P\big(\{X \in A\}\big) = P(X \geqslant a)$. □

Proposition 31.99 – Inégalité de Bienaymé - Tchebytchev

Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance m et d'écart-type σ non nul. Pour tout $d > 0$,

$$P(|X - m| \geqslant d) \leqslant \frac{\sigma^2}{d^2}.$$

Remarque 31.100 – Cette propriété n'a d'intérêt que si $d > \sigma$. Elle explique que la probabilité que X soit « loin » de sa moyenne est petite et décroit au delà de σ en $\mathcal{O}(1/d^2)$ (d étant un minorant de la distance de X à sa moyenne).

Démonstration. On pose la variable aléatoire $Y = (X - m)^2$ avec $m = E(X)$. Alors, d'après l'inégalité de Markov,

$$P(Y \geqslant d^2) \leqslant \frac{E(Y)}{d^2} = \frac{V(X)}{d^2} = \frac{\sigma^2}{d^2}.$$

Or, $\quad Y \geqslant d^2 \iff (X - m)^2 \geqslant d^2 \iff |X - m| \geqslant d$,
ce qui nous donne que $\quad P\big(|X - m| \geqslant d\big) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{d^2}$. □

Exemple 31.101 – Des élèves de MPSI1 rendent au cours d'une année 1500 interrogations de cours. À chaque fois, il y a 30% de chances que l'interrogation soit ratée. On suppose que les ratages d'interrogations sont indépendants. On note X le nombre d'interrogations ratées pendant l'année.
Chercher un intervalle I tel que la probabilité que $X \in I$ soit d'au moins $0,95$.
X suit une loi binomiale de paramètres $n = 1500$, $p = 0,3$ et $q = 0,7$.
$m = E(X) = 1500 \times 0,3 = 1450$.
$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1500 \times 0,3 \times 0,7} \approx 17,8$. On cherche donc a positif tel que

$$P\big(|X - m| \geqslant a\big) \leqslant 0,05.$$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev,

$$P\big(|X - m| \geqslant a\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Résolvons $\dfrac{\sigma^2}{a^2} \leqslant 0,05$. Cette équation équivaut à $a \geqslant \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{0,05}} \approx 79,4$.
Donc, en prenant $a = 80$, on a que

$$P(|X - m| \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2} \leqslant 0,05$$

et par passage au complémentaire,

$$P\big(|X - m| < 80\big) = 1 - P\big(|X - m| \geqslant 80\big) \geqslant 0,95.$$

Donc la probabilité que le nombre d'interrogations ratées soit strictement entre $450 - 80 = 370$ et $450 + 80 = 530$, c'est-à-dire soit dans $[370, 530]$ est d'au moins $0,95$.

Remarque 31.102 (Loi faible des grands nombres) **–** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi.

Comme elles suivent la même loi, les variables X_i ont toutes la même espérance, notée m et le même écart-type, noté σ.
On note alors $Y_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.
Par linéarité de l'espérance, on a que

$$E(Y_n) = \frac{1}{n}\,(E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)) = \frac{1}{n}(nm) = m$$

De plus, par indépendance des X_i, on a que

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2}\,(V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Donc $\sigma(Y_n) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
On applique l'inégalité de Bienaymé - Tchebytchev à Y_n. Pour tout $d > 0$,

$$P(|Y_n - E(Y_n)| \geqslant d) \leqslant \frac{\sigma(Y_n)^2}{d^2}.$$

$$P(|Y_n - m| \geqslant d) \leqslant \frac{\sigma^2}{nd^2}.$$

Autrement dit, pour tout $d > 0$, la probabilité que Y_n soit dans l'intervalle $]m - d, m + d[$ converge vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Interprétation fréquentiste : Si l'on répète une expérience aléatoire quantitative un grand nombre de fois, en notant X_i le résultat de chaque expérience, alors Y_n représente la moyenne empirique de l'expérience.

Ainsi, on a montré que parmi tous les échantillons de valeurs possibles, ceux dont la moyenne s'éloigne de la probabilité sont rares, et que cette rareté relative s'accentue avec la taille de l'échantillon.