2 | Calculs algébriques dans $\mathbb{R}$, équations et inéquations

L'étude des mathématiques est comme le Nil, qui commence en modestie et finit en magnificence.

Charles Caleb Colton (1777-1832), écrivain.

Afin d'envisager avec sérénité votre entrée en classe préparatoire et plus largement vos deux années de préparation aux concours, il est indispensable de maîtriser les compétences minimales suivantes relatives au calcul numérique et littéral.

- Savoir additionner, soustraire, multiplier, diviser et simplifier des fractions.
- Connaitre les règles de calcul relatives aux puissances.
- Maîtriser la règle des signes pour les produits, les fractions et les puissances.
- Savoir factoriser les nombres entiers de taille modeste.
- Savoir factoriser une expression littérale (via un facteur commun ou une identité remarquable).
- Savoir développer, réduire et ordonner une expression littérale (via la (double) distributivité ou une identité remarquable).

Le contenu de ce document vise naturellement à remédier à d'éventuelles lacunes concernant ces notions.

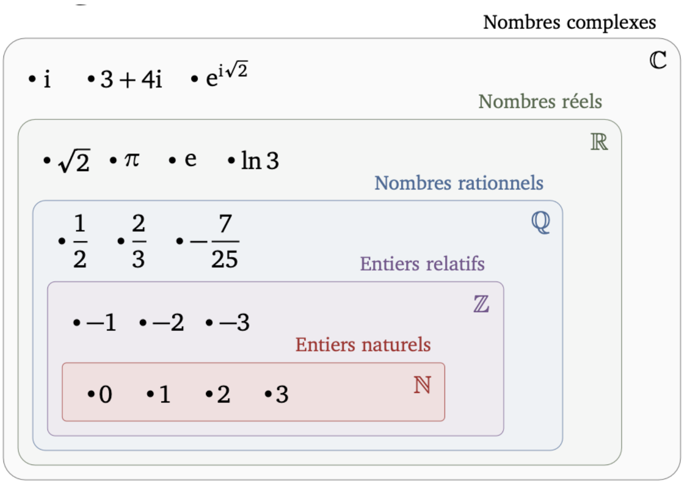
Ce *vade-mecum* est accompagné d'une feuille d'exercices. Il est évident que la seule façon de progresser en calcul consiste à s'y exercer, par conséquent il faut profiter de cette feuille d'exercices pour faire ses gammes. Je vous invite également à vous entraîner tout au long de l'année sur le « cahier de calcul » que vous trouverez sur mon site. Évidemment, vous devez vous entraîner à traiter ces exercices sans l'aide d'une calculatrice.

I – Ensembles de nombres

1 – Les ensembles usuels de nombres

Rappelons les notations usuelles des principaux ensembles de nombres :

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des **entiers naturels** : 0, 1, 2, ...
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des **entiers relatifs** : ensemble des entiers naturels et de leurs opposés : 0, 1, -1, 2, -2, ...
- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des **rationnels** : ensemble des quotients $\frac{p}{q}$ avec p un entier relatif et q un entier naturel non nul.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des **réels** : il contient, outre les rationnels, des nombres dits irrationnels tels que $\sqrt{2}$, π, ...
- $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des **complexes** auxquels nous consacrerons un chapitre complet bientôt.



Remarque 2.1 –

- Les ensembles précédents privés de 0 sont respectivement notés $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{D}^*$, $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$.
- On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs : $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.
- On note $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des réels négatifs : $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$.

2 – Intervalles

Définition 2.2 – On dit qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** lorsque, pour tous nombres x et y dans I, tous les nombres compris entre x et y sont également dans I.
Intuitivement, un intervalle est donc une partie de $\mathbb{R}$ « d'un seul tenant », c'est-à-dire « sans trou ».

On peut montrer qu'il existe exactement dix formes d'intervalles.
Soient a et b des réels, avec $a \leqslant b$.

Notation	**Définition**	**Représentation sur la droite des réels**	**Type**
$[a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$		fermé borné **segment**
$]a,b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$		ouvert
$[a,b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$		semi-ouvert
$]a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$		semi-ouvert
$[a,+\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$		fermé
$]a,+\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$		ouvert
$]-\infty,b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$		fermé
$]-\infty,b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$		ouvert
$\varnothing$			
$\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$			

Remarque 2.3 – On peut aussi être amené à considérer des intervalles d'entiers. Pour tous entiers a et b tels que $a \leqslant b$, on note $[\![a,b]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre a et b :

$$[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\}.$$

Par exemple, on peut écrire $\quad [\![0,2]\!] = \{0,1,2\}$.

ATTENTION ! Ne pas confondre les crochets et les accolades. $[0,2]$ contient une infinité de nombres réels (tous ceux entre 0 et 2), tandis que $\{0,2\}$ ne contient que les deux nombres réels 0 et 2.

Remarque 2.4 – Avec les notations introduites dans le paragraphe précédent, on peut remarquer que :

- $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$,
- $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$,
- $\mathbb{R}_- =]-\infty,0]$,
- $\mathbb{R}_-^* =]-\infty,0[$.

ATTENTION ! $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. En effet, -1 et 1 sont dans $\mathbb{R}^*$, mais pas 0, alors que $-1 \leqslant 0 \leqslant 1$.

II – Calculs dans les réels

1 – Puissance entière d'un nombre réel

Définition 2.5 – Soient n un entier naturel non nul et a un réel.

- Le réel noté a^n (lire "*a puissance n*") est le produit de n facteurs tous égaux à a, *i.e.*

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

- Si a est non nul, alors

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

- Par convention, $\quad a^0 = 1$.

Exemple 2.6 – Calculer les nombres suivants.

- $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
- $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

Proposition 2.7 – Calcul avec des puissances.

Pour tous réels a et b et tous entiers relatifs m et n,

$$a^1 = a, \qquad a^m \times a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad (ab)^n = a^n b^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Démonstration. En explicitant,

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ fois}} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m+n \text{ fois}} = a^{m+n}.$$

On raisonne de même, en comptant les facteurs, pour les autres points. □

ATTENTION ! Pour un entier n négatif, l'écriture a^n n'a de sens que lorsque a est non nul. Autrement dit, l'écriture a^n peut implicitement contenir un « dénominateur » si la puissance n s'avère négative.

Exemple 2.8 – Calculer les nombres suivants.

- $A = 2^2 \times 2^{-4} \times 2 = 2^{2-4+1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
- $B = \frac{3^8}{3^7} = 3^{8-7} = 3^1 = 3$
- $C = \frac{(5^4)^3}{5^{11}} = \frac{5^{4\times 3}}{5^{11}} = \frac{5^{12}}{5^{11}} = 5^{12-11} = 5^1 = 5$

Corollaire 2.9

Soient a un réel et n un entier naturel. Alors

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -a^n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Démonstration.

$$(-a)^n = \big((-1) \times a\big)^n = (-1)^n \times a^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -a^n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

□

2 – Racines carrées

Définition 2.10 – Soit a un réel **POSITIF OU NUL**. On appelle **racine carrée** de a, l'unique réel positif (ou nul) x solution de l'équation $x^2 = a$. On le note $x = \sqrt{a}$.

Proposition 2.11 – Calcul avec des racines carrées

Soient a et b deux réels **positifs**,

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, \qquad \sqrt{a^2} = a \text{ Et } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{si } b \neq 0.$$

Méthode 2.12 – Calculer et simplifier des racines carrées

Pour calculer et simplifier des racines carrées, il convient de distinguer deux types de nombres :

- Les **carrés parfaits**, dont on peut calculer directement la racine. On peut ainsi retenir que

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{169} = 13$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{196} = 14$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{225} = 15$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{256} = 16$

- Les autres nombres. Pour les nombres qui ne sont pas des carrés parfaits, la racine carrée « ne tombe pas juste ». On essaie alors de simplifier en écrivant la racine sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers et b le plus petit possible. Pour cela l'idée est de décomposer le nombre de départ sous la forme du produit d'un carré parfait par un autre nombre puis d'utiliser la première propriété de la proposition précédente.

Exemple 2.13 – Écrire $\sqrt{72}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, avec b l'entier le plus petit possible.

$$\sqrt{72} = \sqrt{9 \times 8} = \sqrt{9} \times \sqrt{8} = 3 \times \sqrt{8} = 3 \times \sqrt{4 \times 2} = 3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 3 \times 2 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

ATTENTION ! On veille à retenir qu'en général,

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Exemple 2.14 – Par exemple, si on choisit $a = 9$ et $b = 16$,

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{mais} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7.$$

Remarque 2.15 – Il n'est pas inutile de remarquer que les règles de calcul pour la racine carrée et les puissances sont analogues pour la multiplication et la division :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \text{vs} \quad (ab)^n = a^n b^n \text{ Et } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{vs} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

En effet, la racine carrée peut s'exprimer comme une puissance rationnelle : pour tout $a \geqslant 0$, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Définition 2.16 – Soit a un réel et b un réel positif. On dit que $a - \sqrt{b}$ et $a + \sqrt{b}$ sont des **quantités conjuguées** l'une de l'autre.

Exemple 2.17 –

- La quantité conjuguée de $2+\sqrt{3}$ est $2-\sqrt{3}$.
- La quantité conjuguée de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.
- La quantité conjuguée de $\sqrt{5}-\sqrt{7}$ est $\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

Remarque 2.18 – L'intérêt de la quantité conjuguée est liée à la troisième identité remarquable :

$$(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y}) = x^2-(\sqrt{y})^2 = x^2-y.$$

Ainsi la quantité conjuguée permet

- de simplifier des expressions en supprimant des sommes de radicaux d'un dénominateur ;
- de transformer la différence $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ de signe a priori quelconque en la différence $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ pour laquelle la somme $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est positive ; l'étude du signe de la quantité $x-y$ sans racine carrée étant plus aisée.

Méthode 2.19 – Pour simplifier des fractions contenant des racines carrées
Selon les cas :

- Premier cas : Expression de la forme $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ avec a un réel et b un entier.
  Pour faire disparaître la racine carrée, on multiplie par $\sqrt{b}$ au numérateur et au dénominateur.
- Deuxième cas : Expressions de la forme $\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}$ ou $\dfrac{1}{a-\sqrt{b}}$ avec a un réel et b un entier.
  Pour faire disparaître les racine carrées, on multiplie la fraction au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée.

Exemple 2.20 – Montrer que $\dfrac{\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{7}} = \dfrac{15+2\sqrt{21}}{47}$.

En effet, $\dfrac{\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{3}(5\sqrt{3}+2\sqrt{7})}{(5\sqrt{3}-2\sqrt{7})(5\sqrt{3}+2\sqrt{7})} = \dfrac{5\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{(5\sqrt{3})^2-(2\sqrt{7})^2} = \dfrac{5\times 3+2\sqrt{3\times 7}}{5^2\sqrt{3}^2-2^2\sqrt{7}^2} = \dfrac{15+2\sqrt{21}}{75-28} = \dfrac{15+2\sqrt{21}}{47}$.

Exemple 2.21 – Pour tout réel $x>0$, $\quad 0<\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

En effet, via la quantité conjuguée $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ de $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, qui est strictement positive et donc non nulle, la double inégalité annoncée équivaut à

$$\begin{aligned}
& 0<\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}\\
\Longleftrightarrow\ & 0<\frac{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}\\
\Longleftrightarrow\ & 0<\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}\\
\Longleftrightarrow\ & 0<\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Or la première inégalité est claire, puisque $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}>0$, et, en passant à l'inverse, la seconde devient :

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}>2\sqrt{x} \Longleftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{x}>0,$$

qui est donc vraie, en vertu de la première inégalité.

3 – Développement et factorisation

Les deux transformations élémentaires du calcul littéral sont le **développement** et la **factorisation**. Elles doivent absolument être maîtrisées. Rappelons que

- « **Développer** une expression consiste à transformer un produit en une somme. »
- « **Factoriser** une expression consiste à transformer une somme en produit ».

Les calculs peuvent parfois être raccourcis en utilisant les identités remarquables rappelées ci-dessous.

Proposition 2.22

Soient a et b deux réels. On a :

1. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$,
2. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$,
3. $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$.

Exemple 2.23 – Développer les expressions suivantes :

- $A = (2x-1)^2 = (2x)^2 - 2\times 2x\times 1+1^2 = 4x^2-4x+1.$
- $B = (a-2)(3a+1)^2 = (a-2)(9a^2+6a+1) = 9a^3+6a^2+a-18a^2-12a-2 = 9a^3-12a^2-11a-2$
- $$\begin{aligned} C &= (2y-1)(2y+1)(y+2) = ((2y)^2-1^2)(y+2) = (4y^2-1)(y+2)\\ &= 4y^2\times y+4y^2\times 2+(-1)\times y+(-1)\times 2 = 4y^3+8y^2-y-2. \end{aligned}$$

Exemple 2.24 – Factoriser les expressions suivantes.

- $A = 9x^2+30x+25$
  On reconnait la première identité remarquable : $A = (3x)^2+2\times 3x\times 5+5^2 = (3x+5)^2$.
- $B = (5x-2)(x-1)-(4x-3)(5x-2)$
  On factorise par $5x-2$: $B = (5x-2)\big(x-1-(4x-3)\big) = (5x-2)(x-1-4x+3) = (5x-2)(-3x+2)$
- $C = (x-2)^2-36$
  On reconnait ici une différence de carrés : $C = (x-2-6)(x-2+6) = (x-8)(x+4)$.

III – Quelques rappels d'arithmétique

1 – Divisibilité

Définition 2.25 (Division euclidienne, divisibilité) **–** Soient a et b deux nombres entiers avec b non nul.

- Effectuer la **division euclidienne** de a par b revient à déterminer les deux entiers q et r tels que
  $$a = b\times q+r \quad \text{et} \quad 0\leqslant r<b.$$
  On appelle q le **quotient** et r le **reste** de cette division euclidienne.
- On dit que a est **divisible** par b lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est nul, autrement dit lorsqu'il existe un entier q tel que $a = b\times q$.
  Les expressions suivantes sont équivalentes :
  - ⋆ a est divisible par b ;
  - ⋆ a est un multiple de b ;
  - ⋆ b est un diviseur de a ;
  - ⋆ b divise a.

Exemple 2.26 –

- $6894 = 23\times 299+17$. On a bien $0\leqslant 17<23$. Ainsi 299 est le quotient et 17 le reste de la division euclidienne de 6894 par 23. En particulier, puisque le reste est non nul, 6894 n'est pas divisible par 23.
- $630 = 15\times 42$, ainsi on peut dire que
  - ⋆ 630 est divisible par 15
  - ⋆ 630 est un multiple de 15 ;
  - ⋆ 15 est un diviseur de 630 ;
  - ⋆ 15 divise 630 .

  (Remarque : on pourrait aussi dire que 630 est divisible par 42, ...)

Les critères de divisibilité suivants permettent de tester si un nombre est divisible par certains entiers simples, sans avoir à effectuer explicitement de division euclidienne.

Proposition 2.27 – Critères de divisibilité

- Un entier est divisible par 2 lorsque son **CHIFFRE DES UNITÉS** est 0,2,4,6 ou 8 .
- Un entier est divisible par 3 lorsque la **SOMME DE SES CHIFFRES** est divisible par 3.
- Un entier est divisible par 5 lorsque son **CHIFFRE DES UNITÉS** est 0 ou 5.
- Un entier est divisible par 9 lorsque la **SOMME DE SES CHIFFRES** est divisible par 9.
- Un entier est divisible par 10 lorsque son **CHIFFRE DES UNITÉS** est 0 .

2 – Nombres premiers

Définition 2.28 (Nombre premier) – Un nombre entier est dit **premier** lorsqu'il est distinct de 1 et lorsque ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

Les nombres premiers sont l'analogue dans $\mathbb{N}$ des particules élémentaires en physique - des nombres qu'on ne peut pas casser en un produit de morceaux plus petits. Il en existe une infinité : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43\dots$

Théorème 2.29 – Décomposition d'un entier en produits de facteurs premiers.

Tout nombre entier peut se décomposer en produits de facteurs premiers. En outre, une telle décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Les nombres premiers sont donc les briques élémentaires de la construction des nombres entiers sous forme de produits. Pour expliciter une telle décomposition, pour des entiers de taille modeste, il est crucial de connaître la liste des premiers nombres premiers et les critères de divisibilité qui leur sont éventuellement associés, comme l'illustre la méthode suivante.

Méthode 2.30 – Décomposition d'un entier en produits de petits facteurs premiers.

Illustrons directement la méthode sur le nombre 588 :

- On commence par tester si 588 est divisible par 2 (le 1er nombre premier). La réponse est « oui », puisque le chiffre des unités de 588 est 8 , et on a $588 = 2 \times 294$. Information que l'on résume par la présentation ci-contre.

$$\begin{array}{r|l} 588 & 2 \\ 294 & \end{array}$$

- On recommence, en restant si 294 est divisible par 2. À nouveau, la réponse est « oui » et $294 = 2 \times 147$.

$$\begin{array}{r|l} 588 & 2 \\ 294 & 2 \\ 147 & \end{array}$$

- On teste à nouveau la divisibilité par 2. La réponse est cette fois « non ». On teste alors le nombre premier suivant, i.e. 3. La réponse est « oui », puisque $1 + 4 + 7 = 12$ qui est un multiple de 3 , et on a $147 = 3 \times 49$.

$$\begin{array}{r|l} 588 & 2 \\ 294 & 2 \\ 147 & 3 \\ 49 & \end{array}$$

- On recommence, en testant si 49 est divisible par 3. La réponse est « non ». On teste alors le nombre premier suivant, i.e. 5 , pour lequel la réponse est également négative. On teste alors le suivant, i.e. 7 . Or $49 = 7 \times 7$, la réponse est donc oui.
- Ce processus s'interrompt lorsque l'on aboutit à 1 dans la colonne de gauche.

$$\begin{array}{r|l} 588 & 2 \\ 294 & 2 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

En résumé, on a donc $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$.

Remarque 2.31 – Si cet algorithme est relativement simple à mettre en place pour décomposer un nombre de taille raisonnable, il se révèle rapidement inefficace, en termes de temps, pour des très grands nombres. La recherche d'algorithmes performants est un problème central pour de nombreuses applications cryptographiques.

Cette décomposition trouve (notamment) son application dans l'écriture sous forme irréductible d'une fraction.

Méthode 2.32 – Écriture sous forme irréductible d'une fraction.
Une fraction $\dfrac{a}{b}$ est dite irréductible lorsque le seul diviseur commun de son numérateur et de son dénominateur est 1 . Dans le cas contraire, la fraction peut être simplifiée.
En pratique, pour rendre une fraction irréductible, il suffit de décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers, afin d'identifier les facteurs communs pouvant être simplifiés.

Exemple 2.33 – $\dfrac{10}{33}$ est l'écriture sous forme irréductible de la fraction $\dfrac{60}{198}$.
En effet,

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{r|l} 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

ainsi $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ et $198 = 2 \times 3 \times 3 \times 11$, et

$$\frac{60}{198} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 11} = \frac{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times 11} = \frac{2 \times 5}{3 \times 11} = \frac{10}{33}.$$

IV – Manipulations d'inégalités

Théorème 2.34 – Rappels sur les inégalités

Soient $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$.

- **Lien strict/large :** Si $a < b$, alors $a \leqslant b$, **MAIS LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE !**

Dans les règles qui suivent, on peut remplacer les inégalités par des inégalités strictes.

- **Somme :** Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$.
- **Produit :**
  - **par un réel positif :** Si $a \leqslant b$ et $\lambda \geqslant 0$, alors $\lambda a \leqslant \lambda b$ (le sens de l'inégalité ne change pas)
  - **par un réel négatif :** Si $a \leqslant b$ et $\lambda \leqslant 0$, alors $\lambda a \geqslant \lambda b$ (le sens de l'inégalité change)
  - **d'inégalités positives :** Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $0 \leqslant ac \leqslant bc$.
- **Passage à l'inverse :** Si $a \leqslant b$ et si a et b sont **DE MÊME SIGNE** , alors $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

Méthode 2.35 –
Dans les cas simples, pour établir une inégalité, on peut partir d'une inégalité connue et reconstituer l'inégalité demandée.

Exemple 2.36 – Soit $x \in [1, 2]$. Encadrer l'expression $A(x) = \dfrac{-2x - 3}{\sqrt{7}}$.

$$\begin{array}{lll} & 1 \leqslant x \leqslant 2 & \\ \iff & -2 \geqslant -2x \geqslant -4 & \text{car } -2 \leqslant 0 \\ \iff & -5 \geqslant -2x - 3 \geqslant -7 & \\ \iff & \dfrac{-5}{\sqrt{7}} \geqslant \dfrac{-2x-3}{\sqrt{7}} \geqslant \dfrac{-7}{\sqrt{7}} & \text{car } \sqrt{7} \geqslant 0 \\ \iff & \dfrac{-5\sqrt{7}}{7} \geqslant A(x) \geqslant -\sqrt{7} & \end{array}$$

Exemple 2.37 – Soit $x \in [1;3]$ et $y \in [2;3]$. Encadrer les quantités suivantes :

- $A(x,y) = x+y+3$;
- $B(x,y) = (2x+1)(3-y)$.

On sait que $1 \leqslant x \leqslant 3$ et que $2 \leqslant y \leqslant 3$, donc,

$$\begin{aligned} & 1+2+3 \leqslant x+y+3 \leqslant 3+3+3 \\ \textit{i.e} \quad & 6 \leqslant x+y+3 \leqslant 9 \end{aligned}$$

Pour le second encadrement, on a

$$1 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{donc} \quad \leqslant 2x \leqslant 6 \quad \text{donc} \quad 3 \leqslant 2x+1 \leqslant 7$$

De même,

$$2 \leqslant y \leqslant 3 \quad \text{donc} \quad -2 \geqslant -y \geqslant -3 \quad \text{donc} \quad 1 \geqslant 3-y \leqslant 0 \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant 3-y \leqslant 1$$

Comme toutes les quantités présentes sont positives, on peut multiplier ces deux inégalités : $0 \leqslant (2x+1)(3-y) \leqslant 7$.

Méthode 2.38 –

- **MAJORER** une fraction de réels positifs, c'est majorer son numérateur et **MINORER** son dénominateur.
- **MINORER** une fraction de réels positifs, c'est minorer son numérateur et **MAJORER** son dénominateur.

Exemple 2.39 – Soit $x \in [1,2]$. On souhaite encadrer rapidement et grossièrement le réel $\dfrac{2x+1}{3x^2+4}$.

Démonstration. Par hypothèse, $1 \leqslant x \leqslant 2$ donc $3 \leqslant 2x+1 \leqslant 5$.
De même, puisque $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$ (les quantités considérées étant positives). Puis $7 \leqslant 3x^2+4 \leqslant 16$.
Par quotient enfin : $\dfrac{3}{16} \leqslant \dfrac{2x+1}{3x^2+4} \leqslant \dfrac{5}{7}$. □

Méthode 2.40 –
Pour établir une inégalité du type $A(x) \leqslant B(x)$, on peut étudier le signe de $B(x)-A(x)$, par exemple en factorisant l'expression. Il faut retenir que factoriser est toujours une bonne idée pour étudier un signe.

Exemple 2.41 – Démontrer que pour tous réels a et b, $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$.
Soient a et b des réels. On a : $2(a^2+b^2)-(a+b)^2 = a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geqslant 0$ d'où le résultat.

Méthode 2.42 –
Pour établir une inégalité, on peut également, **AU BROUILLON** partir du résultat demandé pour essayer de comprendre d'où vient l'inégalité demandée. On part ensuite **SUR LA COPIE** de la fin pour arriver au résultat.

Exemple 2.43 – Pour tout $x > 0$: $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Démonstration. Au brouillon, il est naturel de partir du résultat et de se demander d'où il vient :

$$x+\frac{1}{x} \geqslant 2 \quad \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \quad x^2+1 \geqslant 2x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2-2x+1 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 \geqslant 0$$

puis d'observer que le carré d'un réel est toujours positif. Sur une copie, il vaut mieux partir de la fin : $(x-1)^2 \geqslant 0$ et en déduire rapidement l'inégalité demandée. □

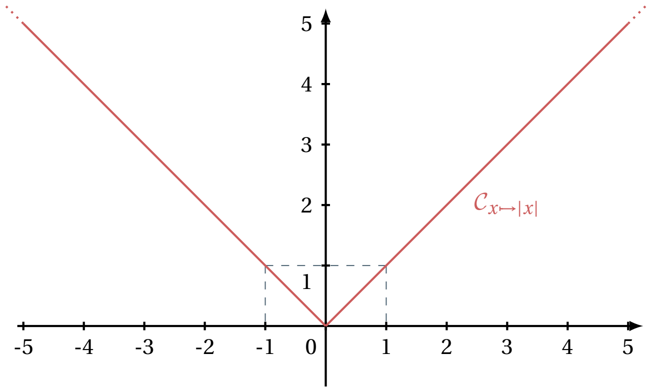
ATTENTION ! $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ $\not\Longrightarrow$ $a-c \leqslant b-d$. Essayez par exemple avec $0 \leqslant 1$ et $0 \leqslant 2$.

V – Valeurs absolues, inégalités triangulaires

Définition 2.44 – Pour tout nombre réel x, on appelle **valeur absolue** de x et on note $|x|$ le nombre réel défini par :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Représentation du graphe de la fonction $x \mapsto |x|$.



Proposition 2.45 – Valeur absolue et opérations

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geqslant 0$
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|x|^2 = x^2$.
4. $|xy| = |x|\,|y|$
5. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$
6. si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
7. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ autrement dit $x \leqslant |x|$ et $-x \leqslant |x|$
8. $\sqrt{x^2} = |x|$

Proposition 2.46 – Valeur absolue et signe

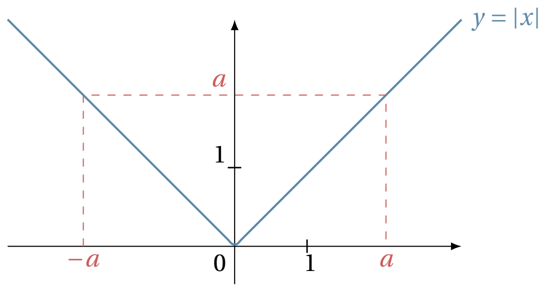
Pour tout réel x, on a

1. $|x| = x \iff x \geqslant 0$,
2. $|x| = -x \iff x \leqslant 0$.

Proposition 2.47 – Valeur absolue et équations

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$.

1. Si $r \geqslant 0$, $|x| = r \iff (x = r \text{ ou } x = -r)$
2. $|x| = |y| \iff (x = y \text{ ou } x = -y)$
3. Si $r < 0$, $|x| = r$ n'a pas de solution.
4. $|x| = |y| \iff x^2 = y^2$.



Exemple 2.48 – On veut résoudre l'équation $|x-4| = 2x+10$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Tout d'abord, pour tous $x \in \mathbb{R}$: $|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{si } x \geqslant 4 \\ 4-x & \text{si } x < 4 \end{cases}$.

- **Résolution sur** $[4;+\infty[$ **:** Pour tout $x \geqslant 4$:

$$|x-4| = 2x+10 \iff x-4 = 2x+10 \iff x = -14,$$

or $-14 \notin [4,+\infty[$, donc l'équation n'a pas de solution sur $[4,+\infty[$.

- **Résolution sur** $]-\infty;4[$ **:** Pour tout $x < 4$:

$$|x-4| = 2x+10 \iff 4-x = 2x+10 \iff x = -2,$$

et $-2 \in]-\infty, 4[$, donc -2 est bien solution. C'est finalement la seule solution sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.49 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x+1| = |x+3|$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} |x+1| = |x+3| &\iff (x+1)^2 = (x+3)^2 \\ &\iff x^2+2x+1 = x^2+6x+9 \\ &\iff -8 = 4x \\ &\iff x = -2 \end{aligned}$$

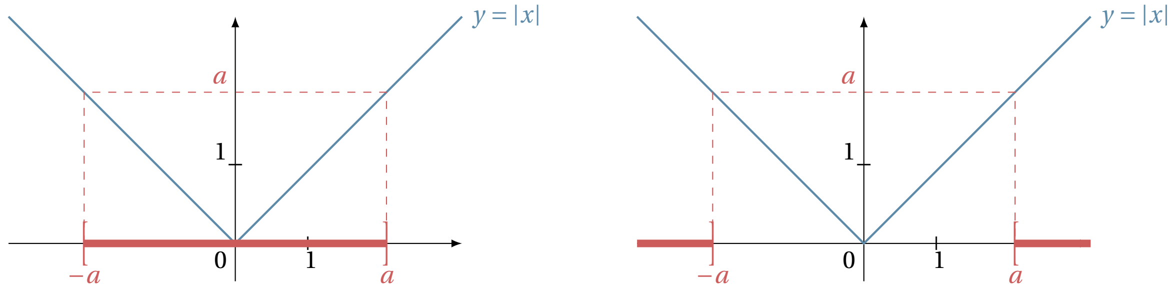
L'équation admet donc une unique solution réelle : -2.

Proposition 2.50 – Valeur absolue et inéquations

Soit x un réel et r un réel **positif**.

1. $|x| \leqslant r \iff (-r \leqslant x \leqslant r) \iff (x \leqslant r \text{ et } -x \leqslant r)$
2. $|x| \geqslant r \iff (x \leqslant -r \text{ ou } x \geqslant r)$
3. $|x| < r \iff (-r < x < r) \iff (x < r \text{ et } -x < r)$
4. $|x| > r \iff (x < -r \text{ ou } x > r)$

Solutions de $|x| \leqslant a$ — Solutions de $|x| \geqslant a$



Exemple 2.51 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+1| + |x-3| < 6$.

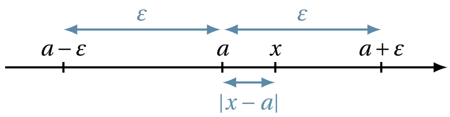
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	

Raisonnons par disjonction de cas. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x \geqslant 3$, alors $|x+1| + |x-3| < 6 \iff x+1+x-3 < 6 \iff x < 4$. Donc les solutions supérieures ou égales à 3 sont les éléments de $[3,4[$.
Si $x \leqslant -1$, alors $|x+1| + |x-3| < 6 \iff -(x+1)-(x-3) < 6 \iff x > -2$. Donc les solutions inférieures ou égales à -1 sont les éléments de $]-2,-1]$.
Si $-1 < x < 3$, alors $|x+1| + |x-3| < 6 \iff +(x+1)-(x-3) < 6 \iff 4 < 6 \iff Vrai$. Donc x est solution.
Finalement, l'ensemble des solutions est $]-2,4[$.

Remarque 2.52 – Nous nous servirons beaucoup dans les prochains mois des équivalences que voici.

Pour tous $a, x \in \mathbb{R}$, $|x-a|$ est la distance entre a et x, donc pour tout $\varepsilon > 0$:

$|x-a| \leqslant \varepsilon \iff x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ et $|x-a| < \varepsilon \iff x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$



Proposition 2.53 – Inégalité triangulaire

Pour tous x et y réels, on a

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

Démonstration. Soient x et y des réels. Alors $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ et $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$. Donc

$$-(|x|+|y|) = -|x| - |y| \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|.$$

D'où $|x+y| \leqslant |x| + |y|$. □

En plus de la valeur absolue, on travaille dans l'exemple qui suit un principe fondamental - le *principe des substitutions.* L'idée est toute simple - si une égalité ou une inégalité est vraie pour **TOUT** $x \in \mathbb{R}$ par exemple, vous pouvez y remplacer la variable x par **N'IMPORTE QUEL RÉEL DE VOTRE CHOIX**, cela vous conduira souvent vers de nouveaux résultats.

Exemple 2.54 – Prenons l'inégalité triangulaire comme point de départ : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

- **Premier rebondissement :** Appliquons l'inégalité triangulaire aux réels x et $-y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Cela donne : $|x+(-y)| \leqslant |x| + |-y|$, donc $|x-y| \leqslant |x| + |y|$. Cette inégalité est un nouveau résultat.
- **Deuxième rebondissement :** Appliquons l'inégalité triangulaire aux réels $x+y$ et $-y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Cela donne : $|(x+y)+(-y)| \leqslant |x+y| + |-y|$, donc $|x| \leqslant |x+y| + |y|$, puis $|x+y| \geqslant |x| - |y|$. Encore un nouveau résultat !
- **Troisième rebondissement :** Nous venons de montrer que $|x+y| \geqslant |x| - |y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, donc aussi que $|y+x| \geqslant |y| - |x|$, ou encore $|x+y| \geqslant |y| - |x|$. Ainsi, $|x+y|$ est supérieur ou égal aux deux réels **OPPOSÉS** $|x| - |y|$ et $|y| - |x|$, donc à la valeur absolue $\big||x| - |y|\big|$: $|x+y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$. Ces substitutions successives montrent que l'inégalité triangulaire porte en germe un peu plus qu'elle-même. En l'occurrence, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y| \qquad \textbf{\textit{(inégalité triangulaire généralisée)}}$$

Corollaire 2.55 – Inégalité triangulaire généralisée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tous réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

Démonstration. On procède par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit P_n : « $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ ».

Initialisation : Pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $|x_1| \leqslant |x_1|$. Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose P_n vraie.

Soient $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des réels. Alors, par inégalité triangulaire,

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}| \leqslant |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}|.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + |x_{n+1}|.$$

On obtient P_{n+1}.

Conclusion : Par récurrence, on obtient le corollaire. □

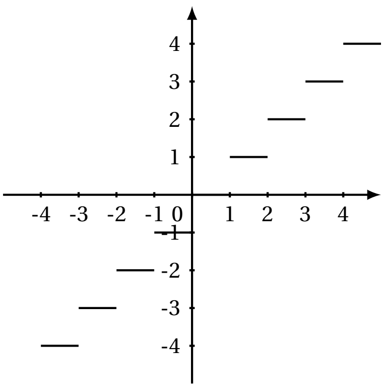
VI – Partie entière d'un réel

Définition 2.56 – Soit $x \in \mathbb{R}$.
On appelle **partie entière** de x le plus grand entier inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.
Autrement dit, pour tout nombre réel x, $\lfloor x \rfloor$ est caractérisé par

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Exemple 2.57 – $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -3,8 \rfloor = -4$.

Représentation du graphe de la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.



Proposition 2.58 – Propriétés de la partie entière

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$
2. $\forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor n \rfloor = n.$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (n \leqslant x \Longrightarrow n \leqslant \lfloor x \rfloor).$
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y \Longrightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor)$. (croissance)
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

Démonstration.
1.2. Découle de la définition.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \leqslant x$, alors n est un entier inférieur à x, donc le plus grand entier inférieur à x est au moins égal à n, c'est-à-dire que $n \leqslant \lfloor x \rfloor$.
4. Soient x et y deux réels tels que $x \leqslant y$. Alors $\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant y$, donc d'après 3, $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$

5. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $\lfloor x \rfloor + n \leqslant x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$ et comme $\lfloor x \rfloor + n$ est un entier, on en déduit que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$. □

Exemple 2.59 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$. Soit $x \in \mathbb{R}$, disons $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in [0, 1[$. Aussitôt :

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \varepsilon + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad \text{et} \quad \lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2\lfloor x \rfloor + 2\varepsilon \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2\varepsilon \rfloor,$$

avec $\varepsilon + \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$ et $2\varepsilon \in [0, 2[$. Ainsi :

$$\left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon + \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[, \text{ i.e. } \varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 1 & \text{si } \varepsilon + \frac{1}{2} \in \left[1, \frac{3}{2}\right[, \text{ i.e. } \varepsilon \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\end{cases} \quad \text{et} \quad \lfloor 2\varepsilon \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } 2\varepsilon \in [0, 1[, \text{ i.e. } \varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 1 & \text{si } 2\varepsilon \in [1, 2[, \text{ i.e. } \varepsilon \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[, \end{cases}$$

$$\text{donc } \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor + \left\lfloor \varepsilon + \frac{1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} 2\lfloor x \rfloor + 0 & \text{si } \varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 2\lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } \varepsilon \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\end{cases} = 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2\varepsilon \rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

VII – Equations

Définition 2.60 – Une **équation** est un *problème* mettant en jeu une **égalité** du type

$$f(x) = 0,$$

où f est une fonction à variable réelle et le réel x est appelé **inconnue** de l'équation.
On dit que l'on **résout** cette équation lorsque l'on recherche l'ensemble des x tels que $f(x) = 0$.
On note généralement l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\right\}.$$

Pour résoudre complètement une équation, il faut donc donner l'ensemble complet de ses solutions, cela devant inclure une justification qu'aucune autre valeur des variables ne peut fournir de solution. Autrement dit, résoudre une équation (E) d'inconnue x, c'est déterminer l'ensemble A tel que

$$x \text{ est solution de } (E) \iff x \in A.$$

1 – Résolutions d'équations

Dans l'idéal, on veux résoudre les équations par équivalences, mais si ce n'est pas possible, il faut plutôt travailler par analyse-synthèse.

Méthode 2.61 – Résolution par équivalences

1. On détermine à quels ensembles appartiennent les inconnues pour que chacun des termes de l'équation soit correctement défini. A la fin, il faudra s'assurer que les solutions obtenues sont bien dans ces ensembles.
2. On introduit les inconnues (« Soit $x \in \dots$ »).
3. On se ramène par une chaine d'équivalences à une équation plus simple que l'on sait résoudre.
4. On conclut en présentant toutes les solutions. (Souvent sous forme d'ensemble)

Exemple 2.62 – Résoudre l'équation $\dfrac{x+1}{x-2} = x$ d'inconnue réelle x.
Tout d'abord, les expressions apparaissant dans l'équation sont correctement définies si, et seulement si, x est un réel différent de 2.
Soit x un nombre réel non égal à 2.

$$\frac{x+1}{x-2} = x \iff x+1 = x(x-2) \iff x^2 - 3x - 1 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré vaut 13 et ses solutions sont $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ donc

$$\frac{x+1}{x-2} = x \iff \left(x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \text{ ou } x = \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$$

Finalement, les solutions de l'équation sont $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$.

2 – Le bestiaire

Vous savez déjà résoudre un certain nombre d'équations :

Équation polynomiale de degré 1 : Équations du type $ax + b = 0$ d'inconnue réelle x pour $a \neq 0$ et b des réels fixés. Il y a une unique solution qui est $\dfrac{-b}{a}$.

Équation polynomiale de degré 2 : Équations du type $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue réelle x pour $a \neq 0$, b et c des réels fixés. Pour le principe, je vous rappelle le résultat bien connu :

Théorème 2.63

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Trois cas sont possibles :

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution réelle $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et on a la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  et on a la factorisation $ax^2 + bx + c = 0 = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Équations du type $|x| = a$ d'inconnue réelle x pour a un réel fixé. Voir Proposition 2.47

Équations du type $\sqrt{x} = a$ d'inconnue réelle x pour a un réel fixé. L'ensemble des solutions est $\{a^2\}$ si $a \geqslant 0$ et $\varnothing$ sinon.

3 – Dans les autres cas

On essaie de se ramener à un de ces cas précédents par équivalence ou par déduction dans une phase d'analyse.

Méthode 2.64 – Principe de produit/quotient nul et factorisation

Pour savoir quand un terme compliqué est nul, on peut le factoriser pour se ramener à résoudre plusieurs équations plus simples, en utilisant un principe bien connu de produit/quotient nul :

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, au moins un des facteurs est nul.
Un quotient est nul si, et seulement si, le numérateur est nul.

Exemple 2.65 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^4\sin(x) - 16\sin(x) - 2x^4 + 32 = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
x^4\sin(x) - 16\sin(x) - 2x^4 + 32 = 0 &\iff (x^4 - 16)(\sin(x) - 2) = 0 \\
&\iff (x^2 - 4)(x^2 + 4)(\sin(x) - 2) = 0 \\
&\iff (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(\sin(x) - 2) = 0 \\
&\iff x - 2 = 0 \text{ Ou } x + 2 = 0 \text{ Ou } x^2 + 4 = 0 \text{ Ou } \sin(x) - 2 = 0 \\
&\iff x = 2 \text{ Ou } x = -2 \text{ Ou } x^2 = -4 \text{ Ou } \sin(x) = 2
\end{aligned}$$

$x^2 = -4$ et $\sin(x) = 2$ n'ont pas de solutions réelles. L'ensemble des solutions de (E) est donc $\{-2, 2\}$.

Exemple 2.66 – Résoudre l'équation (E) : $\dfrac{x}{x+2} + \dfrac{2}{x} = -3$.

Pour que l'équation soit bien définie, il faut que $x + 2 \neq 0$ et $x \neq 0$, c'est à dire que $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$. Soit donc $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} = -3 \quad &\iff \quad \frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} + 3 = 0 \\
&\iff \frac{x^2}{x(x+2)} + \frac{2(x+2)}{x(x+2)} + \frac{3x(x+2)}{x(x+2)} = 0 \\
&\iff \frac{x^2 + 2x + 4 + 3x^2 + 6x}{x(x+2)} = 0 \\
&\iff \frac{4x^2 + 8x + 4}{x(x+2)} = 0 \\
&\iff 4x^2 + 8x + 4 = 0 \\
&\iff 4(x+1)^2 = 0 \quad \iff \quad x = -1.
\end{aligned}$$

Attention, ici il est important de vérifier que les solutions appartiennent au domaine de définition de l'équation (E). C'est le cas ici. D'où $\mathcal{S} = \{-1\}$.

ATTENTION ! Élever au carré les deux cotés d'une égalité ne peut se faire par équivalence **QUE** si l'on sait que les deux membres sont de même signe.
Autrement dit, pour a et b réels, écrire que $a = b \iff a^2 = b^2$ nécessite de justifier que a et b sont de même signe avant même d'écrire l'équivalence. Dans le cas général, on a seulement les deux équivalences :

$$a^2 = b^2 \iff (a = b \text{ Ou } a = -b),$$

$$a = b \iff a^2 = b^2 \text{ Et } a \text{ et } b \text{ ont même signe.}$$

Exemple 2.67 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sqrt{x^2+1} = 2x+1$.
L'équation est bien définie sur $\mathbb{R}$ car x^2+1 est toujours positif.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
• Si $x < \frac{-1}{2}$, alors $2x+1 < 0$. Comme $\sqrt{x^2+1} \geqslant 0$, l'équation n'a pas de solution sur $]-\infty, \frac{-1}{2}[$.
• Si $x \geqslant \frac{-1}{2}$, alors $2x+1$ et $\sqrt{x^2+1}$ sont positifs, donc

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} = 2x+1 &\iff x^2+1 = (2x+1)^2 \\ &\iff 0 = 4x^2+4x+1-x^2-1 \\ &\iff 0 = x(3x+4) \\ &\iff x = 0 \text{ Ou } x = \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

$0 \in [\frac{-1}{2}, +\infty[$, donc 0 est solution de (E). $\frac{-4}{3} \notin [\frac{-1}{2}, +\infty[$, donc $\frac{-4}{3}$ n'est pas solution de (E).
• En conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est $\{0\}$.

ATTENTION ! Quand de part et d'autre d'une équation on a le même facteur dépendant de l'inconnue, il ne faut pas simplifier, mais tout passer du même côté de l'égalité et factoriser pour se ramener à un produit nul.

Exemple 2.68 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 - x^2 = (x-1)(x+6)$.

Remarquons que les termes de l'équation sont correctement définis pour tout réel x.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 = (x-1)(x+6) &\iff x^2(x-1) = (x-1)(x+6) \\ &\iff (x-1)(x^2-x-6) = 0 \\ &\iff (x-1)(x-3)(x+2) = 0 \end{aligned}$$

L'équation a donc 3 solutions : 1, 3 et -2.

VIII – Inéquations

Définition 2.69 – Une inéquation est un *problème* mettant en jeu une **inégalité** du type

$$f(x) \geqslant 0 \quad \big(\text{ou} \quad f(x) \leqslant 0 \text{ Ou } f(x) > 0 \text{ Ou } f(x) < 0\big),$$

où f est une fonction à variable réelle et le réel x est appelée **inconnue** de l'inéquation.
On dit que l'on **résout** cette inéquation lorsque l'on recherche l'ensemble des x tels que $f(x) \geqslant 0$ (ou $f(x) \leqslant 0, \ldots$). On note généralement l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\big\}.$$

Pour résoudre complètement une inéquation, il faut donc donner l'ensemble complet de ses solutions, cela devant inclure une justification qu'aucune autre valeur des variables ne peut fournir de solution. Autrement dit, résoudre une inéquation (I) d'inconnue x, c'est déterminer l'ensemble A tel que

$$x \text{ est solution de } (I) \Longleftrightarrow x \in A.$$

Pour résoudre une inéquation, les techniques seraient a priori les mêmes que pour les équations. En pratique, **on n'utilise pas l'analyse-synthèse**, car la synthèse nécessiterait souvent de vérifier une infinité de candidats, ce qui est difficile.

1 – Le bestiaire

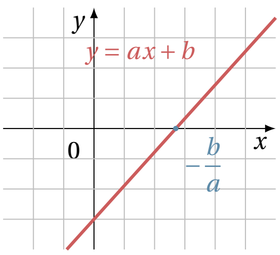
Vous savez déjà résoudre un certain nombre d'inéquations :

Inéquation polynomiale de degré 1 : Équations du type $ax+b \geqslant 0$ (ou $ax+b>0$) d'inconnue réelle x pour $a \neq 0$ et b des réels fixés. Rappelons les résultats suivants, qui ne sont pas à connaître par cœur mais qu'il faut savoir retrouver très rapidement.

L'expression $ax+b$ change de signe au point où elle s'annule. On obtient alors deux tableaux de signes, selon le signe de a.

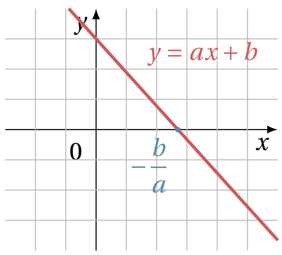
Cas $a>0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	



Cas $a<0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	



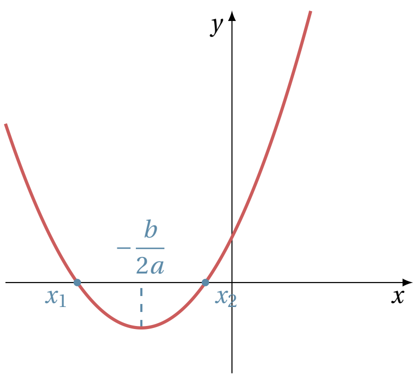
Inéquation polynomiale de degré 2 : Équations du type $ax^2+bx+c \geqslant 0$ (ou $ax^2+bx+c>0$) d'inconnue réelle x pour $a \neq 0, b$ et c des réels fixés. Discriminant, plusieurs options selon signe du discriminant et signe de a. Encore une fois, pour le principe, nous rappelons les résultats que vous connaissez normalement déjà très bien.

Le signe du polynôme ax^2+bx+c dépend **à la fois** du signe du discriminant Δ ET du signe de a.
Dès lors, il y a 6 cas :

- Si $\Delta>0$, on note x_1 et x_2 les racines de sorte que $x_1<x_2$ et on obtient les tableaux de signe et représentations graphiques suivants.

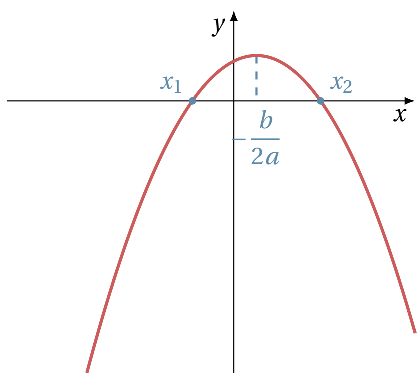
Cas $a>0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		$+$	0	$-$	0	$+$	



Cas $a<0$

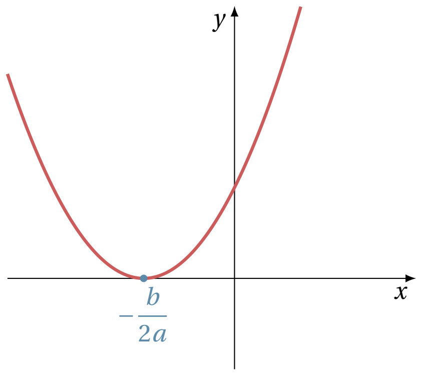
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		$-$	0	$+$	0	$-$	



- Si $\Delta = 0$, on note x_0 la racine double et on obtient les tableaux de signe et représentations graphiques suivants.

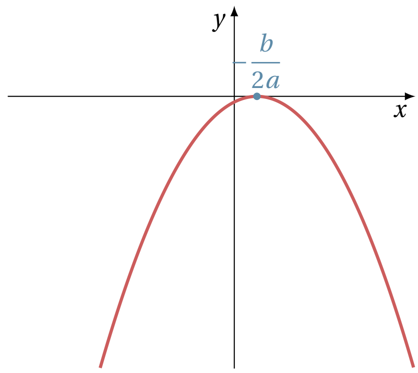
Cas $a > 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	$+$	0	$+$



Cas $a < 0$

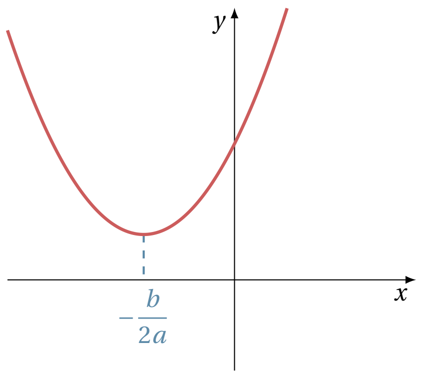
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	$-$	0	$-$



- Si $\Delta < 0$, le signe de ax^2+bx+c reste constant et est le même que celui de a. On obtient les tableaux de signe et représentations graphiques suivantes.

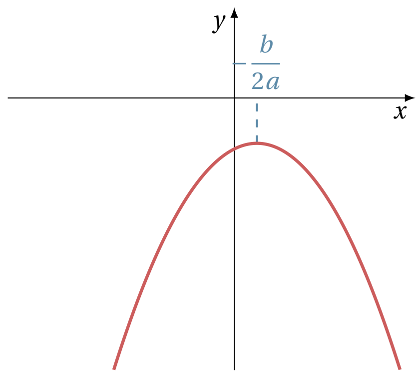
Cas $a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$+$	



Cas $a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$-$	



Proposition 2.70 – En résumé

- Si $\Delta \leqslant 0$, le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a.
- Si $\Delta > 0$, le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a **à l'extérieur** (ou en dehors) des racines.

Exemple 2.71 – Résoudre l'inéquation $x^2 - 7x + 10 \leqslant 0$.

Le discriminant vaut : $\Delta = 49 - 40 = 9 > 0$. Il y a donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{7-3}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{7+3}{2} = 5$.

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$x^2-7x+10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe, $x^2-7x+10 \leqslant 0$ pour $x \in [2,5]$ donc

$$\mathcal{S} = [2,5].$$

Inéquations de type valeur absolue : Voir les points 7 à 10 de la Proposition 2.50

2 – Et sinon, on fait quoi ?

On travaille par équivalences en factorisant au maximum afin de se ramener à un des cas précédents ou à l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient grâce à un tableau de signes.

On n'oublie pas, avant toute chose, de déterminer pour quelles valeurs des variables l'inéquation est bien définie.

ATTENTION ! Si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par une même quantité négative, cela change le sens de l'inégalité.
En particulier, lorsque l'on multiplie par une quantité pouvant changer de signe, on peut être amené à faire une disjonction de cas.

Exemple 2.72 –

1. Résoudre dans ℝ l'inéquation $\dfrac{x^2}{1+x^2} \geqslant \dfrac{1}{3}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $1+x^2$ est positif, donc

   $$\frac{x^2}{1+x^2} \geqslant \frac{1}{3} \iff x^2 \geqslant \frac{1+x^2}{3} \iff 2x^2 \geqslant 1 \iff x^2 \geqslant \frac{1}{2} \iff x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ Ou } x \leqslant \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

   L'ensemble des solutions de $\dfrac{x^2}{1+x^2} \geqslant \dfrac{1}{3}$ est donc

   $$\left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \bigcup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[.$$

2. Résoudre dans ℝ l'inéquation $\dfrac{2x^2+1}{x+1} \geqslant 2$.

   Les termes de l'inégalité sont bien définis lorsque $x \neq 1$.
   Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors

   $$\frac{2x^2+1}{x+1} \geqslant 2 \iff \frac{2x^2+1}{x+1} - 2 \geqslant 0 \iff \frac{2x^2-2x+1}{x+1} \geqslant 0.$$

   Le trinôme $2x^2-2x+1$ a pour discriminant $\Delta = 4-4(-2)(-1) = 12$ et ses racines sont $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.
   On peut ainsi dresser le tableau de signes suivant,

x	$-\infty$		-1		x_1		x_2		$+\infty$
x^2-2x+1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{2x^2-2x+1}{x+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de $\dfrac{2x^2+1}{x+1} \geqslant 2$ est donc

$$\left]-1; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right] \bigcup \left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[.$$

Exemple 2.73 – Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{3}{x} < \dfrac{1}{x+7}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x} < \frac{1}{x+7} &\iff \frac{x+3(x-2)}{x(x-2)} < \frac{1}{x+7}\\
\iff \frac{4x-6}{x(x-2)} - \frac{1}{x+7} < 0 &\iff \frac{(4x-6)(x+7)-x(x-2)}{x(x-2)(x+7)} < 0\\
\iff \frac{4x^2+28x-6x-42-x^2+2x}{x(x-2)(x+7)} < 0 &\iff \frac{3x^2+24x-42}{x(x-2)(x+7)} < 0
\end{aligned}$$

On étudie maintenant le signe de chacun des termes de $\dfrac{3x^2+24x-42}{x(x-2)(x+7)}$.
Le discriminant de $3x^2+24x-42$ vaut $\Delta = 24^2 - 4\times 3\times(-42) = 576+504 = 1080 > 0$. Il y a deux racines

$$x_1 = \frac{-24-\sqrt{1080}}{2\times 3} = \frac{-24-6\sqrt{30}}{6} = -4-\sqrt{30} \text{ Et } x_2 = \frac{-24+6\sqrt{30}}{6} = -4+\sqrt{30}.$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-4-\sqrt{30}$		-7		0		$-4+\sqrt{30}$		2		$+\infty$
$x+7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2+24x-42$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3x^2+24x-42}{x(x-2)(x+7)}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Finalement, j'obtiens les solutions de l'inéquation de départ en regardant pour quelles valeurs de x l'expression est négative :

$$\mathcal{S} =]-\infty, -4-\sqrt{30}[\cup]-7, 0[\cup]-4+\sqrt{30}, 2[.$$

Exemple 2.74 – Résoudre l'inéquation $\sqrt{x^2-3x+2} \leqslant x+1$.

On veut résoudre l'inéquation $\sqrt{x^2-3x+2} \leqslant x+1$ d'inconnue x… … mais sur quel ensemble? Un petit tableau de signe nous permet de le découvrir.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'inéquation n'est définie que sur $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$, et pour tout x dans cet ensemble :

$$\sqrt{x^2-3x+2} \leqslant x+1 \iff x^2-3x+2 \leqslant (x+1)^2 \text{ et } x+1 \geqslant 0 \iff 5x \geqslant 1 \text{ et } x \geqslant -1 \iff x \geqslant \frac{1}{5}.$$

L'ensemble des solutions cherché est la réunion d'intervalles $\left[\frac{1}{5}, 1\right] \cup [2, +\infty[$.