30 | Séries numériques

La différence entre les mathématiciens et les physiciens, c'est qu'après que les physiciens ont prouvé un grand résultat, ils pensent que c'est fantastique, mais après que les mathématiciens ont prouvé un grand résultat, ils pensent que c'est trivial.

Lucien Szpiro (1941-2020), mathématicien.

Numérique signifie « réelle ou complexe » .

I – Définition et natures des séries

1 – Définitions, premiers exemples

Définition 30.1 – Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite réelle ou complexe. On appelle **série de terme général $\mathbf{u_n}$** la suite $(S_N)_{N \geqslant n_0}$ définie par

$$\forall N \geqslant n_0, \qquad S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_N.$$

Cette série se note $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ ou $\sum u_n$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le rang de départ.

Pour tout $N \geqslant n_0$, le nombre S_N est appelé **la somme partielle de rang N** de la série de terme général u_n.

Définition 30.2 – Avec les mêmes notations, la série $\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque la suite $\left(S_N\right)_{N \geqslant n_0}$ est convergente (ce qui est logique, car c'est le même objet). Sa limite finie $\ell = \lim\limits_{N \to +\infty} S_N$ est alors appelée la **somme de la série** $\sum u_n$ et notée $\ell = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Si la suite $(S_N)_{N \geqslant n_0}$ diverge, on dit que la série $\sum u_n$ est **divergente**.

Remarque 30.3 –

1. Une série est une suite.
2. Le terme général et une somme partielle d'une série sont des nombres.
3. La somme d'une série est sa limite, lorsqu'elle existe.
4. Étudier la nature d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

Mais si les séries ne sont que des suites, pourquoi se doter d'une théorie des séries ? La théorie des suites n'est-elle pas suffisante ? Réponse : non.

- **Grande question de la théorie des suites :** À quelle condition la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
- **Grande question de la théorie des séries :** À quelle condition sur la SUITE $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ la SÉRIE $\sum u_n$ est-elle convergente ? Cette question spécifique appelle des résultats spécifiques qui sont l'objet du chapitre.

La convergence de la série $\sum u_n$ repose schématiquement sur deux caractéristiques de la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$:

- la taille de u_n lorsque n tend vers $+\infty$,
- l'importance des compensations mutuelles que les nombres $u_0, u_1, u_2 \ldots$ occasionnent quand on les additionne.

Le cas des suites positives nous occupera un certain temps. S'ils sont positifs, les réels $u_0, u_1, u_2 \ldots$ s'empilent les uns sur les autres sans jamais se compenser quand on les additionne et la convergence de la série $\sum u_n$ ne dépend que de la taille asymptotique de $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Le cas des suites réelles qui changent régulièrement de signe — ou plus généralement des suites complexes — est plus délicat et plus diversifié. Nous nous intéresserons de près aux séries alternées, i.e. aux séries de la forme $\sum (-1)^n a_n$ dans lesquelles la suite $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est de signe constant. C'est le cas le plus simple de compensations des termes sommés entre eux.

ATTENTION ! Comme pour les suites, il faut faire la différence entre la série $\sum u_n$, le terme général u_n de cette série, sa somme partielle de rang N $\sum_{n=n_0}^{N} u_n$, et la somme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ de la série.

Exemple 30.4 –

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$.
   Exprimer les sommes partielles de la série $\sum u_n$. En déduire la nature de cette série.
   Pour tout N entier naturel, la somme partielle de rang N de la série $\sum_{n\geqslant 0} n$ est
   $$\sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}.$$
   La suite $\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0} n$ est divergente.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Exprimer les sommes partielles de la série $\sum v_n$. En déduire que la série converge et donner sa somme.
   Pour tout N entier naturel, la somme partielle de rang N de la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ est
   $$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$
   (on reconnait une somme télescopique)
   La suite $\left(1 - \frac{1}{N+1}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

2 – Premières propriétés de convergence

Proposition 30.5 – Changement d'indice de départ

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite numérique. Soit $n_1 \geqslant n_0$.

1. Les séries associées aux suites $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(u_n)_{n\geqslant n_1}$ sont de même nature.
2. Dans le cas où elles convergent, leurs sommes vérifient la relation :
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n + \sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration. Pour tout $N \geqslant n_1$, on a
$$\sum_{n=n_0}^{N} u_n = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n + \sum_{n=n_1}^{N} u_n.$$
Le terme $\sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n$ est constant, donc $\left(\sum_{n=n_1}^{N} u_n\right)_N$ converge si et seulement si $\left(\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right)_N$ par opérations sur les limites.
Il y a donc équivalence entre la convergence des deux séries.
Le deuxième point s'obtient en passant à la limite. □

Remarque 30.6 – Cette remarque implique une convention d'écriture dans les exercices. Lorsqu'on demande la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n$ sans avoir auparavant défini à partir de quel entier n_0 les termes u_n sont considérés, c'est parce que cette valeur n_0 n'a aucune influence sur la nature de cette série. En pratique, on choisit n_0 le plus petit possible de sorte que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ soit correctement définie. Si l'énoncé demande la somme d'une série convergente, alors la valeur de n_0 est précisée.

Par exemple, quand on s'intéresse à la nature de la série $\sum \frac{1}{n}$, on suppose que $n \geqslant 1$ et il s'agit en fait de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

Définition 30.7 – Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite numérique. On suppose que la série $\sum u_n$ converge.
Pour tout $N \geqslant n_0$, le nombre

$$R_N = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=n_0}^{N} u_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$$

est appelé le **reste d'ordre** N de cette série.

Proposition 30.8 – Terme général et reste d'une série convergente

En utilisant les notations de la définition précédente, si la série $\sum u_n$ est convergente, alors :

1. La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0.
2. La suite $(R_N)_{N \geqslant n_0}$ des restes d'ordre N de la série converge vers 0.

Démonstration.

1. Pour tout $n > n_0$, $\quad u_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} u_n.$
   u est donc la différence de deux suites convergente, donc converge et
   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_n - \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_n = 0.$$
2. De même, en passant à la limite dans la définition de (R_N), on obtient que la suite des restes converge et
   $$\lim_{N \to +\infty} R_N = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = 0.$$

□

La contraposée du premier point est souvent utilisée pour repérer « facilement » des séries divergentes.

Corollaire 30.9 – Série grossièrement divergente

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite numérique. Si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.
On dit que cette série **diverge grossièrement**.

Exemple 30.10 – Étudier la nature des séries $\sum (-1)^n$ et $\sum \frac{n}{1+n}$.

1. La série $\sum (-1)^n$ diverge grossièrement car son terme général diverge donc ne tend pas vers 0.
2. La série $\sum \frac{n}{1+n}$ diverge grossièrement car son terme général converge vers 1 mais pas vers 0.

ATTENTION ! Le fait que la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0 **NE PERMET PAS** de prouver que la série $\sum u_n$ est convergente. (cf exemple ci-dessous) A chaque fois qu'un élève utilise l'argument « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, donc $\sum u_n$ converge », un millier de chatons trop mignons décèdent dans d'atroces souffrances !

Exemple 30.11 – La suite de terme général $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tend vers 0 mais la série $\sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) \sim \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$. $\qquad$ Donc $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$.
Regardons les sommes partielles de la série $\sum_{n \geqslant 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

On reconnait une somme télescopique, donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\quad \sum_{n=0}^{N} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{N+1}$.

Donc la série $\sum_{n \geqslant 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ tend vers $+\infty$.

Théorème 30.12 – Linéarité de la somme infinie

Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites numériques et λ et μ deux scalaires (nombres réels ou complexes).

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

En particulier, la somme de deux séries convergentes est convergente (cas $\lambda = \mu = 1$).

Démonstration. On suppose que les séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} v_n$ sont convergentes. Pour tout $N \geqslant n_0$, on a

$$\sum_{n=n_0}^{N}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{N} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{N} v_n.$$

Par opérations sur les limites de suites convergentes, $\sum_{n=n_0}^{N}(\lambda u_n + \mu v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$. □

Remarque 30.13 – L'égalité $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ n'a de sens que si les trois séries convergent.

Théorème 30.14 – Somme d'une série convergente et d'une série divergente

Soit $\sum u_n$ une série convergente et $\sum v_n$ une série divergente. Alors $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.

Démonstration. On suppose que $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente. On raisonne par l'absurde.
Si $\sum(u_n + v_n)$ est convergente, alors par le premier point, $\sum((u_n + v_n) - u_n)$ est convergente, donc $\sum v_n$ est convergente. Ceci est absurde, donc $\sum v_n$ diverge. □

Remarque 30.15 – Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes, on ne peut rien dire de la nature de la série $\sum(u_n + v_n)$.

Exemple 30.16 – Les deux séries $\sum n$ et $\sum -n$ sont divergentes.
La série $\sum(n-n)$, qui est la série $\sum 0$, est convergente. Par contre, la série $\sum(n+n)$ est divergente.

Proposition 30.17 – Critère de convergence des séries complexes

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent. Dans ce cas :

$$\sum_{n\geqslant n_0} u_n = \sum_{n\geqslant n_0} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n\geqslant n_0} \mathrm{Im}(u_n)$$

Démonstration. Découle des propriétés correspondantes sur les suites complexes. □

3 – Séries géométriques

Définition 30.18 – On appelle **série géométrique** toute série de la forme $\sum a^n$ où a est un nombre complexe.

Proposition 30.19 – Nature des séries géométriques

Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère la série géométrique $\sum a^n$ associée à la suite $(a^n)_{n\geqslant 0}$.

La série géométrique $\sum a^n$ converge si, et seulement si, $|a| < 1$. Dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$.

Démonstration. Si $|a| \geqslant 1$, la série $\sum a^n$ diverge grossièrement. Si $|a| < 1$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$.
Comme $\lim_{N\to+\infty} a^{N+1} = 0$, on en déduit que la série $\sum a^n$ converge vers $\frac{1}{1-a}$. □

Exemple 30.20 – Étudier la convergence des séries suivantes :
$\sum 5^n$ diverge grossièrement.
$\sum i^n$ diverge grossièrement.
$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge vers $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.
$\sum \frac{\text{ch}(n)}{4^n} = \frac{1}{2}\sum\left(\frac{e}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{4e}\right)^n$. Comme $\frac{e}{4}$ et $\frac{1}{4e}$ sont dans $]0,1[$, on obtient que $\sum \frac{\text{ch}(n)}{4^n}$ converge vers $\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{e}{4}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4e}} = \frac{2}{4-e} + \frac{2e}{4e-1}$.

4 – Séries téléscopiques

Définition 30.21 – On appelle **série télescopique** une série numérique $\sum v_n$ dont le terme général v_n peut s'écrire sous la forme $v_n = u_{n+1} - u_n$ où $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite numérique.

Proposition 30.22 – Nature des séries télescopiques
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes.
La série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge.

Remarque 30.23 – Dans la proposition précédente, la condition porte uniquement sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et pas sur la valeur de sa limite. En particulier, il n'est pas nécessaire que la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ soit nulle pour que la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Démonstration. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$.
Donc $\sum_{n\geqslant n_0}(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si $(u_{N+1} - u_0)_{N\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. □

5 – Séries à termes positifs

Proposition 30.24 – Nature des séries à termes positifs
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs ou nuls.

1. La suite $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est croissante.
2. La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée.
3. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$ et on note $\sum_{n\geqslant n_0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration.

1. Pour tout $N \geqslant 1$, $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geqslant 0$, donc $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée.

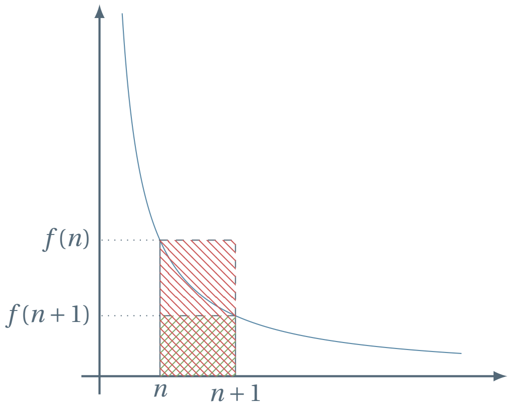
□

Remarque 30.25 – Cela implique que si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels positifs ou nuls, alors la notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ a toujours un sens.

II – Comparaison série-intégrale

1 – Comparaison avec une intégrale

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et f une fonction réelle continue et monotone sur $[n_0, +\infty[$.
On considère la série $\sum f(n)$ associée à la suite $\big(f(n)\big)_{n \geqslant n_0}$. On note $\big(S_N\big)_{N \geqslant n_0}$ la suite des sommes partielles de cette série.
Dans le cas où f est décroissante :



On va encadrer l'aire sous la courbe représentative de f par les sommes partielles. Soit $n \geqslant n_0$. Alors, par décroissance de f, pour tout $t \in [n; n+1]$,

$$f(n) \geqslant f(t) \geqslant f(n+1).$$

En intégrant entre n et $n+1$, on a par croissance de l'intégrale

$$\int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{i.e} \quad f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(n+1).$$

On somme cette relation pour n allant de n_0 à $N-1$. On obtient :

$$\sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \geqslant \sum_{n=n_0}^{N-1} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n+1).$$

$$\text{i.e} \quad S_N - f(N) \geqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant S_N - f(n_0).$$

En renversant, ces inégalités, on obtient un encadrement de S_N :

$$f(n_0) + \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant S_N \geqslant f(N) + \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$$

En reprenant ce raisonnement lorsque f est croissante, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 30.26 – Encadrement d'une somme par des intégrales

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et f une fonction réelle continue et monotone sur $[n_0, +\infty[$.

Pour tout $N \geqslant n_0$, on note $S_N = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} f(n)$ la somme partielle de rang N de la série $\sum f(n)$.

1. Si f est croissante, alors pour tout $N \geqslant n_0$

$$\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(n_0) \leqslant S_N \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(N).$$

2. Si f est décroissante, alors pour tout $N \geqslant n_0$,

$$\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(N) \leqslant S_N \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + f(n_0).$$

Théorème 30.27 – Théorème de comparaison série-intégrale

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et f une fonction réelle continue, **décroissante** et positive ou nulle sur $[n_0, +\infty[$.

1. La série $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{N \geqslant n_0}$ converge.
2. En cas de convergence, $0 \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) - \lim_{N \to +\infty} \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n_0)$.
3. En cas de divergence, $\sum_{n=n_0}^{N} f(n) \underset{N \to +\infty}{=} \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)$. où ℓ est un réel.

Démonstration.

1. Pour tout $N \geqslant n_0$, on note $u_N = \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} f(n)$ la somme partielle de rang N de la série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$. D'après la proposition précédente, on a donc pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$u_N + f(N) \leqslant S_N \leqslant u_N + f(n_0).$$
$\sum f(n)$ est une série à termes positifs car f est positive.
Si u_N converge, alors S_N est majorée. Comme c'est une série à termes positifs, elle converge d'après la Proposition 30.24.
Réciproquement, si $\sum f(n)$ converge, alors, d'après la Proposition 30.8, la suite $\big(f(n)\big)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0. On a alors pour tout $N \geqslant n_0$:
$$u_N \leqslant S_n - f(N).$$
Or, $\big(S_N - f(N)\big)_{N \geqslant n_0}$ est convergente et $\big(u_N\big)_{N \geqslant n_0}$ est croissante, donc par théorème de comparaison, $(u_N)_{N \geqslant n_0}$ converge.
2. On a pour tout $N \geqslant n_0$,
$$f(N) \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n) - \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n_0).$$
En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient bien le résultat voulu.
3. En cas de divergence, on pose pour tout $N \geqslant n_0$ $w_N = S_N - \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors,
$$w_{N+1} - w_N = f(N+1) - \int_{N}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$
Comme f est décroissante, $f(t) \geqslant f(N+1)$ pour tout $t \in [N, N+1]$, donc en intégrant entre N et $N+1$, on obtient que $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$. w est donc décroissante. De plus, par la proposition précédente, $w_N \geqslant f(N) \geqslant 0$, w est donc minorée, donc elle converge vers une constante ℓ. On obtient ainsi l'écriture
$$S_N - u_N \underset{N \to +\infty}{=} \ell + o(1).$$

□

Remarque 30.28 – Le dernier point a déjà été vu dans le Chapitre 21. Il permet par exemple d'obtenir le développement asymptotique de la série harmonique, en considérant la fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{t}$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{=} = \ln(n) + \gamma + o(1) \qquad \text{où } \gamma \text{ est la constante d'Euler}.$$

2 – Les séries de Riemann

Définition 30.29 – On appelle **séries de Riemann** les séries de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 30.30 – Nature des séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque 30.31 –

- La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge et joue le rôle d'une frontière entre le cas convergent et le cas divergent des séries de Riemann. Convergence au-delà, divergence en deçà.
- En cas de convergence, on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. On sait par exemple que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et que $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Profitons de l'occasion pour évoquer la constante d'Apéry, qui désigne $\zeta(3)$ (égale environ à 1,202), nommée en l'honneur de Roger Apéry, chercheur de l'université de Caen qui a démontré en 1978 que ce nombre est irrationnel. La fonction ζ est une fonction usuelle majeure des mathématiques, intimement liée à la répartition des nombres premiers en dépit des apparences !

Démonstration. Si $\alpha \leqslant 0$, alors la suite de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est strictement positive et croissante, donc ne converge pas vers 0. Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Lorsque $\alpha > 0$, nous allons utiliser le principe de comparaison série intégrale. On pose, pour tout $N \geqslant 1$, $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$. Alors, posant la fonction $f_\alpha : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, on a $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_\alpha(n)$. f_α est continue positive et décroissante (car elle est dérivable et sa dérivée $x \mapsto -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ est négative). Donc, d'après le principe de comparaison série-intégrale, la série (S_N) est convergente si et seulement si $\int_1^N f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
Pour $\alpha = 1$, on a

$$\int_1^N f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = [\ln(x)]_1^N = \ln(N) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
Si $\alpha \neq 1$, alors

$$\int_1^N f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\alpha-1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^N = (1-\alpha)(N^{1-\alpha}) + \alpha - 1.$$

La suite de terme général $(N^{1-\alpha})$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
On en déduit que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. □

Remarque 30.32 – Le théorème 30.27 nous permet également d'obtenir que, $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $0 < \alpha < 1$.

Exemple 30.33 – Déterminer la limite de $\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$.

D'après le théorème précédent, comme $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2}$, elle diverge, mais la remarque nous assure que $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{N^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{N}$. Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2$, donc $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2$.

III – Comparaisons de séries à termes réels positifs ou nuls

On rappelle (Proposition 30.24) que toute série à termes positives converge si et seulement si elle est majorée.

Proposition 30.34 – Critère de comparaison des séries à termes positifs

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites de réels positifs ou nuls tels que $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$.

- Si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si la série $\sum u_n$ est divergente, alors la série $\sum v_n$ est divergente.
- Dans tous les cas, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$. (Par convention, $+\infty$ est supérieur à tout réel)

Démonstration. Pour tout $N \geqslant n_0$, on pose $U_n = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$ et $V_n = \sum_{n=n_0}^{N} v_n$. On a alors pour tout $N \geqslant n_0$ que $U_N \leqslant V_N$.
Si $\sum v_n$ converge, alors la suite (V_N) converge donc est majorée. Donc (U_N) est également majorée. Comme (U_N) est croissante, elle est donc convergente.

Le deuxième point est la contraposée du premier. □

Exemple 30.35 –

1. Donner la nature de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\sqrt{n^4+n+1} \geqslant \sqrt{n^4} = n^2$, donc
$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
$\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$ converge.
2. Donner la nature de la série $\sum \left(\frac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n}\right)$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\frac{1}{n} \leqslant \left(\frac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n}\right)$.
$\sum \frac{1}{n}$ diverge donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 1} (\frac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n})$

Proposition 30.36 – Critère des équivalents pour les séries à termes positifs

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites **à termes réels positifs ou nuls.**

Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

Démonstration. Si $u_n \sim v_n$, alors il existe une suite a qui converge vers 1 telle que $u = av$. Par propriété sur les suites convergentes, à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on a que $\frac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant \frac{3}{2}$, et donc $\frac{v_n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3v_n}{2}$.
Si $\sum v_n$ converge, alors $\frac{3}{2}\sum v_n$ converge et par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{1}{2} v_n$ converge par théorème de comparaison des séries à termes positifs, donc $\sum v_n$ converge. □

Exemple 30.37 –

1. Donner la nature de la série $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

   Pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{2^n} \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$. Or sin est positive sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$, donc la suite $\left(\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$ est à termes positifs.
   $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}$.
   Donc, par le théorème des équivalents de séries à termes positifs, $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ sont de même nature.
   Comme $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ elle est convergente, donc $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est convergente.
2. Donner la nature de la série $\sum (\mathrm{e}^{1/n} - 1)$.
   Pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{e}^{1/n} \geqslant 1$, donc la suite $(\mathrm{e}^{1/n} - 1)$ est à termes positifs.
   $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(\mathrm{e}^{1/n} - 1) \sim \frac{1}{n}$.
   Donc, par le théorème des équivalents de séries à termes positifs, $\sum (\mathrm{e}^{1/n} - 1)$ et $\sum \frac{1}{n}$ sont de même nature.
   Comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, $\sum (\mathrm{e}^{1/n} - 1)$ est divergente.

IV – Convergence absolue et séries alternées

1 – Convergence absolue

Définition 30.38 – Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** lorsque la série à termes positifs ou nuls $\sum |u_n|$ est convergente.

Notation 30.39 – Pour dire que la série est absolument convergente, on peut noter $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

Théorème 30.40 – La convergence absolue implique la convergence

Si une série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Démonstration.

- Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite réelle. On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ par : pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n = u_n + |u_n|$. Alors, pour tout n, on a
$$0 \leqslant v_n \leqslant 2|u_n|.$$
$\sum |u_n|$ converge par hypothèse, donc est majorée. on en déduit que $\sum v_n$ est aussi majorée. Comme c'est une série à termes positifs, elle converge. Ainsi, $\sum u_n = \sum v_n - \sum |u_n|$, donc $\sum u_n$ converge.
- Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite complexe, alors, pour tout $n \geqslant n_0$, on a
$0 \leqslant |\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant |\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$
Ainsi, $\sum |\mathrm{Re}(u_n)|$ et $\sum |\mathrm{Im}(u_n)|$ sont des séries à termes positifs et majorées, donc convergentes.
$\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ sont absolument convergentes, donc convergentes d'après le premier point. Par linéarité, $\sum \mathrm{Re}(u_n) + i\mathrm{Im}(u_n)$ est convergente.

□

Proposition 30.41 – Inégalité triangulaire pour les séries absolument convergentes

Si une série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente alors $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$.

Démonstration. Pour tout $N \geqslant n_0$, on a par inégalité triangulaire
$$\left|\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} |u_n|.$$
Lorsque ces deux séries sont convergentes, on peut passer à la limite et on obtient le résultat. □

Exemple 30.42 – Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$. $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par théorème de comparaisons des séries à termes positifs, la série $\sum \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right|$ est convergente.

Ainsi, $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in}}{n\sqrt{n}}$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\left|\frac{e^{in}}{n\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{n^{3/2}}$. On a que $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente, donc par théorème de comparaisons des séries à termes positifs, la série $\sum \left|\frac{e^{in}}{n\sqrt{n}}\right|$ est convergente.

Ainsi, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in}}{n\sqrt{n}}$ est absolument convergente donc convergente.

ATTENTION ! Une série peut être convergente sans être absolument convergente. Par exemple, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente mais n'est pas absolument convergente. (cf td)

Définition 30.43 – Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **sommable** lorsque la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Définition 30.44 – Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est sommable, on appelle **somme de la suite** $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ la somme de la série qui lui est associée, c'est-à-dire le nombre $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Remarque 30.45 – Dans le cas où $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est pas sommable, il est tout de même possible que la série $\sum u_n$ soit convergente et donc que la somme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ existe. Cependant, si la suite est sommable, on peut prouver que quelle que soit la façon de regrouper les termes de la suite voire à en changer l'ordre, la somme existe et vaut toujours la même valeur (hors programme).

Proposition 30.46 – Critère du $\mathcal{O}$

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Démonstration. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$, alors il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $0 \leqslant |u_n| \leqslant M v_n$.
$\sum v_n$ converge, donc $\sum M v_n$ converge.
Donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge.
$\sum u_n$ est donc absolument convergente.

□

Remarque 30.47 – Sous les mêmes hypothèses, si $u_n = o(v_n)$ et si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

Exemple 30.48 – Quelle est la nature de la série $\sum \frac{n\cos(3n+1)\sqrt[3]{n}}{n^3-5n+2}$?

Pour n assez grand, $\frac{n\cos(3n+1)\sqrt[3]{n}}{n^3-5n+2} = \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}} \times \frac{\cos(3n+1)}{1-(5/n^2)+(2/n^3)} = \mathcal{O}(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge car $\frac{5}{3} > 1$, donc $\sum \frac{n\cos(3n+1)\sqrt{n}}{n^3-5n+2}$ converge par la proposition précédente.

2 – Séries alternées

Définition 30.49 – On appelle **série alternée** toute série de la forme $\sum(-1)^n a_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de signe constant.

Exemple 30.50 – Les séries $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-n}}{n^2+1}$ sont alternées.

Théorème 30.51 – Critère spécial des séries alternées

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **DÉCROISSANTE DE LIMITE NULLE**. La série alternée $\sum(-1)^n a_n$ converge.

Démonstration. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ et montrons que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles seront alors convergentes de même limite, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergera d'après le théorème des suites extraites et nous aurons ainsi prouvé que la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.
Or par hypothèse : $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ensuite, la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_{2(n+1)} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0$, et la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour une raison analogue. □

Exemple 30.52 – Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La **série de Riemann alternée** $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Démonstration. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement) si $\alpha \leqslant 0$, mais si au contraire $\alpha > 0$, elle converge d'après le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite nulle. □

Remarque 30.53 – Pour $\alpha \in]0,1]$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est *semi-convergente* - elle converge, mais pas absolument.

Il est très fréquent qu'on ne puisse pas appliquer le critère spécial des séries alternées directement quand on étudie une série alternée. L'hypothèse de décroissance peut être difficile à vérifiée, voire fausse. Dans l'exemple qui suit, le terme général est cassé en morceaux simples dont on se demande à part s'ils sont associés à des séries convergentes ou divergentes.

Exemple 30.54 – La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(\ln n)}$ converge.

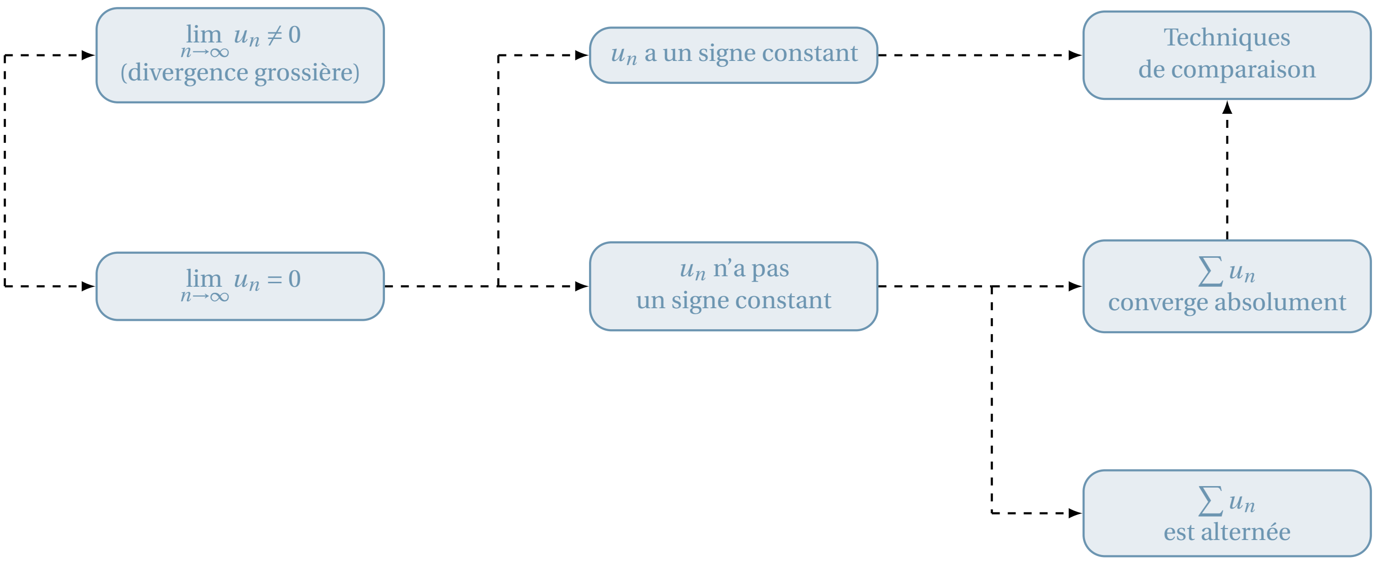
Démonstration. La monotonie de la suite $\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(\ln n)}\right)$ paraît délicate à étudier, le critère spécial des séries alternées ne nous sera donc pas utile directement. Petit rappel : $\frac{1}{1+u} = 1 - u + o(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + O(u)$.

$$\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(\ln n)} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} \times \frac{1}{1 + \frac{\sin(\ln n)}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right).$$

Or la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}$ converge car $\frac{3}{4} > 0$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ aussi car $\frac{5}{4} > 1$. Par somme, par comparaison par des grands O, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(\ln n)}$ converge. □

V – Récapitulation des techniques de convergence

Le schéma ci-contre rassemble et ordonne les résultats de convergence de ce chapitre. Il mérite un sérieux coup d'œil même si, comme souvent en mathématiques, ces résultats **NE PERMETTENT PAS DE CONCLURE DANS TOUS LES CAS** . La méthode qui marche tout le temps n'existe pas!



VI – Famille sommable

1 – Rappels de la droite réelle achevée

On rappelle que l'ensemble $\mathbb{R}$ peut être complété en $\overline{\mathbb{R}}$ en lui ajoutant deux éléments $\{+\infty, -\infty\}$ avec des règles de calculs que l'on utilise notamment pour nos limites. Deux problèmes se posent pour avoir des opérations bien définies $(+\infty)+(-\infty)$ et $0\times(\pm\infty)$.

Dans la suite nous allons travailler dans $[0,+\infty] = \overline{\mathbb{R}_+}$. On pose par convention : $\quad 0\times(+\infty) = (+\infty)\times 0 = 0.$

Ainsi tout est bien défini!

On a vu également que $\overline{\mathbb{R}}$ est un ensemble bien ordonné avec $\leqslant$ (c'est une relation d'ordre total). C'est donc toujours le cas pour $[0,+\infty]$.

Avec notre relation d'ordre, on peut donc parler de majoration/minoration, d'ensemble majoré/minoré, de plus grand ou plus petit élément et aussi de borne supérieure et inférieure. On a déjà vu que tout ensemble (et même l'ensemble vide) possède une borne supérieure (et inférieure) qui peut éventuellement être $+\infty$. Si l'ensemble est majoré, on retrouve la borne supérieure classique. Le cas de l'ensemble vide se traite rapidement :

- dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a $\sup\emptyset = -\infty$ et $\inf\emptyset = +\infty$
- dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, on a $\sup\emptyset = 0$ et $\inf\emptyset = +\infty$

Rappelons enfin quelques règles de manipulation de la borne supérieure. Pour deux parties A et B de $\mathbb{R}$:

$$A\subset B \Longrightarrow \sup(A)\leqslant\sup(B), \qquad \sup(\lambda A) = \lambda\sup A, \qquad \sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B).$$

2 – Somme d'une famille quelconque d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$

Nous savons parfaitement définir et manipuler les sommes **FINIES** de nombres complexes - changer d'indice, casser, regrouper, permuter... Nous savons aussi définir les sommes de séries **CONVERGENTES** , mais nous n'avons pas vraiment appris à les manipuler. Hélas, les sommes infinies posent problème car on ne peut pas y regrouper les termes comme on veut en général. Étonnant! Intéressons-nous par exemple à la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ qui vaut $\ln 2$:

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac12+\frac13-\frac14+\frac15-\frac16+\frac17-\frac18+\dots.$$

Ôtons-lui sa moitié. On obtient $\dfrac{\ln 2}{2}$ bien sûr. Et si on prend des libertés avec l'ordre des termes?

$$\begin{aligned}\frac{\ln(2)}{2} &= 1-\frac12+\frac13-\frac14+\frac15-\frac16+\frac17-\frac18+\dots\\ &\quad -\frac12\left(1-\frac12+\frac13-\frac14+\frac15-\frac16+\frac17-\frac18+\dots\right).\\ &= (1-\frac12-\frac12)+(\frac13-\frac16-\frac16)+(\frac15-\frac1{10}-\frac1{10})+\dots = 0.\end{aligned}$$

Oups! Moralité : quand on additionne des termes, on ne peut donc pas les regrouper à notre convenance!

Nous pouvons maintenant rentrer dans le vif du sujet. Objectif : calculer la somme d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ où I est un ensemble quelconque et $x_i\in[0,+\infty]$ pour tout i. On note alors $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties **FINIES** de I.

Remarquons tout d'abord que si I est fini, alors il s'agit d'une bête somme finie. Dans ce cas, pour tout $J\subset I$, on a J fini et $\displaystyle\sum_{j\in J}x_j\leqslant\sum_{i\in I}x_i$. (On remarquera que si l'un des $x_i = +\infty$ alors ces deux sommes peuvent être infinies.

Toujours dans le cas où I est fini $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i$ est donc un majorant de $A = \left\{\displaystyle\sum_{j\in J}x_j \,|\, J\in\mathcal{P}_f(I)\right\}$. De plus I étant fini, c'est l'un de ses éléments, donc on a

$$\max A = \sup A = \sum_{i\in I}x_i$$

Intéressons nous ensuite au cas où $I=\mathbb{N}$ et où $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i$ est convergente. Alors on a encore par positivité des x_i, pour tout $J\subset I$ et J fini, $\displaystyle\sum_{j\in J}x_j\leqslant\sum_{i\in I}x_i$. Ainsi $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i$ est encore un majorant de $A = \left\{\displaystyle\sum_{j\in J}x_j \,|\, J\in\mathcal{P}_f(I)\right\}$.

De plus $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i$ est la limite d'une suite d'éléments de A avec $J = [\![1,n]\!]$. Donc d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure on a encore :

$$\sup A = \sum_{i\in I}x_i$$

Ces deux cas simples nous amènent à définir de la manière suivante la somme d'une famille $(x_i)_{i\in I}$.

Définition 30.55 – Pour toute famille $\left(x_i\right)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$, on appelle **somme de la famille** $\left(x_i\right)_{i\in I}$ l'élément $\sum_{i\in I} x_i = \sup_{J\in\mathcal{P}_f(I)} \left\{\sum_{j\in J} x_j\right\}$. Cet élément est dans $[0,+\infty]$.

Remarque 30.56 – D'après nos calculs précédents :

- Si I est fini, c'est un bête calcul de somme comme on en a fait depuis septembre.
- Si $I=\mathbb{N}$, c'est un bête calcul de série comme on en a fait depuis le début de ce chapitre. La somme est finie si la série converge, et vaut $+\infty$ si elle diverge.
- Si l'un des x_i vaut $+\infty$ alors la somme aussi... Attention cependant la réciproque est fausse, la somme peut être infinie avec aucun terme qui vaut $+\infty$. Penser tout simplement à une somme infinie de 1 ou bien (plus subtil) à la série harmonique.

Cette définition à base de borne supérieure sur toutes les sommes finies suggère dès à présent que le calcul de $\sum_{i\in I} x_i$ ne devrait pas trop dépendre de l'ordre dans lequel on choisit de sommer. La notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la théorie des séries indique au contraire qu'on somme les u_n dans l'ordre naturel – u_0, puis u_1, puis u_2....

Voici justement **LE** gros théorème sur les familles sommables qui dit globalement que l'on peut faire ce que l'on veut et additionner dans l'ordre que l'on veut, à condition bien sûr d'additionner des éléments de $[0,+\infty]$.

Théorème 30.57 – Sommation par paquet

Soit $\left(x_i\right)_{i\in I}$ une famille quelconque d'éléments de $[0,+\infty]$ et $\left(I_k\right)_{k\in K}$ une partition de I. Alors on a :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} x_i.$$

Démonstration. Commençons par bien comprendre ce que chacun des trois sommes du théorème signifie :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup_{J\in\mathcal{P}_f(I)} \sum_{j\in J} x_j, \qquad \sum_{j\in I_k} x_j = \sup_{J_k\in\mathcal{P}_f(I_k)} \sum_{j\in J_k} x_j \quad \text{pour tout } k\in K \qquad \text{et} \qquad \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} x_i = \sup_{L\in\mathcal{P}_f(K)} \sum_{k\in L}\sum_{i\in I_k} x_i$$

Montrons l'égalité du théorème par double inégalité :

- Montrons que $\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} x_i$, i.e. que pour toute partie finie J de I : $\quad \sum_{j\in J} x_j \leqslant \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} x_i$

  Soit J dans $\mathcal{P}_f(I)$ et posons $L=\left\{k\in K | J\cap I_k\neq\emptyset\right\}$. On note alors pour tout $k\in L$, $J_k=J\cap I_k$. Alors, pour tout k, J_k est fini car inclus dans J fini et $J_k\subset I_k$. Ainsi $J_k\in\mathcal{P}_f(I_k)$. De plus les J_k forment une partition de J.
  Et on a également L fini car J l'est. Donc $L\in\mathcal{P}_f(K)$. Finalement :

$$\sum_{i\in J} x_i = \sum_{k\in L}\sum_{j\in J_k} x_j \leqslant \sum_{k\in L}\sum_{i\in I_k} x_i \leqslant \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} x_i$$

- Montrons maintenant que $\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} x_i \leqslant \sum_{i\in I} x_i$., i.e. que pour toute partie finie L de K : $\quad \sum_{k\in L}\sum_{j\in I_k} x_j \leqslant \sum_{i\in I} x_i$.

  Soit $L\in\mathcal{P}_f(K)$. Pour tout $k\in L$ et toute partie finie J_k de I_k, les ensembles J_k sont disjoints et $\bigcup_{k\in L} J_k$ est une partie finie de I, que l'on note G. On a alors :

$$\sum_{k\in L}\sum_{j\in J_k} = \sum_{i\in G} x_i \leqslant \sum_{i\in I} x_i.$$

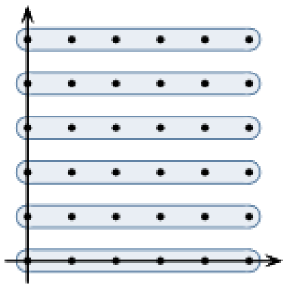
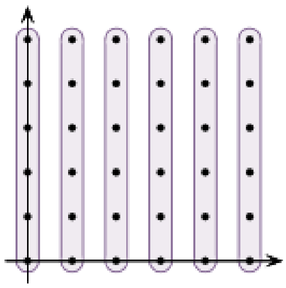
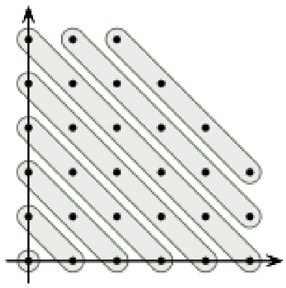
  par définition du sup. A fortiori :

$$\sum_{k\in L}\sum_{j\in I_k} \leqslant \sum_{i\in I} x_i.$$

Ce qui démontre le résultat annoncé. □

Remarque 30.58 – Voici quelques découpages classiques déjà évoqués cette année :

- $\mathbb{N} = (2\mathbb{N}) \cup (2\mathbb{N}+1)$,
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}^*)$,
- $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} [\![2^k, 2^{k+1}-1]\!] = \{1\} \cup \{2,3\} \cup \{4,5,6,7\} \cup \{8,\dots,15\} \cup \dots$,
- $\mathbb{N}^2 = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \{i\} \times \mathbb{N}$ (découpage en lignes),
- $\mathbb{N}^2 = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{i\}$ (découpage en colonnes),
- $\mathbb{N}^2 = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{(k, n-k)\} | k \in [\![0,n]\!]\}$ (découpage en diagonales).

Les règles de calculs suivantes ne risquent pas de vous dépayser, vous les connaissez parfaitement dans le cas des sommes finies et la morale de l'histoire est simple, tout se passe au mieux **TANT QU'ON SOMME DES ÉLÉMENTS DE** $[0,+\infty]$.

Proposition 30.59

Soient $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$, $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, $(a_i)_{i\in I}$, $(b_j)_{j\in J}$ des familles d'éléments de $[0,+\infty]$ et $\lambda \in [0,+\infty]$.

1. **Changement d'indice :** Pour toute bijection φ de J sur I : $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{j\in J} x_{\varphi(j)}$.

   En particulier, pour $I = J = \mathbb{N}$, la somme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est invariante par permutation, i.e. ne dépend pas de l'ordre de sommation.
2. **Restriction :** Pour toute partie I' de I : $\sum\limits_{i\in I'} x_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} x_i$.
3. **Théorème de Fubini :** $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} u_{i,j} = \sum\limits_{j\in J}\sum\limits_{i\in I} u_{i,j}$.
4. **Linéarité :** $\sum\limits_{i\in I} \lambda x_i + y_i = \lambda \sum\limits_{i\in I} x_i + \sum\limits_{i\in I} y_i$.
5. **Croissance :** Si $x_i \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$: $\sum\limits_{i\in I} x_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} y_i$.
6. **Familles « produits » :** $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum\limits_{i\in I} a_i\right) \times \left(\sum\limits_{j\in J} b_j\right)$.

Démonstration.

(i) $I = \varphi(J) = \bigsqcup\limits_{j\in J} \{\varphi(j)\}$, donc $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{j\in J} x_{\varphi(j)}$ d'après le théorème de sommation par paquets.

(ii) $I = I' \sqcup (I \setminus I')$, donc d'après le théorème de sommation par paquets : $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{i'\in I'} x_{i'} + \overbrace{\sum\limits_{i\in I\setminus I'} x_i}^{\in[0,+\infty]} \geqslant \sum\limits_{i'\in I'} x_{i'}$

(iii) En notant A l'ensemble $\left\{\sum\limits_{j\in J} x_j \mid J \in \mathcal{P}_f(I)\right\}$: $\lambda \sum\limits_{i\in I} x_i = \lambda \sup A = \sup(\lambda A) = \sum\limits_{i\in I} \lambda x_i$.

Pour l'additivité, posons $z_{i1} = x_i$ et $z_{i2} = y_i$ pour tout $i \in I$ et découpons $I \times \{1,2\}$ de deux manières différentes : $(I\times\{1\}) \sqcup (I\times\{2\}) = I\times\{1,2\} = \bigsqcup\limits_{i\in I} \{(i,1),(i,2)\}$, puis appliquons deux fois le théorème de sommation par paquets : $\sum\limits_{i\in I} z_{i1} + \sum\limits_{i\in I} z_{i2} = \sum\limits_{(i,j)\in I\times\{1,2\}} z_{ij} = \sum\limits_{i\in I} (z_{i1} + z_{i2})$, i.e. $\sum\limits_{i\in I} x_i + \sum\limits_{i\in I} y_i = \sum\limits_{i\in I} (x_i + y_i)$.

(iv) Le résultat est clair si l'un des x_i vaut $+\infty$. Si au contraire aucun x_i ne vaut $+\infty$: $y_i - x_i \in [0,+\infty]$, donc par linéarité : $\sum_{i\in I} y_i = \sum_{i\in I}(x_i + (y_i - x_i)) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I}(y_i - x_i) = \sum_{i\in I} x_i + \underbrace{\sum_{i\in I}(y_i - x_i)}_{\in[0,+\infty]} \geqslant \sum_{i\in I} x_i$.

(v) $\bigsqcup_{i\in I}(\{i\}\times J) = I\times J = \bigsqcup_{j\in J}(I\times\{j\})$, donc $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{ij} = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{ij}$ après une double application du théorème de sommation par paquets.

(vi) $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j \overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_i b_j \overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{j\in J}\left(b_j \sum_{i\in I} a_i\right) \overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j$.

□

Exemple 30.60 –

1. On rappelle que $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^n}$. On en déduit alors :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n)-1) = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\frac{1}{1-\frac{1}{k}} = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1.$$

2. $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\frac{p^q}{e^{2p}q!} = \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2p}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{p^q}{q!} = \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2p}e^p = \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-p} = \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$.

3 – Famille sommable

Il est réjouissant de savoir additionner avec légèreté les réels positifs, mais on est souvent conduit à additionner des réels quelconques, voire des nombres complexes. La situation est alors plus périlleuse mais pas inextricable grâce au concept de famille sommable. Notez bien qu'on ne définit pas la notion de somme dans un premier temps, mais une condition abstraite appelée sommabilité. Les sommes viendront ensuite.

Définition 30.61 – Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. On dit que (x_i) est **sommable** si $\sum_{i\in I}|x_i| < +\infty$.

L'ensemble des familles sommables de $\mathbb{C}^I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\ell^1(I,\mathbb{K})$.

Remarque 30.62 –

1. Toute famille FINIE de nombres complexes est évidemment sommable.
2. Pour $I = \mathbb{N}$, une suite (x_n) de nombres complexes est sommable si et seulement la série $\sum x_n$ converge absolument.
3. Pour toutes familles $(x_i)_{i\in I}$, et $(y_i)_{i\in I}$ de nombres complexes telles que $|x_i| \leqslant |y_i|$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de (y_i) entraîne celle de (x_i).

Afin de se ramener au cas positif pour le calcul de la somme, introduisons les notions de partie positive et négative d'un nombre réel.

Définition 30.63 – On définit la **partie positive**, notée x^+ et négative, notée x^- d'un réel x par les relations :

$$x^+ = \max(x,0), \quad x^- = -\min(x,0).$$

On remarque aussitôt que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leqslant x^+ \leqslant |x|$ et $0 \leqslant x^- \leqslant |x|$. Notamment la partie négative d'un réel est positive. De cette définition, on en déduit aussitôt les relations suivantes :

$$x = x^+ - x^- \quad \text{et} \quad |x| = x^+ + x^-.$$

et

$$x^+ = \frac{|x|+x}{2} \quad \text{et} \quad x^- = \frac{|x|-x}{2}.$$

Soit maintenant $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels. Alors les familles (x_i^+) et (x_i^-) sont sommables d'après le dernier point de la remarque. Et ce sont de plus des éléments de $[0,+\infty]$ dont on peut donc considérer la somme. On définit alors la somme de la famille (x_i) en posant :

$$\boxed{\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^-.}$$

Soit maintenant $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes. Alors les familles $\big(\mathrm{Re}(x_i)\big)$ et $\big(\mathrm{Im}(x_i)\big)$ sont sommables, toujours d'après le dernier point de la remarque. Et de plus ce sont des éléments réels dont on peut donc considérer la somme en appliquant le point précédent. On définit alors la somme de la famille (x_i) en posant :

$$\boxed{\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I}\mathrm{Re}(x_i) + i\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(x_i).}$$

Remarque 30.64 – On remarque que l'on a alors $\displaystyle\sum_{i\in I}\mathrm{Re}(x_i) = \mathrm{Re}\left(\sum_{i\in I} x_i\right)$ et $\displaystyle\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(x_i) = \mathrm{Im}\left(\sum_{i\in I} x_i\right)$

La philosophie des résultats suivants doit être bien comprise. On vérifie la sommabilité par un calcul de somme **AVEC** module, mais une fois qu'elle est vérifiée, tout est permis **SANS** module - changement d'indice, découpages, permutations...

Théorème 30.65 – Propriétés des familles sommables

Soit $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$, $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, $(a_i)_{i\in I}$, $(b_j)_{j\in J}$ des familles de nombres complexes et $\lambda\in\mathbb{C}$.

1. **Restriction :** Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, la famille $(x_i)_{i\in I'}$ l'est aussi pour toute partie $I'\subset I$.
2. **Linéarité :** L'ensemble $\ell^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$. Plus précisément, si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables, la famille $(x_i+\lambda y_i)_{i\in I}$ l'est aussi et :
$$\sum_{i\in I}(x_i+\lambda y_i) = \sum_{i\in I} + \lambda\sum_{i\in I} y_i.$$
3. **Croissance :** Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables et réels, et si $x_i\leqslant y_i$ pour tout $i\in I$ alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i\leqslant\sum_{i\in I} y_i$.
4. **Inégalité triangulaire :** Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable : $\displaystyle\left|\sum_{i\in I} x_i\right|\leqslant\sum_{i\in I}|x_i|$.
5. **Théorème de sommation par paquets :** Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, alors pour toute partition $(I_k)_{k\in K}$ de I, la famille $\displaystyle\left(\sum_{i\in I_k} x_i\right)_{k\in K}$ l'est aussi et :
$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} x_i.$$
6. **Changement d'indice :** Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, alors pour toute bijection φ de J sur I, la famille $(x_{\varphi(j)})_{j\in J}$ est sommable également et on a : $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{\varphi(j)}$.
   En particulier, pour $I=J=\mathbb{N}$, la somme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ d'une série absolument convergente est invariante par permutation, i.e. ne dépend pas de l'ordre de sommation.
7. **Théorème de Fubini :** Si $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable alors les familles $\displaystyle\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ et $\displaystyle\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)_{j\in J}$ sont sommables et on a :
$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}.$$
8. **Familles « produits » :** Si $(a_i)_{i\in I}$, $(b_j)_{j\in J}$ sont deux familles sommables, alors $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ l'est aussi et on a :
$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\times\left(\sum_{j\in J} b_j\right).$$
9. **Approximation par des sommes finies :** Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, alors on a :
$$\forall\varepsilon>0, \exists J\in\mathcal{P}_f(I), \left|\sum_{i\in I} x_i - \sum_{i\in J} x_i\right|\leqslant\varepsilon.$$

Démonstration. Hors programme! □

Remarque 30.66 – On n'est jamais sûr d'avoir le droit d'additionner les termes d'une famille de nombres complexes quelconques tant qu'on n'a pas prouvé sa sommabilité. Il est courant cela dit qu'on ne se préoccupe de la sommabilité qu' **APRÈS** avoir calculé la somme, mais il faut bien préciser le cas échéant qu'on travaille « sous réserve de sommabilité ».

Exemple 30.67 – Soit $z \in \mathbb{C}$. On souhaite calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}$. **SOUS RÉSERVE DE SOMMABILITÉ** :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} = \sum_{\substack{k,n \in \mathbb{N}^* \\ n>k}} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(-1 + \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

$$= -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2ik\pi}} = -\frac{1}{2} \quad \text{car pour tout } n \geqslant 2 : \quad \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} = 0.$$

Mais de fait, la famille $\left(\dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} \right)_{n,k \in \mathbb{N}^*, n>k}$ est sommable car :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \left| \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{2^n} < +\infty.$$

Dernière notion du chapitre, le produit de Cauchy n'est qu'une simple application de la théorie des familles sommables, mais pas des moindres.

Définition-Théorème 30.68 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. On appelle **produit de Cauchy** de (u_n) et (v_n) la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\displaystyle p_n = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n \, i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

La famille $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)$.

Remarque 30.69 – On dit aussi que la **SÉRIE** $\sum p_n$ est le produit de Cauchy des **SÉRIES** $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Démonstration. On a déjà vu que la famille $(u_i v_j)_{I \times J}$ est sommable et on fait une somme diagonale (voir remarque sur les découpages classiques). Assurez-vous d'avoir bien compris le fond de l'affaire :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i \times \sum_{j \in \mathbb{N}} v_j = \underbrace{u_0 v_0}_{i+j=0} + \underbrace{u_0 v_1 + u_1 v_0}_{i+j=1} + \underbrace{u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0}_{i+j=2} + \ldots = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{0 \leqslant i,j \leqslant n \\ i+j=n}} u_i v_j.$$

□

Remarque 30.70 – Le résultat précédent peut être énoncé en termes de séries. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent **ABSOLUMENT** , il en est de même de la série $\sum p_n$. La convergence **ABSOLUE** y est cependant cruciale. Posons pour le comprendre $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et notons $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le produit de Cauchy de la suite (u_n) par elle-même. La série $\sum u_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées, mais la série $\sum p_n$ diverge (grossièrement). En effet on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|p_n| = \left| \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1$$

Exemple 30.71 – Finissons le chapitre avec un petit retour sur la série exponentielle pour retrouver la règle de calcul sur les exposants ! On a déjà vu (Chapitre 27 - Développement en série entière de l'exponentielle) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Cette formule s'étend alors (admis ici, mais faisable avec les outils de MPSI) à $\mathbb{C}$ tout entier. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Les suites $\left(\dfrac{a^n}{n!} \right)$ et $\left(\dfrac{b^n}{n!} \right)$ sont sommables, de somme e^a et e^b.
Donc par produit de Cauchy :

$$e^a e^b = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = e^{a+b}.$$