

# 28 | Applications linéaires

Un mathématicien est une machine pour transformer le café en théorème.

Paul Erdős (1913-1996), mathématicien.

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  (si si, je vous assure).

## I – Généralités

$E, F$  et  $G$  désignent des  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconques dans toute cette section.

### 1 – Définitions

**Définition 28.1** – On appelle **application linéaire** de  $E$  dans  $F$ , toute application  $f$  de  $E$  dans  $F$  telle que :

- $\forall (x, y) \in E^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$ ,
- $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$ .

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

#### Exemple 28.2 –

1. L'application identité de  $E$  est une application linéaire :  $\text{Id}_E : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$
2. L'application nulle de  $E$  dans  $F$  est une application linéaire :  $\theta : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{cases}$
3. L'application suivante est une application linéaire :  $\phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 4x \end{cases}$

#### Proposition 28.3

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  alors  $f(0_E) = 0_F$ .

*Démonstration.* Toute application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est un morphisme de groupes additifs, donc :  $f(0_E) = 0_F$ .  $\square$

**Remarque 28.4** – On peut utiliser cette propriété pour montrer rapidement qu'une application **N'EST PAS** une application linéaire, en vérifiant simplement que  $f(0_E) \neq 0_F$ .

#### Proposition 28.5

$f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$  si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

*Démonstration.*

( $\implies$ ) On suppose  $f$  est une application linéaire. Soient  $(x, y) \in E^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors, en utilisant successivement les points 1 et 2 de la définition d'une application linéaire, on a :

$$f(\lambda x + y) = f(\lambda x) + f(y) = \lambda f(x) + f(y)$$

( $\impliedby$ ) On suppose que pour tout  $(x, y) \in E^2$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a  $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ . Alors, en prenant successivement  $\lambda = 1$  et  $y = 0_E$  (et en utilisant le fait que  $f(0_E) = 0_F$ ), on obtient respectivement  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  et  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ .  $\square$

**Remarque 28.6** – Plus généralement (récurrence...), si  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire, alors pour tous scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  et pour tous vecteurs  $x_1, \dots, x_n \in E$ ,

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$



**Méthode 28.7** – Pour montrer qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est linéaire

On prouve que pour tout  $(x, y) \in E^2$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

**Exemple 28.8** – Démontrer que l'application suivante est une application linéaire.

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + Y) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_2 + y_2) \\ 4(\lambda x_1 + y_1) - 2(\lambda x_2 + y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(2x_1 - x_2) + 2y_1 - y_2 \\ \lambda(4x_1 - 2x_2) + 4y_1 - 2y_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 \\ 4y_1 - 2y_2 \end{pmatrix} = \lambda f(X) + f(Y). \end{aligned}$$

L'application  $f$  est donc bien linéaire.

**Exemple 28.9** – Montrer que l'application  $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{cases}$  est une application linéaire.

Soit  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  et  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3(\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_2 + y_2) \\ 2(\lambda x_2 + y_2) \\ \lambda x_1 + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(3x_1 - x_2) + 3y_1 - y_2 \\ \lambda(2x_2) + 2y_2 \\ \lambda(x_1) + y_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y_1 - y_2 \\ 2y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda f(x) + f(y). \end{aligned}$$

L'application  $f$  est donc bien linéaire.

**Exemple 28.10** – Montrer que l'application  $P \mapsto P'$  est une application linéaire de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathbb{K}[X]$ .

En effet, soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes, et  $\lambda$  un réel,

$$(\lambda P + Q)'(X) = \lambda P'(X) + Q'(X).$$

D'où le résultat.

**Exemple 28.11** – Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ , montrons que l'application

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{cases}$$

est une application linéaire.

Soient  $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f(\lambda X + Y) = M(\lambda X + Y) = M\lambda X + MY = \lambda MX + MY = \lambda f(X) + f(Y).$$

Ainsi l'application  $f$  est bien linéaire.

**Exemple 28.12** – Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?

1. La fonction  $\varphi_1$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par :  $\varphi_1((x, y)) = x + y + 1$ .  
 $\varphi_1((0, 0)) = 1 \neq 0$ , donc  $\varphi_1$  n'est pas une application linéaire.
2. La fonction  $\varphi_2$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par :  $\varphi_2((x, y)) = x + y$ .  
 Soit  $(x, y)$  et  $(x', y')$  deux éléments de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\lambda$  un réel.

$$\varphi_2(\lambda(x, y) + (x', y')) = \varphi_2((\lambda x + x', \lambda y + y')) = \lambda x + x' + \lambda y + y' = \lambda \varphi_2((x, y)) + \varphi_2((x', y')).$$

Donc  $\varphi_2$  est une application linéaire.

3. La fonction  $\varphi_3$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par :  $\varphi_3((x, y)) = x \times y$ .  
 $\varphi_3((0, 1) + (1, 0)) = \varphi_3((1, 1)) = 1 \neq 0 + 0 = \varphi_3((0, 1)) + \varphi_3((1, 0))$ . Donc  $\varphi_3$  n'est pas une application linéaire.

4.  $\varphi_4 : \begin{matrix} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \longmapsto & 2x + 3y + 1 \end{matrix}$  n'est pas linéaire car  $\varphi_4(0) \neq 0$ .

5.  $\varphi_5 : \begin{matrix} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + 3y - z, 5x + 6y - 4z) \end{matrix}$  est linéaire.

**Remarque 28.13** – De manière générale, une application  $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^p$  telle que chaque composante de  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  est définie comme une combinaison linéaire de  $x_1, \dots, x_n$  est une application linéaire.

6.  $\varphi_6 : \begin{matrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{matrix}$  est linéaire si l'on considère  $\mathbb{C}$  comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, mais n'est pas linéaire si l'on considère  $\mathbb{C}$  comme  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On dit qu'elle est  $\mathbb{R}$ -linéaire mais pas  $\mathbb{C}$ -linéaire.

7.  $\varphi_7 : \begin{matrix} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{matrix}$  est linéaire.

8. Pour  $n, p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varphi_8 : \begin{matrix} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M^T \end{matrix}$  est linéaire.

**Proposition 28.14**

L'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ , noté  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace vectoriel.

*Démonstration.* On va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de  $F^E$ .

- L'application nulle est linéaire, donc  $\mathcal{L}(E, F)$  n'est pas vide.
- On a clairement  $\mathcal{L}(E, F) \subset F^E$ .
- Soit  $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Montrons que  $\lambda f + g \in \mathcal{L}(E, F)$  i.e. montrons que c'est une application linéaire. Soit  $(x, y) \in E^2$ , et  $\mu \in \mathbb{K}$ . On a :

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(\mu x + y) &= \lambda f(\mu x + y) + g(\mu x + y) = \lambda \mu f(x) + \lambda f(y) + \mu g(x) + g(y) \\ &= \mu(\lambda f(x) + g(x)) + \lambda f(y) + g(y) = \mu(\lambda f + g)(x) + (\lambda f + g)(y) \end{aligned}$$

Donc  $(\lambda f + g) \in \mathcal{L}(E, F)$ , et  $\mathcal{L}(E, F)$  est stable par combinaison linéaire.

Donc c'est un sous-espace vectoriel de  $F^E$ . Donc c'est un espace vectoriel. □

## 2 – Cas particuliers

**Définition 28.15** – On appelle **endomorphisme** de  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans lui-même. L'ensemble des endomorphismes de  $E$  est noté  $\mathcal{L}(E)$ .

**Exemple 28.16** –

1. L'application identité sur  $E$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. L'application  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  qui à  $(x, y)$  associe  $(y, x)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .
3. L'application  $D : f \longmapsto f'$  définie sur  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  n'est pas un endomorphisme (car  $f'$  n'est pas forcément dérivable).
4. L'application  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  qui à  $x$  associe  $x^2$  n'est pas un endomorphisme car elle n'est pas linéaire.

**Exemple 28.17** – L'application  $P \mapsto P(X^2) + 2P'(1)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .

*Démonstration.* L'application  $P \mapsto P(X^2)$  est linéaire. Ensuite,  $P \mapsto P'$  et  $P \mapsto P(1)$  sont linéaires, donc  $P \mapsto P'(1)$  aussi par composition. Par combinaison linéaire,  $f$  est comme voulu un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .  $\square$

**Remarque 28.18** – Pour montrer qu'une application  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , on doit donc montrer que  $f$  est une application linéaire ET que  $f$  est définie et à valeurs dans  $E$ .

**Définition 28.19** – On appelle **forme linéaire** sur  $E$  toute application linéaire de  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

**Exemple 28.20** –

1. Soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(a)$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Soit  $a \leq b$  deux réels. L'application  $I : C^0([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  qui à une fonction  $f$  associe  $\int_a^b f(t) dt$  est une forme linéaire sur  $C^0([a, b], \mathbb{R})$ .

**Définition 28.21** –

1. Une application linéaire **bijjective** entre deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $E$  et  $F$  est appelée **isomorphisme**.
2. Une application linéaire bijective d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  dans lui-même est appelée **automorphisme**. C'est donc à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.

L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel  $E$  est appelé **groupe linéaire de  $E$**  et se note  $GL(E)$ .

**Remarque 28.22** – Le groupe linéaire ... est un groupe! En effet,  $(\mathcal{L}(E), \circ)$  est un magma (un ensemble muni d'une loi de composition interne) d'après la Proposition 28.27 et  $GL(E)$  correspond à l'ensemble des éléments inversibles de ce magma.

**Exemple 28.23** –

1.  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, 3x + 2y) \end{matrix}$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .
  2. Pour  $\lambda \neq 0$  dans  $\mathbb{K}$ , l'application  $\lambda \cdot \text{Id}_E : \begin{matrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{matrix}$  est un automorphisme, dont la réciproque est  $\frac{1}{\lambda} \text{Id}_E$ .
- Ces applications sont appelées **homothéties** de  $E$ .

**Définition 28.24** – On dit que  $E$  et  $F$  sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ .

**Exemple 28.25** – Montrer que l'application  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(0), P''(0)) \end{cases}$  est un isomorphisme. Que peut-on en déduire?

Commençons par montrer que  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(0), (\lambda P + Q)'(0), (\lambda P + Q)''(0)) = (\lambda P(0) + Q(0), \lambda P'(0) + Q'(0), \lambda P''(0) + Q''(0)) \\ &= (\lambda P(0), \lambda P'(0), \lambda P''(0)) + (Q(0), Q'(0), Q''(0)) = \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

L'application  $f$  est donc bien linéaire. Il reste à montrer qu'elle est bijective.

Soit  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ , on cherche un unique  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  tel que  $f(P) = (\alpha, \beta, \gamma)$ .

$P \in \mathbb{R}_2[X]$  donc il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que  $P(X) = aX^2 + bX + c$ . On a alors  $f(P) = (c, b, 2a)$ . L'égalité  $f(P) = (\alpha, \beta, \gamma)$  se traduit donc en 3 égalités :

$$c = \alpha, \quad b = \beta, \quad 2a = \gamma.$$

On obtient donc un unique polynôme  $P$  s'écrivant :

$$P(X) = \frac{\gamma}{2} X^2 + \beta X + \alpha.$$

L'application  $f$  est bien bijective, comme elle est linéaire, c'est un isomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  vers  $\mathbb{R}^3$ .

On peut en déduire que les espaces vectoriels  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $\mathbb{R}^3$  sont isomorphes.

### 3 – Composition des applications linéaires

**Proposition 28.26**

Si  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application linéaire de  $F$  dans  $G$  alors  $g \circ f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $G$ .

*Démonstration.* Soit  $(x, y) \in E^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a :

$$g \circ f(\lambda x + y) = g(\lambda f(x) + f(y)) = \lambda g \circ f(x) + g \circ f(y).$$

D'où la linéarité de  $g \circ f$ . □

**Proposition 28.27 – Composée d'isomorphismes**

Si  $f$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ , et  $g$  est un isomorphisme de  $F$  dans  $G$ , alors  $g \circ f$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $G$ , et on a  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

*Démonstration.* On commence par remarquer que la composée de deux applications linéaires est une application linéaire. Soit  $z \in G$  et  $x \in E$ . Puisque  $g$  et  $f$  sont des bijections,

$$g \circ f(x) = z \iff g(f(x)) = z \iff f(x) = g^{-1}(z) \iff x = f^{-1}(g^{-1}(z)) \iff x = f^{-1} \circ g^{-1}(z).$$

Donc tout élément  $z \in G$  admet un unique antécédent  $x \in E$  par  $g \circ f$ , qui est donc une bijection. Donc  $g \circ f$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $G$ . La relation précédente nous donne de plus que  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ . □

Observons à présent que pour toutes  $f, f' \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g, g' \in \mathcal{L}(F, G)$  :

$$g \circ (f + f') = (g \circ f) + (g \circ f') \quad \text{et} \quad (g + g') \circ f = (g \circ f) + (g' \circ f).$$

Attention cependant ! La relation  $(g + g') \circ f = (g \circ f) + (g' \circ f)$  est vraie en toute généralité sans linéarité alors que la relation  $g \circ (f + f') = (g \circ f) + (g \circ f')$  requiert à tout prix la linéarité de  $g$ . Faites l'effort de vous en convaincre.

L'énoncé qui suit repose entièrement sur l'idée que pour tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , la composée de deux endomorphismes de  $E$  est encore un endomorphisme de  $E$ . En d'autres termes, la composition est une **LOI INTERNE** sur  $\mathcal{L}(E)$ .

**Théorème 28.28 – Anneau  $\mathcal{L}(E)$**

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  est un anneau, non commutatif en général, avec  $1_{\mathcal{L}(E)} = \text{Id}_E$ .

*Démonstration.* Pour commencer,  $\mathcal{L}(E)$  est un groupe commutatif pour l'addition en tant que sous-espace vectoriel de  $E^E$ . Ensuite la composition est une loi de composition interne sur  $\mathcal{L}(E)$  car la composée de deux applications linéaires est linéaire. Cette loi est associative et admet  $\text{Id}_E$ , qui est linéaire, pour élément neutre. Enfin, d'après le théorème précédent, la composition est distributive sur l'addition. □



**ATTENTION !** La loi produit de  $\mathcal{L}(E)$  est la composition ! Pour tous  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^n$  désigne donc  $\text{Id}_E$  si  $n = 0$  et  $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$  si  $n \geq 1$ .

**Remarque 28.29** – Comme dans tout anneau, deux formules importantes sont vraies dans  $\mathcal{L}(E)$  :

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} \quad (\text{formule du binôme}) \quad \text{et} \quad f^n - g^n = (f - g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-k-1}$$

pour tous  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  **QUI COMMUTENT**. Il est essentiel que  $f$  et  $g$  commutent. Pour montrer que  $(f + g) \circ (f - g) = f^2 - g^2$  par exemple, il faut pouvoir simplifier  $f \circ g$  avec  $g \circ f$ .

**Exemple 28.30** – Les endomorphismes  $P \xrightarrow{D} P'$  et  $P \xrightarrow{M} XP$  de  $\mathbb{K}[X]$  **NE** commutent **PAS**, l'anneau  $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$  **N**'est donc **PAS** commutatif.

*Démonstration.* Par exemple :  $D \circ M(X) = (X^2)' = 2X$  alors que  $M \circ D(X) = X \times X' = X$ . □

**Définition 28.31** – Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $f$  est **nilpotent** si  $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}^*$ . Le plus petit de ces entiers  $k$  est alors appelé l'indice de nilpotence de  $f$ .

**Exemple 28.32** – Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'endomorphisme  $P \xrightarrow{D} P'$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  est nilpotent d'indice  $n + 1$ .

*Démonstration.* Pour tout  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  :  $P^{(n+1)} = 0$ , donc  $D^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])}$ , donc  $D$  est nilpotent d'indice inférieur ou égal à  $n + 1$ . L'égalité  $(X^n)^{(n)} = n!$  montre cependant que  $D^n \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])}$ , donc  $D$  est d'indice  $n + 1$  exactement. □

## II – Etude des applications linéaires

### 1 – Noyau

**Définition 28.33** – Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  vers  $F$ .

On appelle **noyau** de  $f$  l'ensemble des éléments de  $E$  dont l'image par  $f$  est le vecteur nul de  $F$ . Ce sous-ensemble de  $E$  est noté  $\text{Ker}(f)$ , et on a donc :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

**Remarque 28.34** – Comme  $f$  est linéaire, on sait que  $f(0_E) = 0_F$  donc  $0_E \in \text{ker}(f)$  et  $\text{ker}(f) \neq \emptyset$ .

**Exemple 28.35** – Déterminer le noyau de l'application identité de  $E$  et de l'application nulle de  $E$  dans  $F$  :

$$\text{Id}_E : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{cases} \qquad \theta : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{cases}$$

- Par définition, on a :  $\text{Ker}(\text{Id}_E) = \{x \in E \mid \text{Id}_E(x) = 0_E\} = \{x \in E \mid x = 0_E\} = \{0_E\}$ .
- Par définition, on a :  $\text{Ker}(\theta) = \{x \in E \mid \theta(x) = 0_F\} = \{x \in E \mid 0_F = 0_F\} = E$ .



**Méthode 28.36** – Pour déterminer le noyau d'une application linéaire

On résout l'équation  $f(x) = 0_F$  d'inconnue  $x \in E$ .

**Exemple 28.37** – Soit l'application linéaire  $f$  définie par :  $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Déterminons le noyau de  $f$ .

On cherche  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  tel que  $f(X) = 0_{2,1}$ . On a :

$$f(X) = 0_{2,1} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \iff x_1 + x_2 = 0 \quad x_1 = -x_2.$$

Ainsi les solutions du système  $f(X) = 0_{2,1}$  sont de la forme  $\begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\text{ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

**Exemple 28.38** – Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes.

1.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , qui à  $(x, y)$  associe  $(x - y, y - x)$ .

Soit  $(x, y) \in \ker(f)$  alors  $f((x, y)) = (0, 0)$ . On a donc :

$$(x - y, y - x) = (0, 0) \iff x - y = 0 \text{ et } y - x = 0 \iff x = y.$$

Ainsi  $\ker(f) = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ .

2.  $D: \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , qui à  $f$  associe  $f'$ .

Soit  $f \in \ker(D)$  alors  $D(f) = 0$  soit  $f' = 0$ . La fonction  $f$  est donc une fonction constante i.e. il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C$ .

On a donc  $\ker(D) = \{\text{fonctions constantes}\}$ .

3.  $f: (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - 2y + 4z, 3x - z) \in \mathbb{R}^2$ .

Soit  $(x, y, z) \in \ker(f)$ , on a  $f((x, y, z)) = (0, 0)$  soit :

$$(x - 2y + 4z, 3x - z) = (0, 0) \iff \begin{cases} x - 2y + 4z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y = x + 4z \\ z = 3x \end{cases}$$

Soit  $y = \frac{13}{2}x$  et  $z = 3x$ .

Ainsi  $\ker(f) = \left\{ \left( x, \frac{13}{2}x, 3x \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \left( 1, \frac{13}{2}, 3 \right) \right) = \text{Vect}((2, 13, 6))$ .

4. Soit  $a \in \mathbb{R}$ , on considère l'application linéaire,  $\phi: P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(a) \in \mathbb{R}$ .

Soit  $P \in \ker(\phi)$  alors  $\phi(P) = 0$  soit  $P(a) = 0$ . Alors  $X - a$  divise  $P$ , soit il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(X) = (X - a)Q(X)$ .

Ainsi

$$\ker(\phi) = \{(X - a)Q(X) \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}.$$

5. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f, g$  deux fonctions continues sur  $I$ . On pose

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ h & \longmapsto & h' + ah \end{array}, \quad \text{et} \quad \psi: \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^2(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ h & \longmapsto & h'' + ah' + bh \end{array}$$

On peut facilement vérifier que ces deux applications sont linéaires.

$\ker(\varphi)$  est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène  $y' + a(t)y = 0$  et  $\ker(\psi)$  est l'ensemble des solutions de  $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ .

Ces ensembles sont donc des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

### Proposition 28.39

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $\ker(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

*Démonstration.* Montrons que  $\ker(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Rappelons que  $\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$ .

- On a clairement  $\ker(f) \subset E$ .
- $f(0_E) = 0_F$  donc  $0_E \in \ker(f)$ . Ainsi  $\ker(f) \neq \emptyset$ .
- Soient  $x \in \ker(f)$  et  $y \in \ker(f)$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :  $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$  par linéarité de  $f$ .  
Or  $f(x) = 0_F$  et  $f(y) = 0_F$  car  $x, y \in \ker(f)$  donc  $f(\lambda x + y) = 0$ . Ainsi  $\lambda x + y \in \ker(f)$ .

Nous venons donc de démontrer que  $\ker(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . □

### Proposition 28.40 – Noyau et injectivité

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels, et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . La fonction  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ .

*Démonstration.* Raisonnons par double implication.

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $f$  est injective.

Alors  $0_F$  a au plus un antécédent par  $f$ , donc  $\ker(f)$  a au plus un élément. Or  $0_E \in \text{Ker}(f)$  puisque  $f$  est linéaire.

Donc  $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Réciproquement, supposons que  $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ .

Soit  $(x, y) \in E^2$ , supposons que  $f(x) = f(y)$ . Alors par linéarité,  $f(x - y) = 0_F$ , et  $x - y \in \text{Ker}(f)$ , donc  $x - y = 0_E$  et  $x = y$ . Donc  $f$  est injective.  $\square$

**Exemple 28.41** – Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  défini par :  $M \mapsto AM$ .

Vérifier que  $A$  est inversible puis montrer que  $f$  est injectif.

Comme  $A$  est une matrice de taille 2, on calcule  $1 \times 1 - 2 \times 1 \neq 0$  donc  $A$  est inversible.

Il nous reste à déterminer  $\text{ker}(f)$  pour étudier l'injectivité de  $f$ . Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on a les équivalences suivantes :

$$M \in \text{ker}(f) \iff f(M) = 0_2 \iff AM = 0_2 \iff A^{-1}AM = A^{-1}0_2 \text{ car } A \text{ inversible} \iff M = 0_2.$$

D'où  $\text{ker}(f) = \{0_2\}$  et  $f$  est injective.

## 2 – Image

**Définition 28.42** – Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  vers  $F$ . On appelle **image de  $f$**  l'ensemble des images par  $f$  des éléments de  $E$ .

Ce sous-ensemble de  $F$  est noté  $\text{Im}(f)$ , et on a :

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}$$

ce que l'on peut aussi écrire :  $\text{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$ .

**Remarque 28.43** – Comme  $f(0_E) = 0_F$  on a  $0_F \in \text{Im}(f)$  et  $\text{Im}(f) \neq \emptyset$ .

**Exemple 28.44** – Déterminer l'image de l'application identité de  $E$  et de l'application nulle de  $E$  dans  $F$  :

$$\text{Id}_E : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{cases} \qquad \theta : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{cases}$$

- Par définition, on a :  $\text{Im}(\text{Id}_E) = \{\text{Id}_E(x) \mid x \in E\} = \{x \mid x \in E\} = E$ .
- Par définition, on a :  $\text{Im}(\theta) = \{\theta(x) \mid x \in E\} = \{0 \mid x \in E\} = \{0_F\}$ .

**Exemple 28.45** – Soit l'application linéaire  $f$  définie par :  $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$

Le vecteur  $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  appartient-il à l'image de  $f$ ?

Autrement dit le vecteur  $y = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  possède-t-il un ou des antécédent(s) par  $f$ ? On cherche donc  $x \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  tel que  $y = f(x)$ . Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_2 - 3x_3 = -5 \\ x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \\ \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_2 - 3x_3 = -5 \\ 5x_3 = 15 \end{cases} \begin{matrix} L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{matrix} \\ \iff x_3 = 3, \quad x_2 = \frac{-5 + 3 \times 3}{2} = 2, \quad x_1 = 5 + 2 - 2 \times 3 = 1.$$

Ainsi le vecteur  $y = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  possède un unique antécédent par  $f$  qui est  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et donc  $y \in \text{Im}(f)$ .

**Exemple 28.46** – Déterminer l'image des applications linéaires suivantes :

$$f: \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{et} \quad g: \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 5x_2 - 5x_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

• Soit  $y \in \text{Im}(f)$  et  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ . On a :

$$y = f(x) \iff y = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \iff y = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y \in \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Ainsi

$$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

• Soit  $y \in \text{Im}(g)$  et  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ . On a :

$$y = g(x) \iff y = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 5x_2 - 5x_1 \end{pmatrix} \iff y = \begin{pmatrix} x_1 \\ -5x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ 5x_2 \end{pmatrix} \iff y = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \iff y = (x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \iff y \in \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$$

Ainsi,

$$\text{Im}(g) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right).$$

**Exemple 28.47** – Soit  $g$  l'application linéaire définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par  $g((x, y)) = x + y$ . Montrer que  $\text{Im}(g) = \mathbb{R}$ .  
 Il est immédiat que  $\text{Im}(g) \subset \mathbb{R}$ . Réciproquement, soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x = g((x, 0)) \in \text{Im}(g)$ .  
 On a donc montré par double inclusion que :  $\text{Im}(g) = \mathbb{R}$ .

**Proposition 28.48**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

*Démonstration.* Montrons que  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ . Rappelons que :  $\text{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$ .

- On a clairement  $\text{Im}(f) \subset F$ .
- $0_F = f(0_E)$  donc  $0_F \in \text{Im}(f)$ . Ainsi  $\text{Im}(f) \neq \emptyset$ .
- Soient  $y \in \text{Im}(f)$  et  $\tilde{y} \in \text{Im}(f)$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on souhaite montrer que  $\lambda y + \tilde{y} \in \text{Im}(f)$ .  
 Comme  $y \in \text{Im}(f)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ , de même comme  $\tilde{y} \in \text{Im}(f)$ , il existe  $\tilde{x} \in E$  tel que  $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ . On a donc :

$$\lambda y + \tilde{y} = \lambda f(x) + f(\tilde{x}) = f(\lambda x) + f(\tilde{x}) = f(\lambda x + \tilde{x}), \quad \text{par linéarité de } f.$$

Or  $E$  est un espace vectoriel donc  $z = \lambda x + \tilde{x} \in E$ . Ainsi  $\lambda y + \tilde{y} = f(z)$  avec  $z \in E$ , c'est-à-dire  $\lambda y + \tilde{y} \in \text{Im}(f)$ .

Nous venons donc de démontrer que  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ . □

**Remarque 28.49** – Les Propositions 28.39 et 28.48 nous donnent une nouvelle méthode pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel : on peut montrer qu'il est le noyau ou l'image d'une application linéaire.

**Exemple 28.50** – Montrer que  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - 3z = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

On a  $F = \ker(f)$  avec  $f: (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x + 2y - 3z \in \mathbb{R}$  qui est linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition 28.51**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $E$  admet une famille génératrice  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  alors :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

*Démonstration.* Montrons le résultat par double inclusion.

( $\supset$ ) Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f(x_i) \in \text{Im}(f)$ . Comme  $\text{Im}(f)$  est un espace vectoriel, on en déduit que  $\text{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_n)) \subset \text{Im}(f)$ .

( $\subset$ ) Soit  $y \in \text{Im}(f)$  alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . La famille  $(x_1, \dots, x_n)$  étant génératrice de  $E$ , il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ . Ainsi :

$$y = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad \text{par linéarité de } f.$$

Soit  $y \in \text{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_n))$  et donc  $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_n))$ . □

**Remarque 28.52** – Cette méthode permet facilement de déterminer l’image d’une application linéaire  $f$  mais elle nécessite de connaître une famille génératrice de  $E$ , pour cela on peut penser aux bases canoniques.

**Exemple 28.53** – Déterminer l’image de l’application linéaire

$$f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

La famille  $((1, 0), (0, 1))$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ , c’est donc en particulier une famille génératrice. On a  $f((1, 0)) = (1, 2)$  et  $f((0, 1)) = (1, 2)$ . Ainsi  $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 2))$ .

**Exemple 28.54** – Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l’image de la dérivation  $D$  des polynômes sur  $\mathbb{K}_n[X]$  est  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ .

*Démonstration.* Comme  $(1, X, \dots, X^n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$  :

$$\text{Im } D = \text{Vect}(D(1), D(X), \dots, D(X^n)) = \text{Vect}(0, 1, 2X, \dots, nX^{n-1}) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^{n-1}) = \mathbb{K}_{n-1}[X].$$

□

**Proposition 28.55 – Image et surjectivité**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels, et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . La fonction  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(f) = F$ .

*Démonstration.* Raisonnons par double implication.

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $f$  est surjective.

Alors tout élément de  $F$  a un antécédent par  $f$ , donc  $F \subset \text{Im}(f)$ . L’inclusion réciproque étant immédiate, on a  $\text{Im}(f) = F$ .

( $\Leftarrow$ ) Réciproquement, supposons que  $\text{Im}(f) = F$ .

Soit  $x \in F$ . Alors,  $x \in \text{Im}(f)$ , et donc  $x$  a un antécédent par  $f$ . Donc  $f$  est surjective. □

**Exemple 28.56** – On considère l’application linéaire  $f : P \rightarrow P'$  définie de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$ . Déterminer son noyau et son image. Est-elle injective? surjective?

- On commence par chercher le noyau. Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$ ,

$$P \in \text{Ker}(f) \iff P' = 0 \iff \deg(P) = 0 \text{ ou } -\infty \iff P \in \mathbb{R}_0[X].$$

Donc  $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]$ . Comme  $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$ , l’application  $f$  n’est pas injective.

- Cherchons à présent l’image. Il est direct que  $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}[X]$ .

Réciproquement, soit  $Q(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ . On pose  $P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k+1} X^{k+1}$ , alors  $f(P) = Q$ , et  $Q \in \text{Im}(f)$ . Donc  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}[X]$ , et l’application  $f$  est surjective.

### 3 – Détermination d'une application linéaire

Pour connaître une application en général, on n'a pas trop d'autre choix que de connaître l'ensemble de ses valeurs point par point. Pour une application linéaire en revanche, ce lot considérable d'informations peut être résumé par un nombre restreint de valeurs stratégiques.

On connaît par exemple parfaitement l'application  $(x, y, z) \mapsto (2x + y + z, 3x - z)$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  **SI ON SAIT QU'ELLE EST LINÉAIRE** et si on sait que :  $f(1, 0, 0) = (2, 3)$ ,  $f(0, 1, 0) = (1, 0)$  et  $f(0, 0, 1) = (1, -1)$ .

En effet, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  :

$$f(x, y, z) = f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) = xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = x(2, 3) + y(1, 0) + z(1, -1) = (2x + y + z, 3x - z)$$

Le théorème qui suit, fondamental, généralise ce principe.

#### Théorème 28.57 – Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels un espace vectoriel. On suppose que  $E$  possède une base  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$  et on considère  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $F$ .

Alors, il existe une unique application linéaire  $u : E \rightarrow F$  telle que,

$$\forall i \in I, \quad u(e_i) = f_i$$

Cette application est définie de la manière suivante : Pour tout  $x \in E$ , en notant  $(x_i)_{i \in I}$  les coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ ,

$$u(x) = \sum_{i \in I} x_i f_i$$

Pour connaître/définir une application linéaire complètement, il suffit de connaître/définir les valeurs qu'elle prend sur une base de l'espace de départ.

*Démonstration.* Montrons que l'application  $u$  ainsi définie est linéaire.

Soient  $x, y \in E$ . Alors, il existe  $(x_i)_{i \in I} \in E^I$  et  $(y_i)_{i \in I} \in E^I$ , tels que

$$x = \sum_{i \in I} x_i e_i, \quad y = \sum_{i \in I} y_i e_i.$$

Soient  $\lambda, \in \mathbb{K}$ . Alors,

$$\lambda x + y = \lambda \sum_{i \in I} x_i e_i + \sum_{i \in I} y_i e_i = \sum_{i \in I} (\lambda x_i + y_i) e_i$$

Ainsi,  $\lambda x + y$  a pour coordonnées dans la base  $(e_i)_{i \in I} : (\lambda x_i + y_i)_{i \in I}$ . Donc

$$\begin{aligned} u(\lambda x + y) &= \sum_{i \in I} (\lambda x_i + y_i) f_i = \sum_{i \in I} \lambda x_i f_i + \sum_{i \in I} y_i f_i \\ &= \lambda \sum_{i \in I} x_i f_i + \sum_{i \in I} y_i f_i = \lambda u(x) + u(y) \end{aligned}$$

Donc  $u$  est linéaire. Montrons que  $u$  est unique. Soit  $v \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $\forall i \in I, v(e_i) = f_i$ . Montrons que  $v = u$ . Alors, pour tout  $x \in E$ , en notant  $(x_i)_{i \in I}$  les coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ , on a  $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ .

Par linéarité de  $v$ , on a donc que  $v(x) = \sum_{i \in I} x_i v(e_i) = \sum_{i \in I} x_i f_i = u(x)$ .

Donc pour tout  $x \in E, u(x) = v(x)$ , d'où  $v = u$ . □

#### Corollaire 28.58 – Deux applications linéaires qui coïncident sur une base de $E$ sont égales

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $u$  et  $v$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

Si pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_k) = v(e_k)$ , alors les applications  $u$  et  $v$  sont égales ( $\forall x \in E, u(x) = v(x)$ ).

Dans le théorème qui suit, on ne définit plus les applications linéaires par l'image d'une base mais par leurs restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires - cela dit l'idée est la même.

**Théorème 28.59 – Détermination d'une application linéaire sur une somme directe**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$  et  $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ ,  $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ . Il existe une et une seule application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  pour laquelle :  $u|_{E_1} = u_1$  et  $u|_{E_2} = u_2$ .

En résumé, tout élément de  $\mathcal{L}(E, F)$  est une sorte de concaténation ou de recollement d'un élément de  $\mathcal{L}(E_1, F)$  et d'un élément de  $\mathcal{L}(E_2, F)$ .

*Démonstration.* Par hypothèse  $E = E_1 \oplus E_2$ , donc tout vecteur de  $E$  est la somme, d'une unique manière, d'un vecteur de  $E_1$  et d'un vecteur de  $E_2$ .

**Analyse :** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On suppose que  $u|_{E_1} = u_1$  et  $u|_{E_2} = u_2$ . Pour tout  $x = x_1 + x_2 \in E$  avec  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$  :  $u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$ . Cette expression qui ne dépend que de  $u_1, u_2$  et  $x$  montre l'unicité cherchée.

**Synthèse :** Pour tout  $x = x_1 + x_2 \in E$  avec  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$ , posons  $u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$ . On définit ainsi une application de  $E$  dans  $F$ .

- Pour tout  $x_1 \in E_1$  :  $u(x_1) = u(x_1 + 0_E) = u_1(x_1) + u_2(0_E) = u_1(x_1)$ , donc  $u|_{E_1} = u_1$ , et de même  $u|_{E_2} = u_2$ .
- Pour la linéarité de  $u$ , soient  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2 \in E$  avec  $x_1, y_1 \in E_1$  et  $x_2, y_2 \in E_2$ . Aussitôt  $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2)$  avec  $\lambda x_1 + y_1 \in E_1$  et  $\lambda x_2 + y_2 \in E_2$ , donc :

$$\begin{aligned} u(\lambda x + y) &= u_1(\lambda x_1 + y_1) + u_2(\lambda x_2 + y_2) = (\lambda u_1(x_1) + u_1(y_1)) + (\lambda u_2(x_2) + u_2(y_2)) \\ &= \lambda(u_1(x_1) + u_2(x_2)) + (u_1(y_1) + u_2(y_2)) = \lambda u(x) + u(y) \end{aligned}$$

□

**Exemple 28.60 –** Montrer qu'il existe une unique application linéaire  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_4[X]$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$  telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \varphi(P) = P' \quad \text{et} \quad \varphi(X^4) = X$$

et la déterminer.

*Démonstration.* C'est bien connu :  $\mathbb{R}_4[X] = \mathbb{R}_3[X] \oplus \text{Vect}(X^4)$  (on peut le voir de plein de manière différente, le plus simple étant de montrer que l'intersection est réduite au polynôme nul et de considérer la somme des dimensions...). D'après le théorème précédent, il existe une et une seule application linéaire  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_4[X]$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$  pour laquelle pour tout  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  :  $\varphi(P) = P'$  et  $\varphi(X^4) = X$ . Cette application est obtenue à partir de l'application linéaire  $P \mapsto P'$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$  et de l'unique application linéaire qui envoie  $X^4$  sur  $X$  de  $\text{Vect}(X^4)$  dans  $\text{Vect}(X)$ . Concrètement, pour tout  $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in \mathbb{R}_4[X]$  :  $\varphi(P) = aX + (3bX^2 + 2cX + d) = 3bX^2 + (a+2c)X + d$ .

□

### III – Applications linéaires en dimension finie

#### 1 – Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Le résultat suivant a déjà été énoncé (sous une autre forme) précédemment, mais il n'est pas inutile de le rappeler ici.

**Proposition 28.61 – Image d'une famille génératrice par une application linéaire**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev. Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  vers  $F$ . Soit  $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . Alors,

$$f(\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)) = \text{Vect}(f(v_1), \dots, f(v_n)).$$

*Démonstration.* Soit  $y \in F$ , alors

$$\begin{aligned} y \in \text{Vect}(f(v_1), \dots, f(v_n)) &\iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n, \quad y = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \\ &\iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n, \quad y = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \\ &\iff \exists x \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n), \quad y = f(x) \\ &\iff y \in f(\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)) \end{aligned}$$

D'où  $f(\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)) = \text{Vect}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ .

□

**Corollaire 28.62 – Famille génératrice d'une image**

Sous ces hypothèses, si  $A$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  et si  $(v_1, \dots, v_n)$  est une famille génératrice de  $A$ , alors  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est une famille génératrice de  $f(A)$ .

**Proposition 28.63 – Conservation des propriétés des familles par des applications linéaires**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev. Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  vers  $F$ . Soit  $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . On pose  $\mathcal{G} = (f(v_1), \dots, f(v_n))$ .

1. Si  $f$  est injective et si  $\mathcal{F}$  est libre, alors  $\mathcal{G}$  est libre.
2. Si  $f$  est surjective et si  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $E$ , alors  $\mathcal{G}$  est génératrice de  $F$ .
3. Si  $f$  est bijective et si  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$ , alors  $\mathcal{G}$  est une base de  $F$ .

*Démonstration.*

1. Si  $f$  injective et  $\mathcal{F}$  libre.

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tels que  $\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0_F$ . Alors  $f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0_F$ . Comme  $f$  est injective,  $\ker(f) = \{0_E\}$  donc  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E$ . Comme  $\mathcal{F}$  est libre, on en déduit que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_E$ . Donc  $\mathcal{G}$  est libre.

2. Si  $f$  est surjective et  $\mathcal{F}$  est génératrice.

Soit  $y \in F$ . Comme  $f$  est surjective, il existe  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$ .  $\mathcal{F}$  est génératrice donc il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tels que  $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ . Alors  $y = f(x) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$ . Donc  $\mathcal{G}$  est génératrice.

3. On combine 1. et 2.

□

**Corollaire 28.64 – Injectivité, surjectivité et inégalités sur les dimensions**

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

1. S'il existe une application linéaire injective de  $E$  vers  $F$ , alors  $\dim(E) \leq \dim(F)$ .
2. S'il existe une application linéaire surjective de  $E$  vers  $F$ , alors  $\dim(F) \leq \dim(E)$ .

*Démonstration.* On note  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

1. Si il existe  $f$  injective de  $E$  vers  $F$ , alors  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est libre, donc  $\dim(F) \geq n = \dim(E)$ .
2. Si il existe  $f$  surjective de  $E$  vers  $F$ , alors  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est génératrice de  $F$ , donc  $\dim(F) \leq n = \dim(E)$ .

□

## 2 – Rang d'une application linéaire

**Proposition 28.65 – Image d'un sous-espace vectoriel de dimension finie**

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev. Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Soit  $A$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ . Alors  $f(A)$  est de dimension finie et  $\dim(f(A)) \leq \dim(A)$ .

*Démonstration.* Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $A$ . Alors  $A = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ . D'après la Proposition 28.61,  $f(A) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ . Donc  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une famille génératrice de  $f(A)$ .

On en déduit que  $f(A)$  est de dimension finie et  $\dim(f(A)) \leq n = \dim(A)$ .

□

**Définition 28.66** – Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Si  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  de dimension finie, on dit que  $f$  est de rang fini et l'on appelle **rang** de  $f$  la dimension de  $\text{Im}(f)$ . On la note  $\text{rg}(f)$ .

**Proposition 28.67 – Famille génératrice de l'image**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $E$  étant de dimension finie  $n$ .

Soient  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $f$  une application linéaire de  $E$  vers  $F$ .

La famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  engendre  $\text{Im}(f)$ .  $\text{Im}(f)$  est donc de dimension finie, donc  $f$  est de rang fini et

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \leq \dim(E).$$

*Démonstration.* On applique la Proposition 28.65 avec  $A = E$ . On obtient que  $f(E) = \text{Im}(f)$  est de dimension finie inférieure à  $\dim(E)$ . □

**Proposition 28.68 – Rang et composition**

Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -ev. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

1. Si  $f$  et  $g$  sont de rang fini, alors  $g \circ f$  est de rang fini et  $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$ .
2. Si  $f$  est un isomorphisme et si  $g$  est de rang fini, alors  $g \circ f$  est de rang fini et  $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$ .
3. Si  $f$  est de rang fini et si  $g$  est un isomorphisme, alors  $g \circ f$  est de rang fini et  $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$ .

*Démonstration.*

1. • On sait que  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ . Comme  $\text{Im}(g)$  est de dimension finie, il en va de même pour  $\text{Im}(g \circ f)$  donc  $g \circ f$  est de rang fini. Comme  $\dim(\text{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\text{Im}(g))$ , on a  $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$ .  
 • On sait que  $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im}(f))$  donc  $\dim(\text{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\text{Im}(f))$  c'est-à-dire  $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$ .
2.  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$  et  $\text{Im}(g) = \text{Im}((g \circ f) \circ f^{-1}) \subset \text{Im}(g \circ f)$  donc  $\text{Im}(g) = \text{Im}(g \circ f)$  et c'est gagné.
3. On a  $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im}(f))$ . Or  $\text{Im}(f)$  est de dimension finie donc  $g(\text{Im}(f))$  est de dimension finie. Notons  $\mathcal{B}$  une base de  $\text{Im}(f)$ . Puisque  $\mathcal{B}$  est libre et comme  $g$  est injective,  $g(\mathcal{B})$  est libre. Or on sait que  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$  donc  $g(\mathcal{B})$  est une famille génératrice  $g(\text{Im}(f))$ . Au final,  $g(\mathcal{B})$ , qui a autant de vecteurs que  $\mathcal{B}$ , est une base de  $\text{Im}(g \circ f)$  donc  $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$ . □

**Théorème 28.69 – Master théorème**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $p$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- |                       |        |                                                  |        |                        |
|-----------------------|--------|--------------------------------------------------|--------|------------------------|
| 1. $f$ est injective  | $\iff$ | $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre              | $\iff$ | $\text{rg}(f) = n$     |
| 2. $f$ est surjective | $\iff$ | $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $F$ | $\iff$ | $\text{rg}(f) = p$     |
| 3. $f$ est bijective  | $\iff$ | $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de $F$    | $\iff$ | $\text{rg}(f) = p = n$ |

*Démonstration.*

Les implications directes de la première colonne ont déjà été prouvées (Prop 28.63).

1. Si  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est libre. Soit  $x \in \ker(f)$ .  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  donc  $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ .  
 $f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$  Comme  $x \in \ker(f)$ ,  $f(x) = 0$  donc  $0 = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$ . Comme  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est libre,  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Donc  $x = 0$ .  $\ker(f) = \{0\}$  donc  $f$  est injective. Donc  $f$  injective  $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$  est libre.  
 Si  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est libre, alors c'est une base de  $\text{Im}(f)$ , donc  $\text{rg}(f) = n$ .  
 Si  $\text{rg}(f) = n$ , alors  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est libre. Donc les équivalences de la première ligne sont démontrées.
2. Si  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est génératrice. Soit  $x \in F$ . Alors il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tels que  $x = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$ . Par linéarité,  $x = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$ . Donc  $x \in \text{Im}(f)$ .  
 On en déduit que  $\text{Im}(f) = F$  et donc que  $f$  est surjective.  
 Si  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une famille de  $F$  génératrice de  $F$ , alors  $\text{rg}((f(e_1), \dots, f(e_n))) = \dim(F) = p$ .  
 Réciproquement, si  $\text{rg}((f(e_1), \dots, f(e_n))) = p = \dim(F)$ , alors  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est génératrice. Donc les équivalences de la deuxième ligne sont démontrées. □

**Exemple 28.70 –** Pour tous  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  distincts, l'application  $P \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n))$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$  sur  $\mathbb{K}^n$ .

*Démonstration.* Linéaire, cette application transforme la base  $(L_1, \dots, L_n)$  des polynômes de Lagrange de  $x_1, \dots, x_n$  en une BASE de  $\mathbb{K}^n$ , à savoir la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  car pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :  $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ . □

D'après la classification des espaces vectoriels de dimension finie que voici, les  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie sont tous isomorphes à un et un seul  $\mathbb{K}^n$ . En d'autres termes, à isomorphisme près, on connaît tout d'un espace vectoriel de dimension finie quand on connaît sa dimension. Une telle classification est à la fois satisfaisante - chouette,  $\mathbb{K}^n$  est une grande vérité des mathématiques - et décevante - bof, quel manque d'exotisme!

**Corollaire 28.71 – Caractérisation des espaces isomorphes en dimension finie**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

1. Si  $E$  est de dimension  $n$ , alors  $E$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .
2.  $E$  et  $F$  sont isomorphes si, et seulement si, ils ont la même dimension.

*Démonstration.* On note  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

1. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\longrightarrow E \\ \varphi: (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \end{aligned}$$

est un morphisme d'après la Proposition 28.57. De plus, l'image de la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  est  $\mathcal{B}$  donc  $\varphi$  est bijective d'après le Théorème 28.69, donc est un isomorphisme. donc  $E$  et  $\mathbb{K}^n$  sont isomorphes.

2. Si  $E$  et  $F$  ont la même dimension, alors ils sont tous les deux isomorphes à  $\mathbb{K}^n$ . Donc il existe des isomorphismes  $\varphi: E \rightarrow \mathbb{K}^n$  et  $\psi: \mathbb{K}^n \rightarrow F$ . Alors  $\psi \circ \varphi: E \rightarrow F$  est un isomorphisme.

Réciproquement si  $E$  et  $F$  sont isomorphes, ils ont la même dimension d'après les deux premiers points. □

**Corollaire 28.72 – Injectivité et surjectivité entre espaces de même dimension**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Si  $\dim(E) = \dim(F)$ , alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est bijective} \iff f \text{ est surjective}$$

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du Théorème 28.69. En effet, si  $E$  et  $F$  sont de même dimension, on a  $p = n$  dans la dernière colonne d'équivalences du Théorème et toutes les propositions sont équivalentes. □

**Exemple 28.73** – L'application  $(x, y, z) \xrightarrow{\varphi} (x + y, -x + y, z)$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

*Démonstration.* Endomorphisme en dimension finie,  $\varphi$  sera bijective si nous montrons simplement qu'elle est injective. Or pour tout  $(x, y, z) \in \text{Ker } \varphi$  :  $\varphi(x, y, z) = (x + y, -x + y, z) = (0, 0, 0)$ , donc rapidement  $x = y = z = 0$ . Comme voulu :  $\text{Ker } \varphi = \{(0, 0, 0)\}$ . □

**Exemple 28.74** – L'application  $P \xrightarrow{\psi} XP' + P(0)$  est un automorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . L'application  $\psi$  est bien à valeurs dans  $\mathbb{K}_n[X]$  car pour tout  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  :

$$\deg(XP' + P(0)) \leq \max\{\deg(XP'), \deg(P(0))\} \leq \max\{1 + \deg(P'), \deg(P(0))\} \leq \deg(P) \leq n$$

Comme  $\psi$  est un endomorphisme en dimension finie, il nous suffit, pour en montrer la bijectivité, d'en montrer l'injectivité. Soit  $P \in \text{Ker } \psi$ . Aussitôt  $XP' = -P(0)$ , donc  $1 + \deg(P') \leq 0$ , ce qui n'est possible que si  $P$  est constant. En retour  $\psi(P) = P(0) = 0$ , donc  $P = 0$ . Comme voulu :  $\text{Ker } \psi = \{0\}$ . □



**ATTENTION !** Ce résultat est faux en dimension infinie.

Par exemple, l'application linéaire  $\begin{matrix} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{matrix}$  est surjective mais pas injective.

**Lemme 28.75**

Soit  $f \in \mathcal{F}(A, B)$  où  $A$  et  $B$  sont des ensembles quelconques.

1. S'il existe  $g \in \mathcal{F}(B, A)$  telle que  $f \circ g = \text{Id}_B$ , alors  $f$  est surjective.
2. S'il existe  $g \in \mathcal{F}(B, A)$  telle que  $g \circ f = \text{Id}_A$ , alors  $f$  est injective.

*Démonstration.* Application de l'exercice 11 du TD 13. En effet,  $\text{Id}_A$  est injective et  $\text{Id}_B$  surjective. □

**Corollaire 28.76 – Inversibilité à gauche / à droite**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

1. S'il existe  $v \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $u \circ v = \text{Id}_E$ , alors  $u$  est bijective.
2. S'il existe  $v \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $v \circ u = \text{Id}_E$ , alors  $u$  est bijective.

Autrement dit, si  $u$  est inversible à gauche ou à droite, elle est inversible.

*Démonstration.* D'après le lemme précédent, si  $u$  vérifie une des deux conditions, elle est injective ou surjective (selon le cas). Or, c'est un endomorphisme de  $E$  qui est de dimension finie, donc d'après le Corollaire 28.72 □

### 3 – Théorème du rang

**Théorème 28.77 – Théorème du rang, forme géométrique**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un espace vectoriel quelconque. Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Si  $G$  est un supplémentaire de  $\text{Ker}(f)$  dans  $E$ , alors  $g : \begin{matrix} G & \longrightarrow & \text{Im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{matrix}$  est un isomorphisme de  $G$  sur  $\text{Im}(f)$ .

*Démonstration.* Soit  $G$  un supplémentaire de  $\text{Ker}(f)$  dans  $E$  et  $g$  l'application linéaire induite par  $f$  de  $G$  dans  $\text{Im}(f)$ .

Alors,  $\text{Ker}(g) = \{x \in G, g(x) = 0\} = \{x \in G, f(x) = 0\} = \{x \in E, f(x) = 0\} \cap G = \text{Ker}(f) \cap G = \{0\}$  car  $G$  et  $\text{Ker}(f)$  sont supplémentaires. Ainsi  $g$  est injective.

Comme  $g$  est une restriction de  $f$ , il est clair que  $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)$ .

Montrons l'inclusion réciproque.

Soit  $y \in \text{Im}(f)$ . Montrons que  $y \in \text{Im}(g)$ . Par définition, il existe  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$ .

Comme  $E = G \oplus \text{Ker}(f)$ , on peut écrire  $x = x_G + x_K$  avec  $x_G \in G$  et  $x_K \in \text{Ker}(f)$  et donc

$$f(x) = f(x_G) + f(x_K).$$

Comme  $x_G \in G$ ,  $f(x_G) = g(x_G)$  et comme  $x_K \in \text{Ker}(f)$ ,  $f(x_K) = 0$ . Donc  $y = f(x) = g(x_G) \in \text{Im}(g)$ .

L'inclusion  $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(g)$  étant maintenant démontrée, on peut affirmer que  $\text{Im}(g) = \text{Im}(f)$  et donc  $g$  est surjective. L'application  $g$  est donc un isomorphisme, ce qui montre  $G$  et  $\text{Im}(f)$  sont isomorphes. □

**Théorème 28.78 – Théorème du rang, forme usuelle**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un espace vectoriel quelconque. Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$$

Autrement dit,

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim(E)$$

*Démonstration.* Soit  $G$  un supplémentaire de  $\text{Ker}(f)$  dans  $E$ . On a

$$\dim(E) = \dim(G) + \dim(\text{Ker}(f))$$

et d'après le lemme précédent  $G$  est isomorphe à  $\text{Im}(f)$  donc  $\dim(G) = \dim(\text{Im}(f))$ . □

**Exemple 28.79** – On considère l'application  $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  définie par  $f(P) = P'$ .  
 Montrer que  $f$  est linéaire et vérifier le théorème du rang dans ce cas précis.

*Démonstration.*

**Linéarité :** Soient  $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q' = \lambda f(P) + f(Q)$$

Ainsi  $f$  est une application linéaire.

**Noyau :** Déterminons les polynômes  $P \in E$  tels que  $f(P) = 0$ . Soit  $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$ . Alors

$$f(P) = 0 \iff b + 2cX + 3dX^2 = 0 \iff b = c = d = 0. \iff P(X) = a.$$

Ainsi  $\ker(f)$  correspond à l'ensemble des polynômes constants.

On peut en particulier écrire  $\ker(f) = \text{Vect}(1)$  et donc

$$\dim(\ker(f)) = 1.$$

**Image :** Soit  $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ . On peut écrire  $Q(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ .

On cherche  $P \in E$  tel que  $P' = Q$ . Posons  $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$ . Alors

$$P' = Q \iff b + 2cX + 3dX^2 = \alpha + \beta X + \gamma X^2 \iff b = \alpha, \quad 2c = \beta, \quad 3d = \gamma. \iff c = \frac{\beta}{2}, \quad d = \frac{\gamma}{3}.$$

Ainsi tout polynôme de  $\mathbb{R}_2[X]$  est l'image d'un polynôme de  $E$ . Donc  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$ . Par conséquent

$$\dim(\text{Im}(f)) = 3.$$

**Dimensions :** Le théorème du rang affirme que  $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$ .

Ici :  $4 = 1 + 3$ . (vérifiez les calculs tranquillement chez vous...)

Le théorème du rang est donc bien vérifié. □

## IV – Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

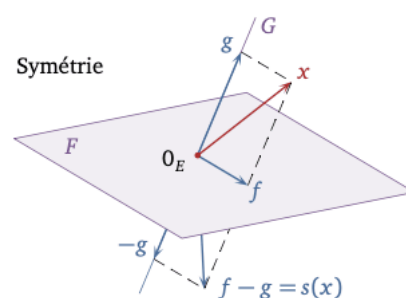
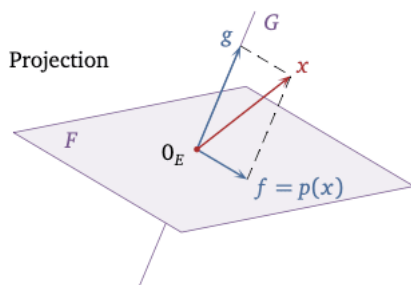
### 1 – Définitions des projecteurs et symétries

**Définition 28.80** – Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$  (c'est-à-dire  $E = F \oplus G$ ). Alors tout élément  $x \in E$  s'écrit de manière unique  $x = f + g$  avec  $f \in F$  et  $g \in G$ . On définit alors deux applications :

- ▷ La **projection** (ou le projecteur)  $p$  sur  $F$  parallèlement à  $G$  est l'application de  $E$  dans  $E$  définie pour tout  $x \in E$  par  $p(x) = f$ .
- ▷ La **symétrie**  $s$  par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  est l'application de  $E$  dans  $E$  définie pour tout  $x \in E$  par  $s(x) = f - g$ .

$F$  est la **base** et  $G$  est la **direction** de  $p$  et  $s$ .

On comprend mieux ces définitions un peu abstraites au moyen de quelques figures. Notons  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .



**Proposition 28.81**

Avec les mêmes notations, ces deux applications sont des endomorphismes de  $E$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence du Théorème 28.59.

$p$  est définie par  $p|_F = \text{Id}_F$  et  $p|_G = 0$ .

$s$  est définie par  $s|_F = \text{Id}_F$  et  $s|_G = -\text{Id}_G$ . □

**Remarque 28.82** – Avec les notations précédentes,

Pour  $x \in F$ ,  $p(x) = x$  et  $s(x) = x$ . (Ces éléments sont appelés **invariants** de  $p$  et  $s$ )

Pour  $x \in G$ ,  $p(x) = 0$  et  $s(x) = -x$ .

**Exemple 28.83** –

1. Les symétries et les projections géométriques dans le plan vectoriel euclidien et dans l'espace vectoriel euclidien sont des projections et des symétries au sens qui vient d'être défini.

2. En considérant le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  :

$z \mapsto \bar{z}$  est la symétrie par rapport à  $\mathbb{R}$  parallèlement à  $i\mathbb{R}$ .

$z \mapsto \Re(z)$  est le projecteur sur  $\mathbb{R}$  parallèlement à  $i\mathbb{R}$ .

$z \mapsto i\text{Im}(z)$  est le projecteur sur  $i\mathbb{R}$  parallèlement à  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 28.84** – Dans  $\mathbb{R}[X]$ , on note  $F = \mathbb{R}_2[X]$  et  $G$  le sous-espace vectoriel des polynômes admettant 2 comme racine de multiplicité au moins 3.

Justifier que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}[X]$  et déterminer pour  $P \in \mathbb{R}[X]$  une expression de  $\varphi(P)$  en fonction de  $P$ , où  $\varphi$  est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

Les éléments de  $G$  sont qui s'écrivent de la forme  $(X - 2)^3 Q$  avec  $Q \in \mathbb{R}[X]$

Le théorème de la division euclidienne nous assure que n'importe quel polynôme  $P$  s'écrit de manière unique comme  $(X - 2)^3 Q + R$  avec  $R \in \mathbb{R}_2[X]$  et  $Q \in \mathbb{R}[X]$ .  $F$  et  $G$  sont donc supplémentaires dans  $\mathbb{R}[X]$ . L'image de  $P$  par  $\varphi$  est alors  $R$ .

D'après la formule de Taylor en 2, en notant  $n$  le degré de  $P$ , on a

$$P = P(2) + P'(2)(X - 2) + \frac{P''(2)(X - 2)^2}{2} + (X - 2)^3 \sum_{k=0}^{n-3} \frac{P^{(k+3)}(2)}{(k+3)!} (X - 2)^k$$

On a une nouvelle écriture de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - 2)^3$ . or celle-ci est unique, donc

$$\varphi(P) = P(2) + P'(2)(X - 2) + \frac{P''(2)(X - 2)^2}{2}$$

## 2 – Projecteurs

**Proposition 28.85** – **Espaces caractéristiques des projecteurs**

Soient  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = F \oplus G$

Si  $p$  est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ , alors

$$\text{Im}(p) = F = \ker(\text{Id}_E - p), \quad \ker(p) = G$$

*Démonstration.* Soit  $x \in E$ . Alors  $\exists x_F \in F$  et  $x_G \in G$  tels que  $x = x_F + x_G$ .

$$x \in \ker(p) \iff x_F = 0_E \iff x = x_G \iff x \in G$$

Donc  $\ker(p) = G$ .

Si  $x \in F$ , alors  $x = x_F$ , donc  $x = p(x)$  et  $x \in \text{Im}(p)$ .

Si  $x \in \text{Im}(p)$ , alors, pour un certain  $y \in E$ , on a  $x = p(y) = y_F$ , donc  $x \in F$ . D'où  $\text{Im}(p) = F$ .

Ainsi,  $x \in \ker(\text{Id}_E - p) \iff (\text{Id}_E - p)(x) = 0 \iff x - p(x) = 0 \iff x = p(x) = x_F \iff x \in F$ .

Donc  $F = \ker(\text{Id}_E - p)$ . □

**Théorème 28.86 – Caractérisation des projecteurs**

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Alors,

$$u \text{ est un projecteur } \iff u \circ u = u.$$

*Démonstration.*

- Soit  $x \in E$ . Alors  $\exists x_F \in F$  et  $x_G \in G$  tels que  $x = x_F + x_G$ . Ainsi,  $p(x) = x_F$ , et donc

$$p \circ p(x) = p(x_F) = x_F.$$

Donc pour tout  $x \in E$ ,  $p(x) = p \circ p(x)$ , donc  $p = p^2$ .

- Si  $u \circ u = u$ . On pose alors  $F = \ker(\text{Id}_E - u)$  et  $G = \ker(u)$ . Montrons que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .

Soit  $x \in E$ . On pose  $x_1 = x - u(x)$  et  $x_2 = u(x)$ . On a donc  $x = x_1 + x_2$ .

Alors  $u(x_1) = u(x) - u(u(x)) = u(x) - u(x) = 0$ . Donc  $x_1 \in G$ .

$(u - \text{Id}_E)(x_2) = u(u(x)) - u(x) = u(x) - u(x) = 0$  Donc  $x_2 \in F$ .

Donc  $x \in F + G$ . D'où  $F + G = E$ .

Soient  $x \in F \cap G$ . Alors  $u(x) = 0$  et  $x - u(x) = 0$ . Donc  $x = 0$ . On en déduit que  $F \cap G = \{0_E\}$ .

$F$  et  $G$  sont donc supplémentaires dans  $E$ .

Comme  $u(x) = x_2$ , on en déduit que  $u$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ . □

**Méthode 28.87 –**

Pour montrer qu'un endomorphisme  $u$  est un projecteur, on montre que  $u \circ u = u$ .

Ensuite, on détermine les deux espaces caractéristiques de  $u$  :

Pour trouver  $\ker(u)$ , on résout  $u(x) = 0_E$ .

Pour trouver  $\text{Im}(u) = \ker(\text{Id}_E - u)$ , on résout  $u(x) = x$ . (Vecteurs invariants par  $u$ )



**Exemple 28.88** – Montrer que  $u : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, 0) \end{matrix}$  est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.

On vérifie facilement que  $p$  est linéaire et que  $p \circ p = p$ .

Par ailleurs,  $\ker(p) = \text{Vect}((1, 1))$  et  $\text{Im}(p) = \ker(p - \text{Id}_E) = \text{Vect}((1, 0))$ .

**Exemple 28.89** – On note  $F = \{aX^2 + bX + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a + b + c = 0\}$  et  $G = \text{Vect}(1 + X + X^2)$  deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Déterminer l'expression de  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

$F$  est un sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}_2[X]$  qui n'est pas  $\mathbb{R}_2[X]$ , donc est de dimension au plus 2. Or,  $X^2 - 1$  et  $X - 1$  sont deux vecteurs non-colinéaires de  $F$ , donc  $F$  est de dimension 2 et  $(X^2 - 1, X - 1)$  en est une base.

$1 + X + X^2$  n'est pas dans  $F$ , donc  $(X^2 - 1, X - 1, 1 + X + X^2)$  est libre, c'est-à-dire est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $F$  et  $G$  sont bien supplémentaires dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Soit  $P = aX^2 + bX + c$  un polynôme de  $\mathbb{R}_2[X]$ . On pose  $\lambda = \frac{a+b+c}{3}$ . Alors, en posant  $Q = (a - \lambda)X^2 + (b - \lambda)X + (c - \lambda)$  et  $R = \lambda(1 + X + X^2)$ , on  $P = Q + R$  avec  $R \in G$  et  $Q \in F$ . Donc  $p(P) = Q$ . On obtient ainsi l'expression de  $p$  :

$$p(aX^2 + bX + c) = \frac{2a - b - c}{3}X^2 + \frac{-a + 2b - c}{3}X + \frac{-a - b + 2c}{3}$$

**Proposition 28.90 – Lien entre les deux projecteurs liés à des supplémentaires**

Soient  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = F \oplus G$ .

Si  $p$  est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ , alors la projection  $p'$  sur  $G$  parallèlement à  $F$  est  $\text{Id}_E - p$ . On a donc

$$p + p' = \text{Id}_E$$

*Démonstration.* Soit  $x \in E$ . Alors  $x = x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ .

Alors,  $(\text{Id}_E - p)(x) = x_F + x_G - x_F = x_G$ . Donc  $p' = \text{Id}_E - p$ . □

### 3 – Symétries

#### Proposition 28.91 – Espaces caractéristiques des symétries

Soient  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = F \oplus G$   
 Si  $s$  est la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ , alors

$$F = \ker(s - \text{Id}_E), \quad G = \ker(s + \text{Id}_E)$$

*Démonstration.*  $x \in F \iff x_G = 0_E \iff x = s(x) \iff x - s(x) = 0_E \iff (\text{Id}_E - s)(x) = 0_E \iff x \in \ker(\text{Id}_E - s)$ .

Donc  $F = \ker(\text{Id}_E - s)$ .

$x \in G \iff x_F = 0_E \iff x = -s(x) \iff x + s(x) = 0_E \iff (\text{Id}_E + s)(x) = 0_E \iff x \in \ker(\text{Id}_E + s)$ .

Donc  $G = \ker(\text{Id}_E + s)$ . □

#### Théorème 28.92 – Caractérisation des symétries

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Alors,

$$u \text{ est une symétrie } \iff u \circ u = \text{Id}_E.$$

*Démonstration.* On suppose que  $s$  est une symétrie sur  $F$  parallèlement à  $G$ . Montrons que  $s \circ s = \text{Id}_E$ . Soit  $x \in E$ . Alors  $\exists x_F \in F$  et  $x_G \in G$  tels que  $x = x_F + x_G$ . Ainsi,  $s(x) = x_F - x_G$ , donc  $s(s(x)) = x_F - (-x_G) = x_F + x_G$ . D'où  $s \circ s = \text{Id}_E$ .

Réciproquement, on suppose que  $u \circ u = \text{Id}_E$ . Montrons que  $u$  est une symétrie sur un espace  $F$  parallèlement à un espace  $G$ . On pose alors  $F = \ker(u - \text{Id}_E)$  et  $G = \ker(u + \text{Id}_E)$ . Montrons que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .

Soit  $x \in E$ . On pose  $x_1 = \frac{1}{2}(x + u(x))$  et  $x_2 = \frac{1}{2}(x - u(x))$ . On a  $x_1 + x_2 = x$ .

Alors  $(u - \text{Id}_E)(x_1) = u(\frac{1}{2}(u(x) + x)) - \frac{1}{2}(u(x) + x) = \frac{1}{2}(u(u(x)) + u(x) - u(x) - x) = \frac{1}{2}(x - x) = 0_E$ . Donc  $x_1 \in F$ .

Alors  $(u + \text{Id}_E)(x_2) = u(\frac{1}{2}(x - u(x))) + \frac{1}{2}(x - u(x)) = \frac{1}{2}(u(x) - u(u(x)) + x - u(x)) = \frac{1}{2}(-x + x) = 0_E$ . Donc  $x_2 \in G$ .

Donc  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in F$  et  $x_2 \in G$ .

Donc  $x \in F + G$ . D'où  $F + G = E$ .

Soient  $x \in F \cap G$ . Alors  $u(x) - x = 0_E$  et  $u(x) + x = 0_E$ . Donc  $x = -x$  et  $x = 0$ . On en déduit que  $F \cap G = \{0_E\}$ .

$F$  et  $G$  sont donc supplémentaires dans  $E$ .

Comme  $u(x) = x_1 - x_2$ , on en déduit que  $u$  est la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ . □

#### Corollaire 28.93 – Les symétries sont des automorphismes

Toute symétrie  $s$  est un automorphisme et  $s^{-1} = s$ .

*Démonstration.* On a vu que si  $s$  est une symétrie, elle vérifie  $s \circ s = \text{Id}_E$ . □



#### Méthode 28.94 –

Pour montrer qu'un endomorphisme  $u$  est une symétrie, on montre que  $u \circ u = \text{Id}_E$ .

Ensuite, on détermine les deux espaces caractéristiques de  $u$  :

Pour trouver  $\ker(u - \text{Id}_E)$ , l'espace par rapport auquel s'effectue la symétrie, on résout  $u(x) = x$  pour  $x \in E$

Pour trouver  $\ker(u + \text{Id}_E)$ , l'espace parallèlement auquel s'effectue la symétrie, on résout  $u(x) = -x$ .

#### Exemple 28.95 –

Montrer que  $s : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{matrix}$  est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques.

On vérifie facilement que  $s$  linéaire et que  $s \circ s = \text{Id}_E$ .

De plus,  $\ker(s - \text{Id}_E) = \text{Vect}((1, 1))$  et  $\ker(s + \text{Id}_E) = \text{Vect}((1, -1))$ .

**Exemple 28.96 –**

Montrer que  $u: \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{matrix}$  est une symétrie. Donner ses éléments caractéristiques.

On vérifie facilement que  $u$  est linéaire et que  $u \circ u = \text{Id}_E$ .

De plus,  $\ker(u - \text{Id}_E) = \mathcal{S}_n$  et  $\ker(u + \text{Id}_E) = \mathcal{A}_n$ .

**Proposition 28.97 – Lien entre les deux symétries liés à des supplémentaires**

Soient  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = F \oplus G$ .

Si  $s$  est la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ , alors la symétrie  $s'$  par rapport à  $G$  parallèlement à  $F$  est  $-s$ . On a donc

$$s + s' = 0$$

*Démonstration.* Soit  $x \in E$ . Alors  $x = x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ .

Alors,  $-s(x) = -x_F + x_G = s'(x)$ . Donc  $s' = -s$ . □

## 4 – Liens entre projecteur et symétrie

**Proposition 28.98 – Relations entre  $s$  et  $p$**

Soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . Si  $p$  est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $s$  est la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ , alors :

$$s = 2p - \text{Id}_E, \quad p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$$

*Démonstration.* Soit  $x \in E$ . Alors  $x = x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ .

Alors  $(2p - \text{Id}_E)(x) = 2x_F - (x_F + x_G) = x_F - x_G = s(x)$ .

Donc  $s = 2p - \text{Id}_E$ . On en déduit l'autre relation. □

# V – Formes linéaires et hyperplans

Rappelons pour commencer qu'une **FORME** linéaire n'est jamais qu'une application linéaire À VALEURS DANS  $\mathbb{K}$ .

## 1 – Formes coordonnées

**Définition-Théorème 28.99 –** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On suppose que  $E$  possède une base  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ . Pour tout  $i \in I$ , l'application qui associe à tout vecteur de  $E$  sa coordonnée dans  $\mathcal{B}$  selon le vecteur  $e_i$  est une forme linéaire de  $E$  appelée la  $i$ -ième **forme coordonnée** de  $E$  (dans  $\mathcal{B}$ ).

*Démonstration.* Soient  $x, y \in E$  de coordonnées respectives  $(x_i)_{i \in I}$  et  $(y_i)_{i \in I}$  dans  $\mathcal{B}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Le vecteur  $\lambda x + y$  admet  $(\lambda x_i + y_i)_{i \in I}$  pour coordonnées dans  $\mathcal{B}$  car :  $\lambda x + y = \lambda \sum_{i \in I} x_i e_i + \sum_{i \in I} y_i e_i = \sum_{i \in I} (\lambda x_i + y_i) e_i$ . En particulier, pour tout  $i \in I$ , la coordonnée selon  $e_i$  de  $\lambda x + y$  est  $\lambda x_i + y_i$ . C'est la linéarité souhaitée! □

**Exemple 28.100 –**

- Les formes coordonnées de  $\mathbb{R}^n$  pour sa base canonique sont, dans cet ordre, les applications  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_2, \dots, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_n$ .
- Les formes coordonnées de  $\mathbb{R}_n[X]$  pour sa base canonique sont, dans cet ordre, les applications  $P \mapsto a_0, P \mapsto a_1, \dots, P \mapsto a_n$  si on note  $a_0, \dots, a_n$  les coefficients de  $P: P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ .

## 2 – Hyperplan

**Définition 28.101** – Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel - pas forcément de dimension finie. On appelle **hyperplan** de  $E$  tout noyau d'une forme linéaire non nulle de  $E$ .

Le noyau de la forme linéaire nulle  $x \mapsto 0_E$  est  $E$  tout entier. On précise donc « non nulle » dans la définition pour éviter que  $E$  lui-même soit un hyperplan de  $E$ .

**Exemple 28.102** –

- Le plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $2x + y - z = 0$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$  - noyau de la forme linéaire non nulle  $(x, y, z) \mapsto 2x + y - z$ .
- L'ensemble  $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(1) + P(0) = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}_3[X]$  - noyau de la forme linéaire non nulle  $P \mapsto P'(1) + P(0)$ .
- L'ensemble  $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(0) = f(0)\}$  est un hyperplan de  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  - noyau de la forme linéaire non nulle  $f \mapsto f(0) - f'(0)$ . Ici,  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est de dimension infinie.

**Théorème 28.103**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $H$  une partie de  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $H$  est un hyperplan de  $E$ ;
- (ii)  $H$  est le supplémentaire d'une droite vectorielle de  $E$ .

En particulier, si  $E$  est de dimension finie  $n \geq 1$ , les hyperplans de  $E$  sont donc des sous-espaces vectoriels de dimension  $n - 1$ .

En dimension 3 : hyperplan=plan.      En dimension 2 : hyperplan=droite.

*Démonstration.*

(ii)  $\implies$  (i) Par hypothèse :  $E = H \oplus \text{Vect}(v)$  pour un certain  $v \in E$  non nul. Notons alors  $\varphi$  l'unique forme linéaire de  $E$  pour laquelle  $\varphi|_H = 0_{\mathcal{L}(H, \mathbb{K})}$  et  $\varphi(v) = 1$ . Une telle forme linéaire existe et est unique d'après le théorème de détermination d'une application linéaire sur une somme directe. Il est clair que  $\varphi$  est non nulle et tout aussi clair que  $\text{Ker } \varphi = H$ , donc  $H$  est un hyperplan de  $E$ .

(i)  $\implies$  (ii) Donnons-nous une forme linéaire non nulle  $\varphi$  de noyau  $H$  et,  $\varphi$  étant non nulle, un vecteur  $v$  de  $E \setminus \text{Ker } \varphi$ . Nous allons montrer que  $E = H \oplus \text{Vect}(v)$ . Comme  $H \cap \text{Vect}(v) = \{0_E\}$ , nous n'avons qu'à montrer l'inclusion  $E \subset H + \text{Vect}(v)$ .

Soit  $x \in E$ . Par définition de  $v$  :  $\varphi(v) \neq 0$ , donc  $\varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v\right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}\varphi(v) = 0$ .

En d'autres termes :  $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v \in \text{Ker } \varphi = H$ , donc  $x \in H + \text{Vect}(v)$ .

□

**Exemple 28.104** – Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour une raison de dimension,  $\mathbb{K}_n[X]$  est un hyperplan de  $\mathbb{K}_{n+1}[X]$  et  $\mathbb{K}^n \times \{0\}$  un hyperplan de  $\mathbb{K}^{n+1}$ .

**Exemple 28.105** –

- L'ensemble  $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y = z + t\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  de dimension  $4 - 1 = 3$  en tant que noyau de la forme linéaire non nulle  $(x, y, z, t) \mapsto 2x + y - z - t$ .
- L'ensemble  $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = P(1)\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_4[X]$  de dimension  $5 - 1 = 4$  en tant que noyau de la forme linéaire non nulle  $P \mapsto P(1) - P(0)$ .

**Théorème 28.106** – Comparaison des équations d'un hyperplan

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $\varphi, \psi$  deux formes linéaires non nulles de  $E$  dont  $H$  est le noyau. Alors  $\psi = \lambda\varphi$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ .

**Démonstration.** Grâce au théorème précédent :  $E = H \oplus \text{Vect}(v)$  pour un certain  $v \in E$ . La forme linéaire  $\varphi(v)\psi - \psi(v)\varphi$  est alors nulle sur  $H$  par définition de  $\varphi$  et  $\psi$ , mais également nulle en  $v$ , donc nulle sur  $E$  tout entier par linéarité. Or  $\varphi(v) \neq 0$  - sans quoi  $\varphi$  serait nulle sur  $E$  tout entier - donc  $\psi = \lambda\varphi$  avec  $\lambda = \frac{\psi(v)}{\varphi(v)}$ .  $\square$

En résumé, tout hyperplan possède une et une seule « vraie » équation, toutes ses équations sont multiples les unes des autres. Nous connaissons bien ce résultat en géométrie élémentaire, le plan d'équation  $x + y + 2z = 0$  et le plan d'équation  $2x + 2y + 4z = 0$  sont évidemment un seul et même plan, et ce plan n'a pas d'équation « vraiment » différente.

**Théorème 28.107 – Intersection d'hyperplans**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle  $n$  et  $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

- (i) L'intersection de  $r$  hyperplans de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension **AU MOINS**  $n - r$ .
- (ii) Tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - r$  est l'intersection d'exactly  $r$  hyperplans de  $E$ .

**Démonstration.**

- (i) Soient  $H_1, \dots, H_r$  des hyperplans de  $E$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , notons  $\varphi_k$  une forme linéaire non nulle de  $E$  dont  $H_k$  est le noyau. L'application  $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x))$  est linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}^r$  de noyau  $H_1 \cap \dots \cap H_r$ , donc d'après le théorème du rang :  $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_r) = \dim E - \text{rg}(\Phi) \geq \dim E - \dim \mathbb{K}^r = n - r$ .
- (ii) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - r$ . Donnons-nous une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  dont les  $n - r$  derniers vecteurs forment une base de  $F$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $e_i^*$  la  $i$ -ième forme coordonnée associée. Pour tout  $x \in E$  :

$$x \in F \iff x \in \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n) \iff e_1^*(x) = \dots = e_r^*(x) = 0$$

$$\iff x \in \text{Ker } e_1^* \cap \dots \cap \text{Ker } e_r^*$$

Conclusion :  $F = \text{Ker } e_1^* \cap \dots \cap \text{Ker } e_r^*$ , ce qui fait bien de  $F$  l'intersection de  $r$  hyperplans de  $E$ .  $\square$

Dans  $\mathbb{R}^3$ , nous savons bien qu'une équation scalaire décrit un plan et que deux telles équations, pour peu qu'elles ne soient pas multiples l'une de l'autre, décrivent une droite. L'idée générale du théorème ci-dessus, c'est que dans un système linéaire, chaque équation occasionne potentiellement la perte d'une dimension par rapport au nombre total d'inconnues. Pourquoi potentiellement? Parce que certaines équations peuvent être redondantes et ne pas compter vraiment dans le système. Par exemple, le système linéaire  $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$  d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  décrit une droite et non un point de  $\mathbb{R}^3$  car la troisième équation n'est jamais que la somme des deux premières.

## VI – Une application aux suites récurrentes d'ordre 2

Fixons  $a$  et  $b$  deux nombres de  $\mathbb{C}$ ,  $b$  étant non nul. On cherche l'ensemble de toutes les suites  $u$  de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On note donc  $E = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ . Il est facile de montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . On considère alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi: E &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ u &\longmapsto (u_0, u_1). \end{aligned}$$

L'application  $\varphi$  est clairement linéaire. Or, pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ , il existe une unique suite  $u$  telle que

$$u_0 = \alpha, \quad u_1 = \beta \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

c'est-à-dire une unique suite  $u \in E$  telle que  $\varphi(u) = (\alpha, \beta)$ . Donc  $\varphi$  est bijective et c'est un isomorphisme de  $E$  sur  $\mathbb{C}^2$ .

Comme  $\mathbb{C}^2$  est de dimension 2, on en déduit que  $E$  est également de dimension 2. Ainsi, pour décrire complètement  $E$ , il suffit d'en trouver une base, qui est donc formée de deux suites linéairement indépendantes. La première idée est de chercher ces suites parmi les suites géométriques.

Soit  $r$  un élément de  $\mathbb{C}$ . On considère la suite géométrique  $u = (r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Remarquons que  $u_0 = 1$  ce qui fait que si  $r = 0$ , on a  $\underbrace{u_2}_{=0} \neq \underbrace{au_1}_{=0} + \underbrace{bu_0}_{=b \neq 0}$ . On peut donc supposer que  $r \neq 0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} u \in E &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{r^n}_{\neq 0} (r^2 - ar - b) = 0 \\ &\iff r^2 - ar - b = 0 \quad (C) \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation caractéristique (C) associée à cette suite.

Comme on est dans  $\mathbb{C}$ , (C) a soit deux racines complexes distinctes, soit une seule.

- ▷ Si (C) a deux racines complexes distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , on obtient que les deux suites  $u = (r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartiennent à  $E$ .

Dans ce cas, puisque  $\varphi(u) = (1, r_1)$  et  $\varphi(v) = (1, r_2)$  sont deux vecteurs non colinéaires de  $\mathbb{C}^2$  (car  $r_1 \neq r_2$ ), les suites  $u$  et  $v$  sont aussi linéairement indépendantes (car  $(u, v)$  est l'image par l'injection  $\varphi^{-1}$  de la famille libre  $((1, r_1), (1, r_2))$  de  $\mathbb{C}^2$ ). Ainsi,  $(u, v)$  est une famille libre de deux vecteurs de  $E$ , qui est de dimension 2 donc une base de  $E$ , ce qui prouve que

$$E = \text{Vect}(u, v) = \left\{ (\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\}.$$

- ▷ Si (C) n'a qu'une seule racine  $r_0$ , on n'obtient alors que la suite  $u = (r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E$  sous la forme cherchée. Puisque  $E$  est de dimension 2, il faut encore trouver une autre suite dans  $E$ , non colinéaire à  $u$  pour obtenir une base de  $E$ . On a  $\varphi(u) = (1, r_0)$ . Si l'on trouve une suite  $v$  de  $E$  telle que  $\varphi(v) = (0, r_0)$  ( $r_0 \neq 0$  car  $b \neq 0$ ), on pourra affirmer (pour la même raison que précédemment), que la famille  $(u, v)$  est une famille libre de  $E$  et donc une base de  $E$ .

On cherche donc  $v$  telle que  $v_0 = 0$ ,  $v_1 = r_0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$ . Avec les relations coefficients-racines de l'équation (C), on a  $a = 2r_0$  et  $b = -r_0^2$  ce qui donne que  $v$  vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 2r_0 v_{n+1} - r_0^2 v_n.$$

On calcule :  $v_0 = 0$ ,  $v_1 = r_0$ ,  $v_2 = 2r_0^2$ ,  $v_3 = 4r_0^3 - r_0^3 = 3r_0^3$ ,  $v_4 = 6r_0^4 - 2r_0^4 = 4r_0^4$ , etc. On peut montrer par récurrence double que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = nr_0^n$ . La suite  $v$  ainsi trouvée est non colinéaire à la suite  $u$  et la famille  $(u, v)$  est donc une base de  $E$ . On obtient :

$$E = \text{Vect}(u, v) = \left\{ (\lambda r_0^n + \mu nr_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\}.$$

**Autre chose?** En procédant de façon très similaire, on peut aussi retrouver tous les résultats sur les solutions des équations différentielles linéaires.