

30 | Séries numériques

La différence entre les mathématiciens et les physiciens, c'est qu'après que les physiciens ont prouvé un grand résultat, ils pensent que c'est fantastique, mais après que les mathématiciens ont prouvé un grand résultat, ils pensent que c'est trivial.

Lucien Szpiro (1941-2020), mathématicien.

Numérique signifie « réelle ou complexe ».

I – Définition et natures des séries

1 – Définitions, premiers exemples

Définition 30.1 – Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle ou complexe. On appelle **série de terme général u_n** la suite $(S_N)_{N \geq n_0}$ définie par

$$\forall N \geq n_0, \quad S_N = \sum_{n=n_0}^N u_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_N.$$

Cette série se note $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ou $\sum u_n$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le rang de départ.

Pour tout $N \geq n_0$, le nombre S_N est appelé **la somme partielle de rang N** de la série de terme général u_n .

Définition 30.2 – Avec les mêmes notations, la série $\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque la suite $(S_N)_{N \geq n_0}$ est convergente (ce qui est logique, car c'est le même objet). Sa limite finie $\ell = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ est alors appelée la **somme de la série**

$$\sum u_n \text{ et notée } \ell = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n.$$

Si la suite $(S_N)_{N \geq n_0}$ diverge, on dit que la série $\sum u_n$ est **divergente**.

Remarque 30.3 –

1. Une série est une suite.
2. Le terme général et une somme partielle d'une série sont des nombres.
3. La somme d'une série est sa limite, lorsqu'elle existe.
4. Étudier la nature d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

Mais si les séries ne sont que des suites, pourquoi se doter d'une théorie des séries? La théorie des suites n'est-elle pas suffisante? Réponse : non.

- **Grande question de la théorie des suites** : À quelle condition la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente?
- **Grande question de la théorie des séries** : À quelle condition sur la **SUITE** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la **SÉRIE** $\sum u_n$ est-elle convergente? Cette question spécifique appelle des résultats spécifiques qui sont l'objet du chapitre.

La convergence de la série $\sum u_n$ repose schématiquement sur deux caractéristiques de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- la taille de u_n lorsque n tend vers $+\infty$,
- l'importance des compensations mutuelles que les nombres $u_0, u_1, u_2 \dots$ occasionnent quand on les additionne.

Le cas des suites positives nous occupera un certain temps. S'ils sont positifs, les réels $u_0, u_1, u_2 \dots$ s'empilent les uns sur les autres sans jamais se compenser quand on les additionne et la convergence de la série $\sum u_n$ ne dépend que de la taille asymptotique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Le cas des suites réelles qui changent régulièrement de signe — ou plus généralement des suites complexes — est plus délicat et plus diversifié. Nous nous intéresserons de près aux séries alternées, i.e. aux séries de la forme $\sum (-1)^n a_n$ dans lesquelles la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de signe constant. C'est le cas le plus simple de compensations des termes sommés entre eux.



ATTENTION ! Comme pour les suites, il faut faire la différence entre la série $\sum u_n$, le terme général u_n de cette série, sa somme partielle de rang N $\sum_{n=n_0}^N u_n$, et la somme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ de la série.

Exemple 30.4 –

1. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$.

Exprimer les sommes partielles de la série $\sum u_n$. En déduire la nature de cette série.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Exprimer les sommes partielles de la série $\sum v_n$. En déduire que la série converge et donner sa somme.

2 – Premières propriétés de convergence

Proposition 30.5 – Changement d'indice de départ

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique. Soit $n_1 \geq n_0$.

1. Les séries associées aux suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(u_n)_{n \geq n_1}$ sont de même nature.
2. Dans le cas où elles convergent, leurs sommes vérifient la relation :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n + \sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration.

□

Remarque 30.6 – Cette remarque implique une convention d'écriture dans les exercices. Lorsqu'on demande la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n$ sans avoir auparavant défini à partir de quel entier n_0 les termes u_n sont considérés, c'est parce que cette valeur n_0 n'a aucune influence sur la nature de cette série. En pratique, on choisit n_0 le plus petit possible de sorte que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ soit correctement définie. Si l'énoncé demande la somme d'une série convergente, alors la valeur de n_0 est précisée.

Par exemple, quand on s'intéresse à la nature de la série $\sum \frac{1}{n}$, on suppose que $n \geq 1$ et il s'agit en fait de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

Définition 30.7 – Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Pour tout $N \geq n_0$, le nombre

$$R_N = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=n_0}^N u_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$$

est appelé le **reste d'ordre** N de cette série.

Proposition 30.8 – Terme général et reste d'une série convergente

En utilisant les notations de la définition précédente, si la série $\sum u_n$ est convergente, alors :

1. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.
2. La suite $(R_N)_{N \geq n_0}$ des restes d'ordre N de la série converge vers 0.

Démonstration.

□

La contraposée du premier point est souvent utilisée pour repérer « facilement » des séries divergentes.

Corollaire 30.9 – Série grossièrement divergente

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique. Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.
On dit que cette série **diverge grossièrement**.

Exemple 30.10 – Étudier la nature des séries $\sum (-1)^n$ et $\sum \frac{n}{1+n}$.



ATTENTION ! Le fait que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0 **NE PERMET PAS** de prouver que la série $\sum u_n$ est convergente. (cf exemple ci-dessous) A chaque fois qu'un élève utilise l'argument « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, donc $\sum u_n$ converge », un millier de chatons trop mignons décèdent dans d'atroces souffrances!

Exemple 30.11 – La suite de terme général $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tend vers 0 mais la série $\sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ diverge.

Théorème 30.12 – Linéarité de la somme infinie

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites numériques et λ et μ deux scalaires (nombres réels ou complexes).

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

En particulier, la somme de deux séries convergentes est convergente (cas $\lambda = \mu = 1$).

Démonstration.

□

Remarque 30.13 – L'égalité $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ n'a de sens que si les trois séries convergent.

Théorème 30.14 – Somme d'une série convergente et d'une série divergente

Soit $\sum u_n$ une série convergente et $\sum v_n$ une série divergente. Alors $\sum (u_n + v_n)$ est divergente.

Démonstration.

□

Remarque 30.15 – Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes, on ne peut rien dire de la nature de la série $\sum (u_n + v_n)$.

Exemple 30.16 – Les deux séries $\sum n$ et $\sum -n$ sont divergentes.

La série $\sum (n - n)$, qui est la série $\sum 0$, est convergente. Par contre, la série $\sum (n + n)$ est divergente.

Proposition 30.17 – Critère de convergence des séries complexes

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent. Dans ce cas :

$$\sum_{n \geq n_0} u_n = \sum_{n \geq n_0} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n \geq n_0} \operatorname{Im}(u_n)$$

Démonstration. Découle des propriétés correspondantes sur les suites complexes.

□

3 – Séries géométriques

Définition 30.18 – On appelle **série géométrique** toute série de la forme $\sum a^n$ où a est un nombre complexe.

Proposition 30.19 – Nature des séries géométriques

Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère la série géométrique $\sum a^n$ associée à la suite $(a^n)_{n \geq 0}$.

La série géométrique $\sum a^n$ converge si, et seulement si, $|a| < 1$. Dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Démonstration.

□

Exemple 30.20 – Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum 5^n$$

$$\sum i^n$$

$$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum \frac{\text{ch}(n)}{4^n}$$

4 – Séries télescopiques

Définition 30.21 – On appelle **série télescopique** une série numérique $\sum v_n$ dont le terme général v_n peut s'écrire sous la forme $v_n = u_{n+1} - u_n$ où $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique.

Proposition 30.22 – Nature des séries télescopiques

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes.

La série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge.

Remarque 30.23 – Dans la proposition précédente, la condition porte uniquement sur la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ et pas sur la valeur de sa limite. En particulier, il n'est pas nécessaire que la limite de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ soit nulle pour que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Démonstration.

□

5 – Séries à termes positifs

Proposition 30.24 – Nature des séries à termes positifs

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs ou nuls.

1. La suite $(S_N)_{N \geq n_0}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est croissante.
2. La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée.
3. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$ et on note $\sum_{n \geq n_0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration.

□

Remarque 30.25 – Cela implique que si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite de réels positifs ou nuls, alors la notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ a toujours un sens.

II – Comparaison série-intégrale

1 – Comparaison avec une intégrale

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et f une fonction réelle continue et monotone sur $[n_0, +\infty[$.

On considère la série $\sum f(n)$ associée à la suite $(f(n))_{n \geq n_0}$. On note $(S_N)_{N \geq n_0}$ la suite des sommes partielles de cette série.

Proposition 30.26 – Encadrement d'une somme par des intégrales

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et f une fonction réelle continue et monotone sur $[n_0, +\infty[$.

Pour tout $N \geq n_0$, on note $S_N = \sum_{n=n_0}^N f(n)$ la somme partielle de rang N de la série $\sum f(n)$.

1. Si f est croissante, alors pour tout $N \geq n_0$

$$\int_{n_0}^N f(t) dt + f(n_0) \leq S_N \leq \int_{n_0}^N f(t) dt + f(N).$$

2. Si f est décroissante, alors pour tout $N \geq n_0$,

$$\int_{n_0}^N f(t) dt + f(N) \leq S_N \leq \int_{n_0}^N f(t) dt + f(n_0).$$

Théorème 30.27 – Théorème de comparaison série-intégrale

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et f une fonction réelle continue, **décroissante** et positive ou nulle sur $[n_0, +\infty[$.

1. La série $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\int_{n_0}^N f(t) dt\right)_{N \geq n_0}$ converge.

2. En cas de convergence, $0 \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) - \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{n_0}^N f(t) dt \leq f(n_0)$.

3. En cas de divergence, $\sum_{n=n_0}^N f(n) \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \int_{n_0}^N f(t) dt + \ell + o(1)$, où ℓ est un réel.

Démonstration.

□

Remarque 30.28 – Le dernier point a déjà été vu dans le Chapitre 21. Il permet par exemple d'obtenir le développement asymptotique de la série harmonique, en considérant la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1) \quad \text{où } \gamma \text{ est la constante d'Euler.}$$

2 – Les séries de Riemann

Définition 30.29 – On appelle **séries de Riemann** les séries de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 30.30 – Nature des séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque 30.31 –

- La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge et joue le rôle d'une frontière entre le cas convergent et le cas divergent des séries de Riemann. Convergence au-delà, divergence en deçà.
- En cas de convergence, on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. On sait par exemple que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et que $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Profitons de l'occasion pour évoquer la constante d'Apéry, qui désigne $\zeta(3)$ (égale environ à 1,202), nommée en l'honneur de Roger Apéry, chercheur de l'université de Caen qui a démontré en 1978 que ce nombre est irrationnel. La fonction ζ est une fonction usuelle majeure des mathématiques, intimement liée à la répartition des nombres premiers en dépit des apparences!

Démonstration.

□

Remarque 30.32 – Le théorème 30.27 nous permet également d’obtenir que, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $0 < \alpha < 1$.

Exemple 30.33 – Déterminer la limite de $\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$.

III – Comparaisons de séries à termes réels positifs ou nuls

On rappelle (Proposition 30.24) que toute série à termes positives converge si et seulement si elle est majorée.

Proposition 30.34 – Critère de comparaison des séries à termes positifs

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites de réels positifs ou nuls tels que $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$.

- Si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si la série $\sum u_n$ est divergente, alors la série $\sum v_n$ est divergente.
- Dans tous les cas, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$. (Par convention, $+\infty$ est supérieur à tout réel)

Démonstration.

□

Exemple 30.35 –

1. Donner la nature de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n^4 + n + 1}}$.

2. Donner la nature de la série $\sum \left(\frac{1}{n} + e^{-n} \right)$.

Proposition 30.36 – Critère des équivalents pour les séries à termes positifs

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites à termes réels positifs ou nuls.

Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

Démonstration.

□

Exemple 30.37 –

1. Donner la nature de la série $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

2. Donner la nature de la série $\sum (e^{1/n} - 1)$.

IV – Convergence absolue et séries alternées

1 – Convergence absolue

Définition 30.38 – Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** lorsque la série à termes positifs ou nuls $\sum |u_n|$ est convergente.

Notation 30.39 – Pour dire que la série est absolument convergente, on peut noter $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

Théorème 30.40 – La convergence absolue implique la convergence

Si une série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Démonstration.

□

Proposition 30.41 – Inégalité triangulaire pour les séries absolument convergentes

Si une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est absolument convergente alors $\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$.

Démonstration.

□

Exemple 30.42 – Donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$.

Donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n\sqrt{n}}$.



ATTENTION ! Une série peut être convergente sans être absolument convergente. Par exemple, la série

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente mais n'est pas absolument convergente. (cf td)

Définition 30.43 – Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **sommable** lorsque la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Définition 30.44 – Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est sommable, on appelle **somme de la suite** $(u_n)_{n \geq n_0}$ la somme de la série qui lui est associée, c'est-à-dire le nombre $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Remarque 30.45 – Dans le cas où $(u_n)_{n \geq n_0}$ n'est pas sommable, il est tout de même possible que la série $\sum u_n$ soit convergente et donc que la somme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ existe. Cependant, si la suite est sommable, on peut prouver que quelle que soit la façon de regrouper les termes de la suite voire à en changer l'ordre, la somme existe et vaut toujours la même valeur (hors programme).

Proposition 30.46 – Critère du \mathcal{O}

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes et $(v_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Démonstration.

□

Remarque 30.47 – Sous les mêmes hypothèses, si $u_n = o(v_n)$ et si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

Exemple 30.48 – Quelle est la nature de la série $\sum \frac{n \cos(3n+1) \sqrt[3]{n}}{n^3 - 5n + 2}$?

2 – Séries alternées

Définition 30.49 – On appelle **série alternée** toute série de la forme $\sum (-1)^n a_n$ avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de signe constant.

Exemple 30.50 – Les séries $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum \frac{(-1)^n e^{-n}}{n^2 + 1}$ sont alternées.

Théorème 30.51 – Critère spécial des séries alternées

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **DÉCROISSANTE DE LIMITE NULLE**. La série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Démonstration.

□

Exemple 30.52 – Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La **série de Riemann alternée** $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Démonstration.

□

Remarque 30.53 – Pour $\alpha \in]0, 1]$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est *semi-convergente* - elle converge, mais pas absolument.

Il est très fréquent qu'on ne puisse pas appliquer le critère spécial des séries alternées directement quand on étudie une série alternée. L'hypothèse de décroissance peut être difficile à vérifier, voire fausse. Dans l'exemple qui suit, le terme général est cassé en morceaux simples dont on se demande à part s'ils sont associés à des séries convergentes ou divergentes.

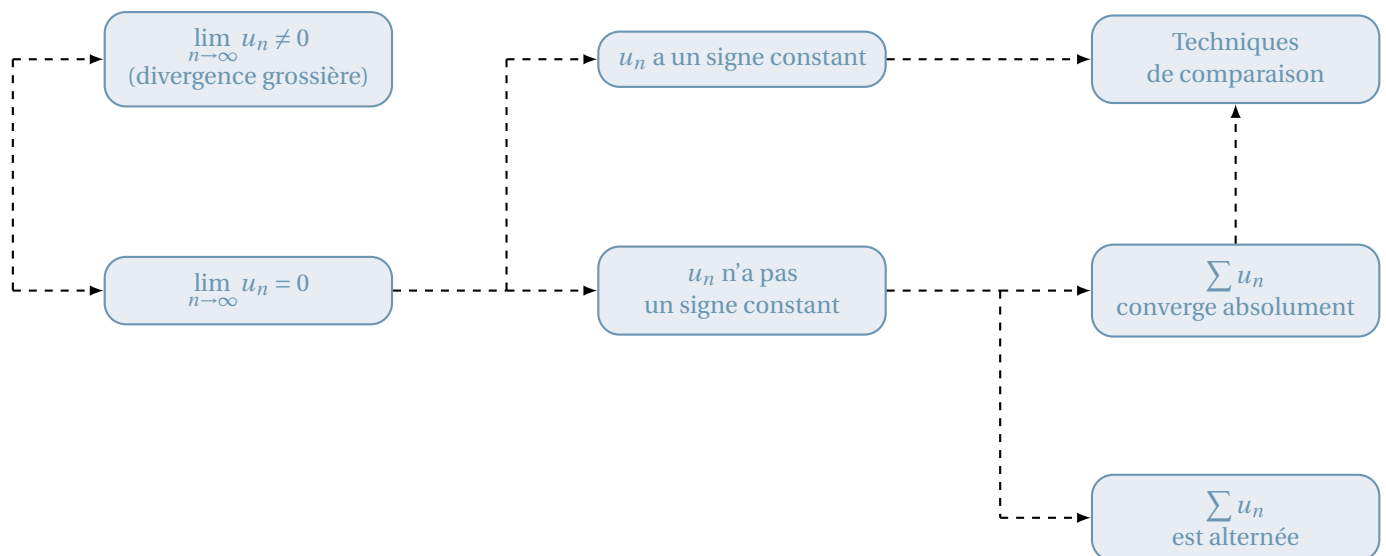
Exemple 30.54 – La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(\ln n)}$ converge.

Démonstration.

□

V – Récapitulation des techniques de convergence

Le schéma ci-contre rassemble et ordonne les résultats de convergence de ce chapitre. Il mérite un sérieux coup d’œil même si, comme souvent en mathématiques, ces résultats **NE PERMETTENT PAS DE CONCLURE DANS TOUS LES CAS**. La méthode qui marche tout le temps n’existe pas!



VI – Famille sommable

1 – Rappels de la droite réelle achevée

On rappelle que l'ensemble \mathbb{R} peut être complété en $\overline{\mathbb{R}}$ en lui ajoutant deux éléments $\{+\infty, -\infty\}$ avec des règles de calculs que l'on utilise notamment pour nos limites. Deux problèmes se posent pour avoir des opérations bien définies $(+\infty) + (-\infty)$ et $0 \times (\pm\infty)$.

Dans la suite nous allons travailler dans $[0, +\infty] = \overline{\mathbb{R}_+}$. On pose par convention : $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0$.

Ainsi tout est bien défini!

On a vu également que $\overline{\mathbb{R}}$ est un ensemble bien ordonné avec \leq (c'est une relation d'ordre total). C'est donc toujours le cas pour $[0, +\infty]$.

Avec notre relation d'ordre, on peut donc parler de majoration/minoration, d'ensemble majoré/minoré, de plus grand ou plus petit élément et aussi de borne supérieure et inférieure. On a déjà vu que tout ensemble (et même l'ensemble vide) possède une borne supérieure (et inférieure) qui peut éventuellement être $+\infty$. Si l'ensemble est majoré, on retrouve la borne supérieure classique. Le cas de l'ensemble vide se traite rapidement :

- dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a $\sup \emptyset = -\infty$ et $\inf \emptyset = +\infty$
- dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, on a $\sup \emptyset = 0$ et $\inf \emptyset = +\infty$

Rappelons enfin quelques règles de manipulation de la borne supérieure. Pour deux parties A et B de \mathbb{R} :

$$A \subset B \implies \sup(A) \leq \sup(B), \quad \sup(\lambda A) = \lambda \sup A, \quad \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

2 – Somme d'une famille quelconque d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$

Nous savons parfaitement définir et manipuler les sommes **FINIES** de nombres complexes - changer d'indice, casser, regrouper, permuter. . . Nous savons aussi définir les sommes de séries **CONVERGENTES**, mais nous n'avons pas vraiment appris à les manipuler. Hélas, les sommes infinies posent problème car on ne peut pas y regrouper les termes comme on veut en général. Étonnant! Intéressons-nous par exemple à la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ qui vaut $\ln 2$:

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

Ôtons-lui sa moitié. On obtient $\frac{\ln 2}{2}$ bien sûr. Et si on prend des libertés avec l'ordre des termes?

$$\begin{aligned} \frac{\ln(2)}{2} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \right) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Oups! Moralité : quand on additionne des termes, on ne peut donc pas les regrouper à notre convenance!

Nous pouvons maintenant rentrer dans le vif du sujet. Objectif : calculer la somme d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ où I est un ensemble quelconque et $x_i \in [0, +\infty]$ pour tout i . On note alors $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties **FINIES** de I .

Remarquons tout d'abord que si I est fini, alors il s'agit d'une bête somme finie. Dans ce cas, pour tout $J \subset I$, on a J fini et $\sum_{j \in J} x_j \leq \sum_{i \in I} x_i$. (On remarquera que si l'un des $x_i = +\infty$ alors ces deux sommes peuvent être infinies.)

Toujours dans le cas où I est fini $\sum_{i \in I} x_i$ est donc un majorant de $A = \left\{ \sum_{j \in J} x_j \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$. De plus I étant fini, c'est l'un de ses éléments, donc on a

$$\max A = \sup A = \sum_{i \in I} x_i$$

Intéressons nous ensuite au cas où $I = \mathbb{N}$ et où $\sum_{i \in I} x_i$ est convergente. Alors on a encore par positivité des x_i , pour tout $J \subset I$ et J fini, $\sum_{j \in J} x_j \leq \sum_{i \in I} x_i$. Ainsi $\sum_{i \in I} x_i$ est encore un majorant de $A = \left\{ \sum_{j \in J} x_j \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$.

De plus $\sum_{i \in I} x_i$ est la limite d'une suite d'éléments de A avec $J = \llbracket 1, n \rrbracket$. Donc d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure on a encore :

$$\sup A = \sum_{i \in I} x_i$$

Ces deux cas simples nous amènent à définir de la manière suivante la somme d'une famille $(x_i)_{i \in I}$.

Définition 30.55 – Pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$, on appelle **somme de la famille** $(x_i)_{i \in I}$ l'élément $\sum_{i \in I} x_i = \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \left\{ \sum_{j \in J} x_j \right\}$. Cet élément est dans $[0, +\infty]$.

Remarque 30.56 – D'après nos calculs précédents :

- Si I est fini, c'est un bête calcul de somme comme on en a fait depuis septembre.
- Si $I = \mathbb{N}$, c'est un bête calcul de série comme on en a fait depuis le début de ce chapitre. La somme est finie si la série converge, et vaut $+\infty$ si elle diverge.
- Si l'un des x_i vaut $+\infty$ alors la somme aussi... Attention cependant la réciproque est fausse, la somme peut être infinie avec aucun terme qui vaut $+\infty$. Penser tout simplement à une somme infinie de 1 ou bien (plus subtil) à la série harmonique.

Cette définition à base de borne supérieure sur toutes les sommes finies suggère dès à présent que le calcul de $\sum_{i \in I} x_i$ ne devrait pas trop dépendre de l'ordre dans lequel on choisit de sommer. La notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la théorie des séries indique au contraire qu'on somme les u_n dans l'ordre naturel – u_0 , puis u_1 , puis $u_2 \dots$

Voici justement LE gros théorème sur les familles sommables qui dit globalement que l'on peut faire ce que l'on veut et additionner dans l'ordre que l'on veut, à condition bien sûr d'additionner des éléments de $[0, +\infty]$.

Théorème 30.57 – Sommation par paquet

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'éléments de $[0, +\infty]$ et $(I_k)_{k \in K}$ une partition de I . Alors on a :

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i.$$

Démonstration. Commençons par bien comprendre ce que chacun des trois sommes du théorème signifie :

$$\sum_{i \in I} x_i = \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{j \in J} x_j, \quad \sum_{j \in I_k} x_j = \sup_{J_k \in \mathcal{P}_f(I_k)} \sum_{j \in J_k} x_j \quad \text{pour tout } k \in K \quad \text{et} \quad \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i = \sup_{L \in \mathcal{P}_f(K)} \sum_{k \in L} \sum_{i \in I_k} x_i$$

Montrons l'égalité du théorème par double inégalité :

- Montrons que $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i$, i.e. que pour toute partie finie J de I : $\sum_{j \in J} x_j \leq \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i$

Soit J dans $\mathcal{P}_f(I)$ et posons $L = \{k \in K \mid J \cap I_k \neq \emptyset\}$. On note alors pour tout $k \in L$, $J_k = J \cap I_k$. Alors, pour tout k , J_k est fini car inclus dans J fini et $J_k \subset I_k$. Ainsi $J_k \in \mathcal{P}_f(I_k)$. De plus les J_k forment une partition de J .

Et on a également L fini car J l'est. Donc $L \in \mathcal{P}_f(K)$. Finalement :

$$\sum_{i \in J} x_i = \sum_{k \in L} \sum_{j \in J_k} x_j \leq \sum_{k \in L} \sum_{i \in I_k} x_i \leq \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i$$

- Montrons maintenant que $\sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$, i.e. que pour toute partie finie L de K : $\sum_{k \in L} \sum_{j \in I_k} x_j \leq \sum_{i \in I} x_i$.

Soit $L \in \mathcal{P}_f(K)$. Pour tout $k \in L$ et toute partie finie J_k de I_k , les ensembles J_k sont disjoints et $\bigcup_{k \in L} J_k$ est une partie finie de I , que l'on note G . On a alors :

$$\sum_{k \in L} \sum_{j \in J_k} x_j = \sum_{i \in G} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i.$$

par définition du sup. A fortiori :

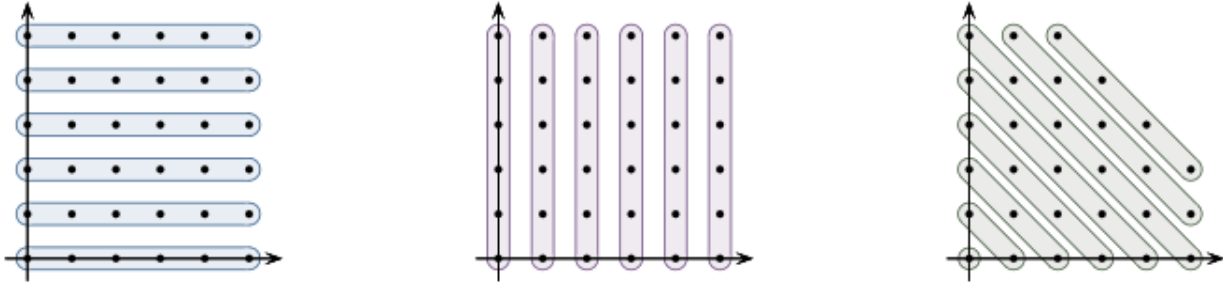
$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in I_k} x_j \leq \sum_{i \in I} x_i.$$

Ce qui démontre le résultat annoncé. □

Remarque 30.58 – Voici quelques découpages classiques déjà évoqués cette année :

- $\mathbb{N} = (2\mathbb{N}) \cup (2\mathbb{N} + 1)$,
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}^*)$,

- $\mathbb{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \llbracket 2^k, 2^{k+1} - 1 \rrbracket = \{1\} \cup \{2, 3\} \cup \{4, 5, 6, 7\} \cup \{8, \dots, 15\} \cup \dots,$
- $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{i\} \times \mathbb{N}$ (découpage en lignes),
- $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \times \{i\}$ (découpage en colonnes),
- $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(k, n - k) \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ (découpage en diagonales).



Les règles de calculs suivantes ne risquent pas de vous dépayser, vous les connaissez parfaitement dans le cas des sommes finies et la morale de l'histoire est simple, tout se passe au mieux **TANT QU'ON SOMME DES ÉLÉMENTS DE $[0, +\infty]$** .

Proposition 30.59

Soient $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}, (u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}, (a_i)_{i \in I}, (b_j)_{j \in J}$ des familles d'éléments de $[0, +\infty]$ et $\lambda \in [0, +\infty]$.

1. **Changement d'indice :** Pour toute bijection φ de J sur I : $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{\varphi(j)}$.

En particulier, pour $I = J = \mathbb{N}$, la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ est invariante par permutation,

i.e. ne dépend pas de l'ordre de sommation.

2. **Restriction :** Pour toute partie I' de I : $\sum_{i \in I'} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$.

3. **Théorème de Fubini :** $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}$.

4. **Linéarité :** $\sum_{i \in I} \lambda x_i + y_i = \lambda \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$.

5. **Croissance :** Si $x_i \leq y_i$ pour tout $i \in I$: $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.

6. **Familles « produits » :** $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \times \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$.

Démonstration.

(i) $I = \varphi(J) = \bigsqcup_{j \in J} \{\varphi(j)\}$, donc $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{\varphi(j)}$ d'après le théorème de sommation par paquets.

(ii) $I = I' \sqcup (I \setminus I')$, donc d'après le théorème de sommation par paquets : $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i' \in I'} x_{i'} + \overbrace{\sum_{i \in I \setminus I'} x_i}^{\in [0, +\infty]} \geq \sum_{i' \in I'} x_{i'}$

(iii) En notant A l'ensemble $\left\{ \sum_{j \in J} x_j \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$: $\lambda \sum_{i \in I} x_i = \lambda \sup A = \sup(\lambda A) = \sum_{i \in I} \lambda x_i$.

Pour l'additivité, posons $z_{i1} = x_i$ et $z_{i2} = y_i$ pour tout $i \in I$ et découpons $I \times \{1, 2\}$ de deux manières différentes : $(I \times \{1\}) \sqcup (I \times \{2\}) = I \times \{1, 2\} = \bigsqcup_{i \in I} \{(i, 1), (i, 2)\}$, puis appliquons deux fois le théorème de sommation par paquets : $\sum_{i \in I} z_{i1} + \sum_{i \in I} z_{i2} =$

$$\sum_{(i,j) \in I \times \{1,2\}} z_{ij} = \sum_{i \in I} (z_{i1} + z_{i2}), \text{ i.e. } \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i = \sum_{i \in I} (x_i + y_i).$$

(iv) Le résultat est clair si l'un des x_i vaut $+\infty$. Si au contraire aucun x_i ne vaut $+\infty$: $y_i - x_i \in [0, +\infty]$, donc par linéarité : $\sum_{i \in I} y_i = \sum_{i \in I} (x_i + (y_i - x_i)) = \sum_{i \in I} x_i + \underbrace{\sum_{i \in I} (y_i - x_i)}_{\in [0, +\infty]} \geq \sum_{i \in I} x_i$.

(v) $\bigsqcup_{i \in I} (\{i\} \times J) = I \times J = \bigsqcup_{j \in J} (I \times \{j\})$, donc $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{ij} = \sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{ij}$ après une double application du théorème de sommation par paquets.

(vi) $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j \stackrel{\text{Fubini}}{=} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_i b_j \stackrel{\text{(ii)}}{=} \sum_{j \in J} \left(b_j \sum_{i \in I} a_i \right) \stackrel{\text{(ii)}}{=} \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{j \in J} b_j$.

□

Exemple 30.60 –

1. On rappelle que $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$. On en déduit alors :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1.$$

2. $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{p^q}{e^{2p} q!} = \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2p} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{p^q}{q!} = \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2p} e^p = \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-p} = \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$.

3 – Famille sommable

Il est réjouissant de savoir additionner avec légèreté les réels positifs, mais on est souvent conduit à additionner des réels quelconques, voire des nombres complexes. La situation est alors plus périlleuse mais pas inextricable grâce au concept de famille sommable. Notez bien qu'on ne définit pas la notion de somme dans un premier temps, mais une condition abstraite appelée sommabilité. Les sommes viendront ensuite.

Définition 30.61 – Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes. On dit que (x_i) est **sommable** si $\sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$.

L'ensemble des familles sommables de \mathbb{C}^I à valeurs dans \mathbb{K} est noté $\ell^1(I, \mathbb{K})$.

Remarque 30.62 –

1. Toute famille **FINIE** de nombres complexes est évidemment sommable.
2. Pour $I = \mathbb{N}$, une suite (x_n) de nombres complexes est sommable si et seulement la série $\sum x_n$ converge absolument.
3. Pour toutes familles $(x_i)_{i \in I}$, et $(y_i)_{i \in I}$ de nombres complexes telles que $|x_i| \leq |y_i|$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de (y_i) entraîne celle de (x_i) .

Afin de se ramener au cas positif pour le calcul de la somme, introduisons les notions de partie positive et négative d'un nombre réel.

Définition 30.63 – On définit la **partie positive**, notée x^+ et négative, notée x^- d'un réel x par les relations :

$$x^+ = \max(x, 0), \quad x^- = -\min(x, 0).$$

On remarque aussitôt que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq x^+ \leq |x|$ et $0 \leq x^- \leq |x|$. Notamment la partie négative d'un réel est positive. De cette définition, on en déduit aussitôt les relations suivantes :

$$x = x^+ - x^- \quad \text{et} \quad |x| = x^+ + x^-.$$

et

$$x^+ = \frac{|x| + x}{2} \quad \text{et} \quad x^- = \frac{|x| - x}{2}.$$

Soit maintenant $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable de réels. Alors les familles (x_i^+) et (x_i^-) sont sommables d'après le dernier point de la remarque. Et ce sont de plus des éléments de $[0, +\infty]$ dont on peut donc considérer la somme. On définit alors la somme de la famille (x_i) en posant :

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-.$$

Soit maintenant $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable de complexes. Alors les familles $(\text{Re}(x_i))$ et $(\text{Im}(x_i))$ sont sommables, toujours d'après le dernier point de la remarque. Et de plus ce sont des éléments réels dont on peut donc considérer la somme en appliquant le point précédent. On définit alors la somme de la famille (x_i) en posant :

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} \text{Re}(x_i) + i \sum_{i \in I} \text{Im}(x_i).$$

Remarque 30.64 – On remarque que l'on a alors $\sum_{i \in I} \operatorname{Re}(x_i) = \operatorname{Re}\left(\sum_{i \in I} x_i\right)$ et $\sum_{i \in I} \operatorname{Im}(x_i) = \operatorname{Im}\left(\sum_{i \in I} x_i\right)$

La philosophie des résultats suivants doit être bien comprise. On vérifie la sommabilité par un calcul de somme **AVEC** module, mais une fois qu'elle est vérifiée, tout est permis **SANS** module - changement d'indice, découpages, permutations...

Théorème 30.65 – Propriétés des familles sommables

Soit $(x_i)_{i \in I}$, $(y_i)_{i \in I}$, $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$, $(a_i)_{i \in I}$, $(b_j)_{j \in J}$ des familles de nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. **Restriction** : Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable, la famille $(x_i)_{i \in I'}$ l'est aussi pour toute partie $I' \subset I$.
2. **Linéarité** : L'ensemble $\ell^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^I . Plus précisément, si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont sommables, la famille $(x_i + \lambda y_i)_{i \in I}$ l'est aussi et :

$$\sum_{i \in I} (x_i + \lambda y_i) = \sum_{i \in I} x_i + \lambda \sum_{i \in I} y_i.$$

3. **Croissance** : Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont sommables et réels, et si $x_i \leq y_i$ pour tout $i \in I$ alors $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.

4. **Inégalité triangulaire** : Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable : $\left| \sum_{i \in I} x_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i|$.

5. **Théorème de sommation par paquets** : Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable, alors pour toute partition $(I_k)_{k \in K}$ de I , la famille

$\left(\sum_{i \in I_k} x_i \right)_{k \in K}$ l'est aussi et :

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i.$$

6. **Changement d'indice** : Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable, alors pour toute bijection φ de J sur I , la famille $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$ est sommable également et on a : $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{\varphi(j)}$.

En particulier, pour $I = J = \mathbb{N}$, la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ d'une série absolument convergente est invariante par permutation, i.e. ne dépend pas de l'ordre de sommation.

7. **Théorème de Fubini** : Si $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable alors les familles $\left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right)_{i \in I}$ et $\left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)_{j \in J}$ sont sommables et on a :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}.$$

8. **Familles « produits »** : Si $(a_i)_{i \in I}$, $(b_j)_{j \in J}$ sont deux familles sommables, alors $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ l'est aussi et on a :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \times \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

9. **Approximation par des sommes finies** : Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable, alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J \in \mathcal{P}_f(I), \left| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \in J} x_i \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Hors programme! □

Remarque 30.66 – On n'est jamais sûr d'avoir le droit d'additionner les termes d'une famille de nombres complexes quelconques tant qu'on n'a pas prouvé sa sommabilité. Il est courant cela dit qu'on ne se préoccupe de la sommabilité qu' **APRÈS** avoir calculé la somme, mais il faut bien préciser le cas échéant qu'on travaille « sous réserve de sommabilité ».

Exemple 30.67 – Soit $z \in \mathbb{C}$. On souhaite calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}$. **SOUS RÉSERVE DE SOMMABILITÉ :**

Mais de fait, la famille $\left(\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}\right)_{n,k \in \mathbb{N}^*, n > k}$ est sommable car :

Dernière notion du chapitre, le produit de Cauchy n'est qu'une simple application de la théorie des familles sommables, mais pas des moindres.

Définition-Théorème 30.68 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. On appelle **produit de Cauchy** de (u_n) et (v_n) la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$p_n = \sum_{0 \leq i, j \leq n, i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

La famille $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Remarque 30.69 – On dit aussi que la **SÉRIE** $\sum p_n$ est le produit de Cauchy des **SÉRIES** $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Démonstration. On a déjà vu que la famille $(u_i v_j)_{i,j}$ est sommable et on fait une somme diagonale (voir remarque sur les découpages classiques). Assurez-vous d'avoir bien compris le fond de l'affaire :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i \times \sum_{j \in \mathbb{N}} v_j = \underbrace{u_0 v_0}_{i+j=0} + \underbrace{u_0 v_1 + u_1 v_0}_{i+j=1} + \underbrace{u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0}_{i+j=2} + \dots = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j=n}} u_i v_j.$$

□

Remarque 30.70 – Le résultat précédent peut être énoncé en termes de séries. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent **ABSOLUMENT**, il en est de même de la série $\sum p_n$. La convergence **ABSOLUE** y est cependant cruciale. Posons pour le comprendre $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et notons $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le produit de Cauchy de la suite (u_n) par elle-même. La série $\sum u_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées, mais la série $\sum p_n$ diverge (grossièrement). En effet on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|p_n| = \left| \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1$$

Exemple 30.71 – Finissons le chapitre avec un petit retour sur la série exponentielle pour retrouver la règle de calcul sur les exposants! On a déjà vu (Chapitre 27 - Développement en série entière de l'exponentielle) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Cette formule s'étend alors (admis ici, mais faisable avec les outils de MPSI) à \mathbb{C} tout entier. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Les suites $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$ et $\left(\frac{b^n}{n!}\right)$ sont sommables, de somme e^a et e^b .

Donc par produit de Cauchy :