

# 29 | Matrices et applications linéaires

We share a philosophy about linear algebra : we think basis-free, we write basis-free , but when the chips are down we close the office door and compute with matrices like fury.

Irving Kaplansky (1917-2006) and Paul Halmos (1916-2006)

Dans tout ce chapitre, comme vous en avez l'habitude,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## I – Représentation matricielle

### 1 – Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur

**Définition 29.1** – Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Tout élément  $x \in E$  s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{avec } x_i \in \mathbb{K}, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

La matrice colonne  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  est appelée **matrice colonne des coordonnées** du vecteur  $x$  dans la base  $\mathcal{B}_E$ .

**Exemple 29.2** – On considère le polynôme  $P(X) = 1 + X^2 + 3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ . Le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base  $(1, X, X^2, X^3)$  est  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

#### Proposition 29.3 – Opérations matricielles sur les vecteurs

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Pour tout  $x$  et  $y$  dans  $E$  et tout scalaire  $\lambda$ , on a

$$M_{\mathcal{B}}(x+y) = M_{\mathcal{B}}(x) + M_{\mathcal{B}}(y) \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B}}(\lambda x) = \lambda M_{\mathcal{B}}(x).$$

*Démonstration.* On note  $(x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{B}$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  celles de  $y$ .

Par définition,  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$  et  $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$  donc

$$x + y = (x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + \dots + (x_n + y_n)e_n$$

$$\text{et } \lambda x = (\lambda x_1)e_1 + (\lambda x_2)e_2 + \dots + (\lambda x_n)e_n.$$

On a

$$M_{\mathcal{B}}(x) + M_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(x+y) \quad \lambda M_{\mathcal{B}}(x) = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(\lambda x).$$

□

## 2 – Matrice d'une famille de vecteurs

**Définition 29.4** (Matrice d'une famille de vecteurs dans une base) – Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Soit  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ . On appelle **matrice de la famille de vecteurs**  $(x_1, \dots, x_p)$  dans la base  $\mathcal{B}$  et on note  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$  ou  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  dont la  $j$ -ème colonne est la colonne des composantes de  $x_j$  dans la base  $\mathcal{B}$  (pour tout  $1 \leq j \leq p$ ).

**Exemple 29.5 –**

1. Soit  $E = \mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ . On considère les vecteurs :

$$x_1 = (1, 2, 3), \quad x_2 = (2, 0, 1), \quad x_3 = (1, 0, -1), \quad x_4 = (-1, 1, 1).$$

On a alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Dans  $\mathbb{R}^n$ , la matrice de la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = I_n.$$

3. Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ . On pose  $P = X^2 + 3X + 4$ . La matrice de la famille  $(P, P', P'')$  dans la base  $\mathcal{B}$  est alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P, P', P'') = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 3 – Changement de bases pour un vecteur

**Exemple 29.6** – On se place sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_2[X]$ . Soit  $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3) = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ . On introduit les polynômes :

$$Q(X) = X \quad ; \quad R(X) = X^2 + 1 \quad ; \quad S(X) = X^2 - 1.$$

On peut montrer (ex!) que la famille  $\mathcal{B}' = (Q, R, S)$  forme une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Soit  $T = 5X^2 + X - 1$ . Déterminons les coordonnées du polynôme  $T$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .

On obtient facilement la matrice colonne des coordonnées de  $T$  dans la base  $\mathcal{B}$ , notée  $X$ . On a :

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Cherchons ensuite la matrice colonne des coordonnées de  $T$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , notée  $X'$ . On cherche donc  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $T = \lambda_1 Q + \lambda_2 R + \lambda_3 S$ . On a :

$$\begin{aligned} 5X^2 + X - 1 &= \lambda_1 X + \lambda_2 (X^2 + 1) + \lambda_3 (X^2 - 1) \\ &= (\lambda_2 + \lambda_3)X^2 + \lambda_1 X + (\lambda_2 - \lambda_3). \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 5 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 5 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

On résout facilement ce système et on obtient une unique solution

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 3.$$

On a donc :

$$X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Notons  $P$  la matrice des coordonnées des vecteurs de la base  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On a :

$$P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons ensuite  $PX'$ , on obtient :

$$PX' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = X.$$

Coïncidence?

**Définition 29.7 (Matrice de passage)** – Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases d'un espace vectoriel  $E$ . On appelle **matrice de passage** de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ , la matrice :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n).$$

**Proposition 29.8 – Inversibilité de la matrice de passage**

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases d'une espace vectoriel  $E$ , la matrice  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  est inversible et son inverse est  $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ .

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = I_n$ . □

**Proposition 29.9**

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases d'une espace vectoriel  $E$  et  $x \in E$ , si  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$  et  $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$  alors

$$X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'.$$

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ , on décompose  $x$  dans les deux bases :

d'une part, il existe  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,

d'autre part, il existe  $(x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $x = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j$ .

Notons  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = (p_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ , on a pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$e'_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i.$$

Ainsi

$$x = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \left( \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n p_{i,j} x'_j \right) e_i.$$

L'écriture de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  étant unique, on a

$$x_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} x'_j \quad \text{i.e.} \quad X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'. \quad \square$$

**Exemple 29.10** – Reprenons l'Exemple 29.6. La matrice  $P$  que nous avons déterminée était donc  $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ . On avait donc bien la relation  $X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'$ .

**Exemple 29.11** – On se place dans l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$ . On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et on considère  $\mathcal{B}' = ((1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1))$  une autre base de  $E$ . Soit le vecteur  $x = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ . Déterminons la matrice colonne des coordonnées de  $x$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .

Posons  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Commençons par déterminer  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ .

On a :  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Notons  $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ . On a  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , on cherche alors  $X'$ . On sait que :

$$X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X' \quad \text{donc} \quad X' = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} X \quad \text{soit} \quad X' = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} X.$$

Il nous faut donc inverser la matrice  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ . Avec la méthode de son choix, on obtient :

$$(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors  $X'$  :

$$X' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix}.$$

## II – Matrice d’une application linéaire

### 1 – Définition

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives  $p$  et  $n$ .

On note  $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  une base de  $F$ .

Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

On a vu dans un chapitre précédent qu’en dimension finie, une application linéaire est entièrement déterminée par l’image d’une base donc  $u$  est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs  $u(e_j)$  ( $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ).

Pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on peut exprimer le vecteur  $u(e_j)$  dans la base  $\mathcal{B}_F$  : il existe un unique  $n$ -uplet de scalaires  $(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j})$  tel que

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i = a_{1,j} f_1 + a_{2,j} f_2 + \dots + a_{n,j} f_n,$$

le  $n$ -uplet de scalaires  $(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j})$  étant les coordonnées de  $u(e_j)$  dans la base  $\mathcal{B}_F$ .

La donnée de la famille de scalaires  $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  définit donc entièrement l’application linéaire  $u$ , et nous pouvons la présenter à l’aide de la matrice

$$M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = M_{\mathcal{B}_F}(u(e_1), \dots, u(e_p)) = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_j) & \dots & u(e_p) \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{matrix}$$

dont les colonnes sont les matrices-colonnes qui représentent les vecteurs  $u(e_1), \dots, u(e_p)$  dans la base  $\mathcal{B}_F$ .

**Définition 29.12** – On reprend les notations précédentes. On appelle **matrice de l'application linéaire  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$**  la matrice, notée  $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ , et définie par

$$M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = M_{\mathcal{B}_F}(u(e_1), \dots, u(e_p))$$

Dans le cas où  $u$  est un endomorphisme de  $E$  (c'est-à-dire où  $E = F$ ), on peut choisir (mais ce n'est pas obligatoire) la même base au départ et à l'arrivée et, dans ce cas, on appelle **matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$**  la matrice notée  $M_{\mathcal{B}}(u)$  et définie par

$$M_{\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u).$$

**Exemple 29.13** –

1.  $f: \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (2x + 3y, x - y, 4y) \end{matrix}$ . On note  $\mathcal{B}_0$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{B}_1$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{B}_1$ .

On détermine les images des vecteurs de  $\mathcal{B}_0$ .

$$f(1, 0) = (2, 1, 0) \text{ et } f(0, 1) = (3, -1, 4).$$

On a donc :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.  $g: \begin{matrix} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{matrix}$ . On note  $\mathcal{B}_2$  la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  et  $\mathcal{B}_3$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Déterminer la matrice de  $g$  dans les bases  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_3$ .

$g(1) = 0$ ,  $g(X) = 1$ ,  $g(X^2) = 2X$  et  $g(X^3) = 3X^2$ . On a donc :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.  $h: \begin{matrix} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & XP' - P \end{matrix}$ . Déterminer la matrice de  $h$  dans la base  $\mathcal{B}_2$ .

$h(1) = -1$ ,  $h(X) = 0$ ,  $h(X^2) = X^2$  et  $h(X^3) = 2X^3$ . On a donc :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(h) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ , On note  $r_\theta$  la rotation de centre 0 et d'angle  $\theta$ . On note  $\mathcal{B}_4$  la base canonique de  $\overline{\mathcal{P}}$ . Déterminer la matrice de  $r_\theta$  dans  $\mathcal{B}_4$ .

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_4}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

5. Dans  $\overline{\mathcal{E}}$ , on note  $s$  la symétrie par rapport à  $\text{Vect}((\vec{u}, \vec{v}))$  parallèlement à  $\text{Vect}(\vec{w})$  où  $\vec{u}(2, 1, 3)$ ,  $\vec{v}(-1, 1, 0)$  et  $\vec{w}(0, 1, 0)$ . On admet que  $\mathcal{B}_5 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de  $\overline{\mathcal{E}}$ . On note  $\mathcal{B}_6$  la base canonique de  $\overline{\mathcal{E}}$ . Déterminer la matrice de  $s$  dans la base  $\mathcal{B}_5$  puis la matrice de  $s$  dans les bases  $\mathcal{B}_5$  et  $\mathcal{B}_6$ .

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_5}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_6}(s) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on note  $p$  le projecteur sur  $S$  l'ensemble des matrices symétriques parallèlement à  $A$  l'ensemble des matrices antisymétriques. Alors, on a déjà vu que  $p: M \mapsto \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ . On note  $\mathcal{B}_7$  la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{B}_8$  une base adaptée à la somme directe  $S \oplus A$ . Déterminer les matrices de  $p$  dans les bases  $\mathcal{B}_7$  et  $\mathcal{B}_8$ .

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_7}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_8}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 29.14** – La matrice d'un endomorphisme est une matrice carrée.

**Définition 29.15** (Application linéaire canoniquement associée à une matrice) – Soient  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$  et  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , on note  $\mathcal{B}_p$  et  $\mathcal{B}_n$  les bases canoniques respectives de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . L'application linéaire  $f$  de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  qui vérifie  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_p}(f) = A$  est appelée **application linéaire canoniquement associée à  $A$**  et vérifie :

$$\text{pour tout } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j,$$

où les  $a_{ij}$  désignent les coefficients de la matrice  $A$ .

**Exemple 29.16** – On considère la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Donner son application linéaire canoniquement associée.

C'est l'application  $f$  de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  qui à  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  associe  $f((x, y, z)) = \begin{pmatrix} 2x + 5y + 2z \\ 3y + z \end{pmatrix}$ .

On peut le lire horizontalement sur la matrice, ou remarquer que la linéarité de  $f$  donne :

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) &= x f \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + y f \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + z f \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 5y + 2z \\ 3y + z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Définition 29.17** – Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times p$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . On note  $\varphi_A$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

▷ On appelle **noyau** de la matrice  $A$  et l'on note  $\text{Ker}(A)$  le noyau de l'application linéaire  $\varphi_A$  canoniquement associée à  $A$ , autrement dit,

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(\varphi_A) = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \right\}.$$

▷ On appelle **image** de  $A$  et l'on note  $\text{Im}(A)$  l'image de l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ , autrement dit,

$$\text{Im}(A) = \text{Im}(\varphi_A) = \left\{ AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \right\} = \left\{ Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = Y \right\}.$$

**Exemple 29.18** – Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ . Déterminer le noyau et l'image de  $A$ . Soit  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x + 4y + z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \iff (x, y, z) \in \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Donc  $\text{ker}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

$\text{Im}(A)$  est engendré par la famille des images des vecteurs d'une base, soit la famille

$$\left( A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

On peut remarquer que le dernier vecteur est la différence des deux premiers, qui ne sont pas colinéaires, donc  $\text{Im}(A)$

est un espace de dimension 2 ayant pour base  $\left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .

**Exemple 29.19** – On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  de matrice  $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  dans la base canonique.

Alors :  $\text{Im } f = \text{Vect}(1, 2X^2 + X)$  et  $\text{Ker } f = \text{Vect}(X^2 - 2X)$ .

*Démonstration.* Pour commencer :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \text{Vect}(3, 2X^2 + X + 3, 4X^2 + 2X + 6) = \text{Vect}(1, 2X^2 + X + 3) = \text{Vect}(1, 2X^2 + X).$$

$$\text{Ensuite, pour tout } P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] : P \in \text{Ker } f \iff f(P) = 0 \iff \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 3c + 3b + 6a = 0 \\ b + 2a = 0 \\ 2b + 4a = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} c = 0 \text{ et } b = -2a \iff P = aX^2 - 2aX.$$

Conclusion :  $\text{Ker } f = \text{Vect}(X^2 - 2X)$ . □

## 2 – L'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions respectives  $p$  et  $n$ .

Soient  $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$ ,  $u$  et  $v$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Notons  $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  et  $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(v) = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

On a par définition des scalaires  $a_{i,j}, b_{i,j}, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i$  et  $v(e_j) = \sum_{i=1}^n b_{i,j} f_i$ , donc

$$(\lambda u + v)(e_j) = \lambda u(e_j) + v(e_j) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i + \sum_{i=1}^n b_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{i,j} + b_{i,j}) f_i$$

Donc  $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\lambda u + v) = (\lambda a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \lambda (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} + (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \lambda M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) + M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(v)$ .

### Proposition 29.20 – Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Étant donnés deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $E$  et  $F$  de dimensions respectives  $p$  et  $n$ , rapportés respectivement aux bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ , l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

*Démonstration.* Le début de ce paragraphe permet d'affirmer que  $\varphi$  est une application linéaire.

Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ , il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) = A$ , car une application linéaire est déterminée de manière unique par l'image d'une base. Ainsi, l'application  $\varphi$  est bijective et  $\varphi$  est bien un isomorphisme. □

**Remarque 29.21** – En résumé, cette propriété exprime deux choses :

- une propriété de linéarité :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(v)$  avec des notations évidentes,
- une propriété de bijectivité - on connaît « entièrement »  $f$  quand on connaît  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ . Toute matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  peut être interprétée comme représentante d'une application linéaire d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $p$  vers un espace vectoriel de dimension  $n$ .



**ATTENTION !** Il est important de noter que pour avoir ces résultats, il faut qu'il s'agisse bien de matrices dans la même base de départ et la même base d'arrivée.

### Corollaire 29.22 – Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie. L'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace vectoriel de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

*Démonstration.* Notons  $n = \dim(F)$  et  $p = \dim(E)$ . D'après la proposition 1, les espaces vectoriels  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont isomorphes. Ils ont donc même dimension, à savoir  $np$ . □

### 3 – Image d'un vecteur par une application linéaire

**Exemple 29.23** – On pose  $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  et on note  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^4$  telle que  $M = M_{\mathcal{B}_4, \mathcal{B}_3}(f)$  où

$\mathcal{B}_3$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}_4$  celle de  $\mathbb{R}^4$ .

1. Pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , déterminer  $f((x, y, z))$ .  
On a :  $f((x, y, z)) = (2x - z, x + 4y, 2y + 6z, 3z)$ .

2. Calculer  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . On a :  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z \\ x + 4y \\ 2y + 6z \\ 3z \end{pmatrix}$ .

3. Que remarque-t-on?

Cette constatation est générale. On peut la formaliser de la manière suivante.

#### Théorème 29.24 – Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $p \in \mathbb{N}^*$ , de base  $\mathcal{B}_E$ , et  $F$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , de base  $\mathcal{B}_F$ . Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$ . Soit  $x \in E$ ,  $y \in F$  et  $X$  et  $Y$  les matrices colonnes de leurs coordonnées dans les bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ . On a :

$$y = f(x) \iff Y = AX.$$

*Démonstration.* On pose  $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$  et  $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ . Comme  $x \in E$  et  $y \in F$ , il existe des scalaires  $x_j$  et  $y_i$  tels que  $x = \sum_{j=1}^p x_j e_j$  et  $y = \sum_{i=1}^n y_i f_i$ . On pose  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ .

Par linéarité de  $f$ , définition de  $A$ , puis interversion des sommes :

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^p x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^p x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^p x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} f_i\right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j\right) f_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j\right) f_i$$

Ce qui nous donne, par identification des coefficients dans la base  $F$  puis par définition du produit matriciel :

$$y = f(x) \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \iff Y = AX$$

□

**Exemple 29.25** – Soit  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$  qui à un polynôme  $P$  associe son polynôme dérivé  $P'$ . On note  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

1. Déterminer la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On a :  $g(1) = 0, \quad g(X) = 1, \quad g(X^2) = 2X, \quad g(X^3) = 3X^2$ .  
Ainsi,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit  $P(X) = 1 + X^2 + 3X^3$ . Calculer  $g(P(X))$  en utilisant la matrice de la question précédente.

$$\text{On a : } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que  $g(P(x)) = 0 + 2X + 9X^2 + 0X^3 = 2X + 9X^2$ .  
On retrouve ainsi bien l'expression du polynôme dérivé.

**Remarque 29.26** – Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de bases respectives  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ . Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Notons  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$ . Chercher le noyau de  $f$  revient à résoudre le système  $AX = 0$ .

## 4 – Opérations sur les matrices d'applications linéaires

### Proposition 29.27

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $p \in \mathbb{N}^*$ , de base  $\mathcal{B}_E$ , et  $F$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , de base  $\mathcal{B}_F$ . Soit  $f$  et  $g$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\lambda f + g) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(g)$$

### Théorème 29.28 – Matrice d'une composée d'applications linéaires

Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives  $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}_G$ . Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application linéaire de  $F$  dans  $G$ . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f).$$

*Démonstration.* On pose  $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ ,  $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$  et  $\mathcal{B}_G = (g_1, \dots, g_m)$ . On pose

$$(a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$$

et

$$(b_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(g).$$

La matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(g \circ f)$  est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs  $(g \circ f)(e_j)$  dans la base  $\mathcal{B}_G$ , on va donc commencer par calculer ces vecteurs. Soit  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , par linéarité de  $f$  et de  $g$ , on a :

$$(g \circ f)(e_j) = g(f(e_j)) = g\left(\sum_{i=1}^n a_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^n a_{ij} g(f_i) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^m b_{ki} g_k\right) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ij}\right) g_k.$$

Or  $\sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ij}$  correspond au terme de la  $k$ -ième ligne et  $j$ -ième colonne de la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$ , par formule du produit matriciel. D'où le résultat.  $\square$

Composer des applications linéaires revient donc à multiplier des matrices.

**Exemple 29.29** – Soit  $E$  un espace vectoriel de base  $\mathcal{B}$ .

Un endomorphisme  $f$  de  $E$  est un projecteur ssi  $f \circ f = f$ . Notons  $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ . La condition  $f \circ f = f$  se traduit par :

$$P^2 = P$$

### Théorème 29.30

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ , soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  alors  $f$  est bijectif si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est inversible et on a alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$ .

*Démonstration.* On note  $n \in \mathbb{N}^*$  la dimension de  $E$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $f$  est bijective. Alors elle admet une réciproque  $f^{-1}$  et  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_E$ . En passant aux matrices associées, on trouve :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n.$$

Donc  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est inversible et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$ .

( $\Leftarrow$ ) Réciproquement, supposons que  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est inversible. Soit  $g$  l'endomorphisme de  $E$  tel que les coordonnées de  $g(e_i)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont les vecteurs colonne de  $A^{-1}$ . On a alors, en notant  $E_i$  la matrice des coordonnées de  $e_i$  dans la base  $\mathcal{B}$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$(g \circ f)(e_i) = e_i, \text{ car } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f)E_i = A^{-1}AE_i = I_n E_i = E_i.$$

d'où  $g \circ f = \text{Id}_E$ . Puisque  $f$  est un endomorphisme, elle est bijective et d'inverse  $g$ . Par construction de  $g$ , on a de plus  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$ .  $\square$

**Exemple 29.31** – Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  défini pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  par  $f((x, y)) = (x + 2y, 2x + 2y)$ . Montrer que  $f$  est bijective et donner l'expression de sa réciproque.

La matrice de  $f$  dans la base canonique est  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Comme  $2 - 4 = -2 \neq 0$ , cette matrice est inversible, d'inverse

$$\frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc  $f$  est bijective et  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f^{-1}((x, y)) = \left(y - x, \frac{2x - y}{2}\right)$ .

## 5 – Changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

### Proposition 29.32 – Changement de base pour une matrice d'endomorphisme

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ . Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  et soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . En notant :

- $A = M_{\mathcal{B}}(u)$  la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ ,
- $A' = M_{\mathcal{B}'}(u)$  la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}'$ ,
- $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ ,

Alors, on a :

$$A' = P^{-1} A P.$$

**Définition 29.33** – Soit  $n$  un nombre entier naturel non nul. Deux matrices carrées  $A$  et  $A'$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles qu'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  vérifiant  $A' = P^{-1} A P$  sont dites **semblables**.

Autrement dit, en interprétant  $P$  comme une matrice de passage, deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes, prises simultanément comme base de départ et d'arrivée.

**Exemple 29.34** – Considérons l'espace de polynômes  $\mathbb{R}_3[X]$  muni de la base  $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$  et de la base  $\mathcal{B}' = (X^3, X^2(X+1), X(X+1)^2, (X+1)^3)$  (on laisse en exercice la vérification du fait que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ ).

On considère l'endomorphisme de dérivation d'un polynôme :  $D: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ .

$$P(X) \mapsto P'(X)$$

La matrice de  $D$  dans la base  $\mathcal{B}$  est donnée par

$$M_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver la matrice représentant  $D$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , on utilise la proposition précédente (formule de changement de base) : la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dont l'inverse (on la donne ici sans calcul, à vous de le faire) est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient la matrice  $M_{\mathcal{B}'}(D)$  en calculant  $P^{-1}M_{\mathcal{B}}(D)P$  :

$$\begin{aligned}
 P^{-1}M_{\mathcal{B}}(D)P &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}'}(D).
 \end{aligned}$$

## 6 – Trace d'un endomorphisme

La notion de trace peut sembler anecdotique au premier abord, mais c'est en fait un outil intéressant. Nous l'introduisons ici.

**Définition-Théorème 29.35** (Trace d'une matrice carrée) – Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle trace de  $A$  et on note  $\text{tr}(A)$  ou  $\text{Tr}(A)$  la somme des éléments diagonaux de  $A$ .

- (i) **Linéarité** : Pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  :  $\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$ .
- (ii) Effet sur un produit : Pour tous  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  :  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

*Démonstration.* (i)  $\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{k=1}^n (\lambda a_{kk} + \mu b_{kk}) = \lambda \sum_{k=1}^n a_{kk} + \mu \sum_{k=1}^n b_{kk} = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$ .

(ii) La matrice  $AB$  est carrée de taille  $n$  alors que  $BA$  est carrée de taille  $p$ , mais ces matrices ont même trace car

$$\text{tr}(AB) = \sum_{k=1}^n (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} b_{lk} = \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n b_{lk} a_{kl} = \sum_{l=1}^p (BA)_{ll} = \text{tr}(BA).$$

□

**Exemple 29.36** – L'équation matricielle  $AB - BA = I_n$  d'inconnue  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$  n'a pas de solution car pour toutes matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :  $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0 \neq n = \text{tr}(I_n)$ .

### Proposition 29.37

Deux matrices semblables ont même trace.

*Démonstration.* Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $A$  et  $B$  sont semblables, disons  $B = P^{-1}AP$  avec  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1}) = \text{tr}(A)$  d'après les propriétés de la trace. □

**Exemple 29.38** – Les matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  ne sont pas semblables car elles n'ont pas la même trace.

**Définition-Théorème 29.39** (Trace d'un endomorphisme en dimension finie) – Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle. Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ , la trace de la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  ne dépend pas du choix de la base  $\mathcal{B}$  de  $E$  choisie. On l'appelle trace de  $u$ , notée  $\text{tr}(u)$  ou  $\text{Tr}(u)$ .

- **Linéarité** : Pour tous  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  :  $\text{tr}(\lambda u + \mu v) = \lambda \text{tr}(u) + \mu \text{tr}(v)$ .
- **Effet sur une composée** : Pour tous  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  :  $\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$ .

*Démonstration.* Tout ceci vient du fait que deux matrices semblables ont même trace et des propriétés de la trace sur les matrices. □

## III – Rangs : tout s’imbrique

### Rappels :

1. Le rang d’une famille finie  $(v_1, \dots, v_n)$  de vecteurs est la dimension de  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ . On note  $\text{rg}(v_1, \dots, v_n)$ .
2. Une application linéaire  $u$  d’un espace vectoriel  $E$  de dimension finie vers un espace vectoriel  $F$  est de rang fini et son rang  $\text{rg}(u)$  est, par définition, la dimension de  $\text{Im}(u)$ .
3. Avec les hypothèses du point 2., si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , alors  $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)) = \text{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ .

### 1 – Rang d’une matrice

**Définition 29.40 (Rang d’une matrice)** – Soit  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$  et  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . On appelle **rang** de la matrice  $A$  et on note  $\text{rg}(A)$  le rang de la famille des vecteurs colonnes de  $A$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

**Exemple 29.41** – Quel est le rang de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  ?

Notons  $C_1, C_2$  et  $C_3$  les colonnes de  $A$ . On remarque que  $C_3 = C_1 + C_2$ . Donc

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 2,$$

car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires et forment donc une famille libre.

#### Proposition 29.42 – Matrice de rang nul

Soit  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$  et  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . On a :

$$\text{rg}(A) = 0 \iff A = 0.$$

*Démonstration.* Les seules familles de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  de rang 0 sont celles qui ne contiennent que des vecteurs colonnes nuls, d’où le résultat.  $\square$

#### Théorème 29.43 – Lien entre rang d’une application linéaire et de sa matrice

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $F$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , dont on note  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$  des bases. Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $A$  la matrice de l’application  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ . On a :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(A).$$

*Démonstration.* On pose  $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ . Les colonnes de  $A$  sont formées des coordonnées des vecteurs  $f(e_i)$  dans la base  $\mathcal{B}_F$ . Donc par définition du rang d’une matrice, le rang de  $A$  est égal au rang de la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ . Par ailleurs, comme  $\mathcal{B}_E$  est une base de  $E$ , on sait que la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_p))$  engendre  $\text{Im}(f)$ . D’où  $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f)$ .  $\square$

#### Remarque 29.44 –

- ▷ Le rang d’une application linéaire est donc le rang de n’importe laquelle de ses matrices associées : le choix des bases n’importe pas;
- ▷ le rang d’une matrice est celui de n’importe quelle application linéaire représentée par cette matrice;
- ▷ deux applications linéaires pouvant être représentées par la même matrice ont le même rang.

#### Corollaire 29.45 – Deux matrices semblables ont le même rang

Deux matrices représentant la même application linéaire dans des bases différentes ont le même rang.

En particulier, si  $A$  et  $P$  sont deux matrices carrées de même taille,  $P$  étant inversible, alors en posant  $A' = P^{-1}AP$ , on a  $\text{rg}(A') = \text{rg}(A)$ .

**Corollaire 29.46 – Propriété d’une application linéaire et rang de sa matrice**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. On note  $p = \dim(E)$  et  $n = \dim(F)$ . On rapporte  $E$  et  $F$  respectivement aux bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ . Soient  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $A = M_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u)$ .

- ▷  $u$  est injective si, et seulement si,  $\text{rg}(A) = p$ , (nombre de colonnes de  $A$ )
- ▷  $u$  est surjective si, et seulement si,  $\text{rg}(A) = n$ , (nombre de lignes de  $A$ )
- ▷  $u$  est un isomorphisme si, et seulement si,  $\text{rg}(A) = n = p$ . ( $A$  est alors carrée)

**Corollaire 29.47**

Une matrice carrée  $A$  d’ordre  $n$  est inversible ssi elle vérifie l’une des propriétés équivalentes suivantes :

$$\triangleright \text{Ker}(A) = \{O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \quad \triangleright \mathfrak{S}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \triangleright \text{rg}(A) = n.$$

## 2 – Conservation du rang d’une matrice : Here we go again.

**Théorème 29.48 – La multiplication par une matrice inversible préserve le rang**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Soient  $Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $R \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  deux matrices inversibles. On a alors :

$$\text{rg}(RA) = \text{rg}(AQ) = \text{rg}(RAQ) = \text{rg}(A).$$

Autrement dit, on ne change pas le rang d’une matrice en la multipliant à gauche et/ou à droite par une matrice inversible.

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{B}_p = (e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{B}_n = (f_1, \dots, f_n)$  celle de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

On note aussi :

- ▷  $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$  l’endomorphisme canoniquement associé à la matrice  $A$ ,
- ▷  $\mathcal{B}'_p = (e'_1, \dots, e'_p)$  la base de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  formée des vecteurs colonnes de  $Q$ , de sorte que  $Q = P(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}'_p)$ ,
- ▷  $\mathcal{B}'_n = (f'_1, \dots, f'_n)$  la base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  construite pour que l’on ait  $R = P(\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}_n)$ .

On a alors :

$$A = M_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_p}(\varphi_A), \quad Q = M_{\mathcal{B}'_p, \mathcal{B}_p}(\text{Id}_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})}) \quad \text{et} \quad R = M_{\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}_n}(\text{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})})$$

de sorte que

$$AQ = M_{\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}'_p}(\varphi_A \circ \text{Id}_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})}) = M_{\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}'_p}(\varphi_A), \quad RA = M_{\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}'_n}(\text{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \circ \varphi_A) = M_{\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}'_n}(\varphi_A)$$

et  $RAQ = M_{\mathcal{B}'_n, \mathcal{B}'_p}(\varphi_A)$ . Les matrices  $A$ ,  $AQ$ ,  $RA$  et  $RAQ$  représentent la même application linéaire (dans des bases différentes) donc elles ont même rang. □

**Proposition 29.49 – Impact des opérations élémentaires sur les propriétés d’une matrice**

1. Toute opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes d’une matrice conserve le rang de celle-ci.
2. Toute opération élémentaire sur les lignes d’une matrice conserve le noyau de celle-ci.
3. Toute opération élémentaire sur les colonnes d’une matrice conserve l’image de celle-ci.

*Démonstration.* Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- Toute opération élémentaire sur les lignes de  $A$  est une multiplication à gauche par une matrice inversible.
- Toute opération élémentaire sur les colonnes de  $A$  est une multiplication à droite par une matrice inversible.
- Soit  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Alors, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ ,

$$X \in \text{Ker}(A) \iff AX = 0 \iff PAX = 0 \iff X \in \text{Ker}(PA).$$

Donc  $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(PA)$ .

- Soit  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ . Pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ,

$$X \in \text{Im}(A) \iff \exists Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AY = X \iff \exists Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), APZ = X \iff X \in \text{Im}(AP),$$

l’équivalence centrale provenant de l’inversibilité de  $P$ . Donc  $\text{Im}(A) = \text{Im}(PA)$ . □

**Théorème 29.50 – La transposition préserve le rang**

Le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée.

*Démonstration.* Ce théorème sera démontré un peu plus loin dans ce cours. □

**Corollaire 29.51 – Le rang d'une matrice est celui de ses lignes**

Le rang d'une matrice est à la fois celui de ses vecteurs colonnes et celui de ses vecteurs lignes.

*Démonstration.* Soit  $A$  une matrice. Le rang de  $A$  est celui de  $A^T$  donc celui des vecteurs colonnes de  $A^T$  dont les transposées sont les vecteurs lignes de  $A$ . □

**Méthode 29.52 – Calcul du rang d'une matrice**

Pour calculer le rang d'une matrice, on peut appliquer le pivot de Gauss sur les colonnes de la matrices jusqu'à obtenir une matrices triangulaire.

Si cela est plus simple, on peut décider d'appliquer le pivot de Gauss sur les lignes, puisque le rang d'une matrice et le même que celui de sa transposée.

**Exemple 29.53** – Soit l'application linéaire  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dont la matrice dans les bases canoniques est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de  $f$ .

On note  $C_1, C_2, C_3$  les colonnes de la matrice  $A$ , on effectue les opérations suivantes  $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$  et  $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ , de sorte que

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right).$$

Il reste à montrer que les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$  forment une famille libre. Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par identification, on obtient  $\lambda_1 = 0$  puis  $2\lambda_2 = 0$  et enfin  $-\lambda_3 = 0$ . La famille est donc libre et  $\text{rg}(A) = 3$ .

**Exemple 29.54** – Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer le rang de  $M$ .

Par des manipulations sur les lignes,

$$\text{rg}(M) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{2}$$

### 3 – Matrices équivalentes et rang

#### Théorème 29.55 – Changement de bases et matrice $J_r$

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives  $p$  et  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  de rang  $r$ . Alors pour une certaine base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et une certaine base  $\mathcal{C}$  de  $F$  :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = J_r$ , où  $J_r$  est la matrice de taille  $n \times p$  suivante :  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $F$ . Est-il possible d'imposer à ces bases que la matrice de  $u$  y soit  $J_r$  ?

- Pour que les  $p - r$  dernières colonnes de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$  soient nulles, il faut et il suffit que les vecteurs  $e_{r+1}, \dots, e_p$  soient éléments de  $\text{Ker } u$  et linéairement indépendants. Comme  $\text{ker}(u)$  est de dimension  $p - r$  d'après le théorème du rang, nous n'avons qu'à choisir pour famille  $(e_j)_{r+1 \leq j \leq p}$  une base de  $\text{ker}(u)$  et la compléter simplement en une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ .
- Pour que les  $r$  premières colonnes de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$  soient ce qu'on veut, on peut poser  $f_j = u(e_j)$  pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , puis compléter en une base  $\mathcal{C}$  de  $F$ , **MAIS CE N'EST POSSIBLE QUE SI LA FAMILLE  $(f_j)_{1 \leq j \leq r}$  EST LIBRE**. Or la famille  $(e_j)_{1 \leq j \leq r}$  engendre par construction un supplémentaire  $I$  de  $\text{Ker } u$  dans  $E$ , donc  $u|_I$  est un isomorphisme de  $I$  sur  $\text{Im } u$ . La famille  $(f_j)_{1 \leq j \leq r} = (u(e_j))_{1 \leq j \leq r}$  est ainsi libre.

Ces deux points garantissent bien l'existence de deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  pour lesquelles  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = J_r$ . □

#### Définition-Théorème 29.56 –

- **Définition :** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On dit que  $B$  est équivalente à  $A$  s'il existe deux matrices  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  inversibles pour lesquelles  $B = Q^{-1}AP$ .
- **Premier exemple fondamental :** Si  $B$  a été obtenue à partir de  $A$  après une série d'opérations élémentaires, alors  $B$  est équivalente à  $A$ .
- **Deuxième exemple fondamental :** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies non nulles,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux bases de  $F$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . La matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u)$  est équivalente à la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ .

*Démonstration.* Pour le premier exemple fondamental, se souvenir du fait que les opérations élémentaires peuvent être vues comme des multiplications par des matrices inversibles. Le deuxième exemple fondamental n'est qu'une reformulation du théorème de changement de base pour une application linéaire. □

#### Théorème 29.57 – Propriétés de la relation d'équivalence

- (i) **Relation d'équivalence :** La relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est une... relation d'équivalence!
- (ii) **Caractérisation par le rang :** Deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. Cela revient aussi à dire que toute matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  de rang  $r$  est équivalente à  $J_r$ .

*Démonstration.*

- (i) Soient  $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

**Réflexivité :**  $A$  est équivalente à  $A$  car  $I_p$  et  $I_n$  sont inversibles et  $A = I_n^{-1}AI_p$ .

**Symétrie :** Si  $B$  est équivalente à  $A$ , i.e.  $B = Q^{-1}AP$  pour certaines matrices  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors  $P^{-1}$  et  $Q^{-1}$  sont inversibles et  $A = (Q^{-1})^{-1}BP^{-1}$ , donc  $A$  est équivalente à  $B$ .

**Transitivité :** Si  $B$  est équivalente à  $A$  et  $C$  équivalente à  $B$ , i.e.  $B = Q^{-1}AP$  et  $C = Q'^{-1}BP'$  pour certaines matrices  $P, P' \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $Q, Q' \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors  $PP'$  et  $QQ'$  sont inversibles et :

$$C = Q'^{-1}BP' = Q'^{-1}Q^{-1}APP' = (QQ')^{-1}A(PP'), \quad \text{donc } C \text{ est équivalente à } A.$$

- (ii) Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  de rang  $r$ . Notons  $\hat{A}$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$  et  $\mathcal{B}_n$  et  $\mathcal{B}_p$  les bases canoniques respectives de  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathbb{K}^p$ . On rappelle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_n}(\hat{A}) = A$ . Or d'après le théorème 29.55 :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\hat{A}) = J_r$  pour certaines bases  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{K}^p$  et  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{K}^n$ , donc si on pose  $P = P_{\mathcal{B}_p}^{\mathcal{B}}$  et  $Q = P_{\mathcal{B}_n}^{\mathcal{C}}$  :  $J_r = Q^{-1}AP$  par changement de base, donc  $A$  et  $J_r$  sont équivalentes. □

Nous sommes désormais en mesure de démontrer le théorème 29.50, affirmant que le rang d'une matrice est égale au rang de sa transposée.

*Démonstration. du Théorème 29.50* Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Montrons que :  $\text{rg}(A^\top) = \text{rg}(A)$ .

D'après le théorème précédent,  $A$  est équivalente à  $J_r$  pour  $r = \text{rg}(A)$ , donc par simple transposition dans la définition,  $A^\top$  est équivalente à  $J_r^\top$  - attention,  $J_r$  est de taille  $n \times p$  tandis que  $J_r^\top$  est de taille  $p \times n$ . Conclusion :  $\text{rg}(A^\top) = \text{rg}(J_r^\top) = r = \text{rg}(J_r) = \text{rg}(A)$ .  $\square$

**Définition-Théorème 29.58** – Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

(i) **Définition** : On appelle matrice extraite de  $A$  toute matrice de la forme  $\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_{p'}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_{n'} j_1} & \cdots & a_{i_{n'} j_{p'}} \end{pmatrix}$  où  $i_1, \dots, i_{n'}, j_1, \dots, j_{p'}$  satisfont les inégalités  $1 \leq i_1 < \dots < i_{n'} \leq n$  et  $1 \leq j_1 < \dots < j_{p'} \leq p$ .

(ii) **Rang d'une matrice extraite** : Pour toute matrice  $B$  extraite de  $A$  :  $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A)$ .

(iii) **Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites** : Le rang de  $A$  est la taille maximale des matrices inversibles qu'on peut extraire de  $A$ .

*Démonstration.*

(ii) La matrice  $B$  est obtenue à partir de  $A$  par suppression d'un certain nombre de lignes et de colonnes. Notons  $B'$  la matrice intermédiaire obtenue quand on supprime seulement les colonnes. On passe de  $A$  à  $B'$  par une suppression de colonnes, puis de  $B'$  à  $B$  par une suppression de lignes. Le rang d'une matrice étant par définition le rang de la famille de ses colonnes :  $\text{rg}(A) \geq \text{rg}(B') = \text{rg}(B'^\top) \geq \text{rg}(B^\top) = \text{rg}(B)$ .

(iii) Il nous suffit d'établir l'équivalence suivante - avec  $r \in \mathbb{N}^*$  :  $\text{rg}(A) \geq r \iff$  On peut extraire de  $A$  une matrice inversible de taille  $r$ .

- Si on peut extraire de  $A$  une matrice inversible de taille  $r$ , alors d'après (ii) :  $\text{rg}(A) \geq r$ .
- Réciproquement, supposons  $\text{rg}(A) \geq r$ . On peut donc extraire de la famille des colonnes de  $A$  une famille libre de  $r$  vecteurs. Matriciellement, nous pouvons donc extraire de  $A$  une matrice  $B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$  de rang  $r$  par suppression de certaines colonnes. En raisonnant de même, nous pouvons extraire de  $B^\top$  une matrice  $C \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$  de rang  $r$  par suppression de certaines colonnes - i.e. par suppression de certaines lignes de  $B$ . La matrice  $C^\top$  est finalement une matrice extraite de  $A$  inversible de taille  $r$ .

$\square$

**Exemple 29.59** – La matrice  $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$  est extraite de  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$  - on a retenu les lignes 1 et 2 et les colonnes 2 et 4.

**Exemple 29.60** –  $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \geq 3$  car la matrice extraite  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  est inversible - pourquoi, d'ailleurs?