28 | Applications linéaires

Un mathématicien est une machine pour transformer le café en théorème.

Paul Erdös (1913-1996), mathématicien.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (si si, je vous assure).

I – Généralités

E, F et G désignent des $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconques dans toute cette section.

1 – Définitions

Définition 28.1 – On appelle **application linéaire** de E dans F, toute application f de E dans F telle que :

- $\forall (x,y) \in E^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$,
- $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemple 28.2 –

1. L'application identité de E est une application linéaire : $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$
2. L'application nulle de E dans F est une application linéaire : $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array} \right.$
3. L'application suivante est une application linéaire : $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 4x \end{array} \right.$

Proposition 28.3

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $f(0_E) = 0_F$.

Démonstration.

□

Remarque 28.4 – On peut utiliser cette propriété pour montrer rapidement qu'une application **N'EST PAS** une application linéaire, en vérifiant simplement que $f(0_E) \neq 0_F$.

Proposition 28.5

f est une application linéaire de E dans F si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Démonstration.

□

Remarque 28.6 – Plus généralement (récurrence...), si $f : E \to F$ est une application linéaire laisse, alors pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_n \in E$,

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

Méthode 28.7 – Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est linéaire
On prouve que pour tout $(x, y) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Exemple 28.8 – Démontrer que l'application suivante est une application linéaire.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Exemple 28.9 – Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$ est une application linéaire.

Exemple 28.10 – Montrer que l'application $P \longrightarrow P'$ est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 28.11 – Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, montrons que l'application

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{cases}$$

est une application linéaire.

Exemple 28.12 – Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?

1. La fonction φ_1 définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $\varphi_1\big((x,y)\big) = x + y + 1$.

2. La fonction φ_2 définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $\varphi_2\big((x,y)\big) = x + y$.

3. La fonction φ_3 définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $\varphi_3\big((x,y)\big) = x \times y$.

4. $\varphi_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x + 3y + 1 \end{array}$

5. $\varphi_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+3y-z, 5x+6y-4z) \end{array}$

Remarque 28.13 – De manière générale, une application $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^p$ telle que chaque composante de $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ est définie comme une combinaison linéaire de $x_1,\dots,x_n$ est une application linéaire.

6. $\varphi_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$

7. $\varphi_7 : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array}$

8. Pour $n,p \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_8 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M^T \end{array}$

Proposition 28.14

L'ensemble des applications linéaires de E dans F, noté $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.

Démonstration.

□

2 – Cas particuliers

Définition 28.15 – On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire de E dans lui-même. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Exemple 28.16 –

1. L'application identité sur E
2. L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe (y, x)
3. L'application $D : f \longmapsto f'$ définie sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$
4. L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe x^2

Exemple 28.17 – L'application $P \overset{f}{\longmapsto} P\left(X^2\right) + 2P'(1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration.

□

Remarque 28.18 – Pour montrer qu'une application f est un endomorphisme de E, on doit donc montrer que f est une application linéaire **ET** que f est définie et à valeurs dans E.

Définition 28.19 – On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple 28.20 –

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, $f : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto P(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $a \leqslant b$ deux réels. L'application $I : \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à une fonction f associe $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Définition 28.21 –

1. Une application linéaire bijective entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F est appelée **isomorphisme**.
2. Une application linéaire bijective d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans lui-même est appelée **automorphisme**. C'est donc à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.

L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E est appelé **groupe linéaire de** E et se note $\mathrm{GL}(E)$.

Remarque 28.22 – Le groupe linéaire ... est un groupe! En effet, $(\mathcal{L}(E),\circ)$ est un magma (un ensemble muni d'une loi de composition interne) d'après la Proposition 28.27 et $\mathrm{GL}(E)$ correspond à l'ensemble des éléments inversibles de ce magma.

Exemple 28.23 –

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, 3x+2y) \end{array}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $\lambda \neq 0$ dans $\mathbb{K}$, l'application $\lambda\,.\,\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array}$ est un automorphisme, dont la réciproque est $\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{Id}_E$.

   Ces applications sont appelées **homothéties** de E.

Définition 28.24 – On dit que E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de E dans F.

Exemple 28.25 – Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & \big(P(0), P'(0), P''(0)\big) \end{array} \right.$ est un isomorphisme. Que peut-on en déduire?

3 – Composition des applications linéaires

Proposition 28.26

Si f est une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Démonstration.

□

Proposition 28.27 – Composée d'isomorphismes

Si f est un isomorphisme de E dans F, et g est un isomorphisme de F dans G, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G, et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration.

□

Observons à présent que pour toutes $f, f' \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g, g' \in \mathcal{L}(F, G)$:

$$g \circ \left(f + f'\right) = (g \circ f) + \left(g \circ f'\right) \quad \text{et} \quad \left(g + g'\right) \circ f = (g \circ f) + \left(g' \circ f\right).$$

Attention cependant ! La relation $\left(g + g'\right) \circ f = (g \circ f) + \left(g' \circ f\right)$ est vraie en toute généralité sans linéarité alors que la relation $g \circ \left(f + f'\right) = (g \circ f) + \left(g \circ f'\right)$ requiert à tout prix la linéarité de g. Faites l'effort de vous en convaincre.

L'énoncé qui suit repose entièrement sur l'idée que pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, la composée de deux endomorphismes de E est encore un endomorphisme de E. En d'autres termes, la composition est une **LOI INTERNE** sur $\mathcal{L}(E)$.

Théorème 28.28 – Anneau $\mathcal{L}(E)$

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, non commutatif en général, avec $1_{\mathcal{L}(E)} = \mathrm{Id}_E$.

Démonstration.

$\square$

ATTENTION ! La loi produit de $\mathcal{L}(E)$ est la composition! Pour tous $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, f^n désigne donc Id_E si $n = 0$ et $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$ si $n \geqslant 1$.

Remarque 28.29 – Comme dans tout anneau, deux formules importantes sont vraies dans $\mathcal{L}(E)$:

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} \quad \text{(formule du binôme)} \qquad \text{et} \qquad f^n - g^n = (f-g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-k-1}$$

pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$ **QUI COMMUTENT** . Il est essentiel que f et g commutent. Pour montrer que $(f+g)\circ(f-g) = f^2 - g^2$ par exemple, il faut pouvoir simplifier $f \circ g$ avec $g \circ f$.

Exemple 28.30 – Les endomorphismes $P \overset{D}{\longmapsto} P'$ et $P \overset{M}{\longmapsto} XP$ de $\mathbb{K}[X]$ **NE** commutent **PAS** , l'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ **N** 'est donc **PAS** commutatif.

Démonstration.

$\square$

Définition 28.31 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **nilpotent** si $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Le plus petit de ces entiers k est alors appelé l'indice de nilpotence de f.

Exemple 28.32 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme $P \overset{D}{\longmapsto} P'$ de $\mathbb{K}_n[X]$ est nilpotent d'indice $n+1$.

Démonstration.

$\square$

II – Etude des applications linéaires

1 – Noyau

Définition 28.33 – Soit f une application linéaire de E vers F.
On appelle **noyau de** f l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est le vecteur nul de F. Ce sous-ensemble de E est noté $\mathrm{Ker}(f)$, et on a donc :

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{x \in E \mid f(x) = 0_F\right\}.$$

Remarque 28.34 – Comme f est linéaire, on sait que $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \ker(f)$ et $\ker(f) \neq \emptyset$.

Exemple 28.35 – Déterminer le noyau de l'application identité de E et de l'application nulle de E dans F :

$$\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. \qquad \theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array} \right.$$

Méthode 28.36 – Pour déterminer le noyau d'une application linéaire
On résout l'équation $f(x) = 0_F$ d'inconnue $x \in E$.

Exemple 28.37 – Soit l'application linéaire f définie par : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Déterminons le noyau de f.

Exemple 28.38 – Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, qui à (x, y) associe $(x - y, y - x)$.

2. $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui à f associe f'.

3. $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x - 2y + 4z, 3x - z) \in \mathbb{R}^2$.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère l'application linéaire, $\phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(a) \in \mathbb{R}$.

5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues sur I. On pose

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ h & \longmapsto & h' + ah \end{array}, \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^2(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ h & \longmapsto & h'' + ah' + bh \end{array}$$

On peut facilement vérifier que ces deux applications sont linéaires.

Proposition 28.39

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

$\square$

Proposition 28.40 – Noyau et injectivité

Soient E et F deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. La fonction f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration.

□

Exemple 28.41 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $M \longmapsto AM$.
Vérifier que A est inversible puis montrer que f est injectif.

2 – Image

Définition 28.42 – Soit f une application linéaire de E vers F. On appelle **image de** f l'ensemble des images par f des éléments de E.
Ce sous-ensemble de F est noté $\mathrm{Im}(f)$, et on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \big\{ f(x) \mid x \in E \big\}$$

ce que l'on peut aussi écrire : $\quad \mathrm{Im}(f) = \big\{ y \in F \mid \exists x \in E, \quad y = f(x) \big\}$.

Remarque 28.43 – Comme $f(0_E) = 0_F$ on a $0_F \in \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \neq \emptyset$.

Exemple 28.44 – Déterminer l'image de l'application identité de E et de l'application nulle de E dans F :

$$\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. \qquad \qquad \theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array} \right.$$

Exemple 28.45 – Soit l'application linéaire f définie par : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient-il à l'image de f ?

Exemple 28.46 – Déterminer l'image des applications linéaires suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 5x_2 - 5x_1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Exemple 28.47 – Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $g\big((x,y)\big) = x+y$. Montrer que $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$.

Proposition 28.48

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.

□

Remarque 28.49 – Les Propositions 28.39 et 28.48 nous donnent une nouvelle méthode pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel : on peut montrer qu'il est le noyau ou l'image d'une application linéaire.

Exemple 28.50 – Montrer que $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x+2y-3z=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 28.51

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E admet une famille génératrice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big).$$

Démonstration.

□

Remarque 28.52 – Cette méthode permet facilement de déterminer l'image d'une application linéaire f mais elle nécessite de connaître une famille génératrice de E, pour cela on peut penser aux bases canoniques.

Exemple 28.53 – Déterminer l'image de l'application linéaire

$$f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 28.54 – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'image de la dérivation D des polynômes sur $\mathbb{K}_n[X]$ est $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Démonstration.

□

Proposition 28.55 – Image et surjectivité

Soient E et F deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. La fonction f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration.

□

Exemple 28.56 – On considère l'application linéaire $f : P \to P'$ définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Déterminer son noyau et son image. Est-elle injective ? surjective ?

3 – Détermination d'une application linéaire

Pour connaître une application en général, on n'a pas trop d'autre choix que de connaître l'ensemble de ses valeurs point par point. Pour une application linéaire en revanche, ce lot considérable d'informations peut être résumé par un nombre restreint de valeurs stratégiques.

On connaît par exemple parfaitement l'application $(x, y, z) \longmapsto (2x + y + z, 3x - z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ **SI ON SAIT QU'ELLE EST LINÉAIRE** et si on sait que : $f(1,0,0) = (2,3)$, $f(0,1,0) = (1,0)$ et $f(0,0,1) = (1,-1)$.

En effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = f(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) = x(2,3) + y(1,0) + z(1,-1) = (2x + y + z, 3x - z)$$

Le théorème qui suit, fondamental, généralise ce principe.

Théorème 28.57 – Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels un espace vectoriel. On suppose que E possède une base $\mathcal{B} = \left(e_i\right)_{i \in I}$ et on considère $\left(f_i\right)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F.

Alors, il existe une unique application linéaire $u : E \longrightarrow F$ telle que,

$$\forall i \in I, \quad u(e_i) = f_i$$

Cette application est définie de la manière suivante : Pour tout $x \in E$, en notant $\left(x_i\right)_{i \in I}$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$,

$$u(x) = \sum_{i \in I} x_i f_i$$

Pour connaître/définir une application linéaire complètement, il suffit de connaître/définir les valeurs qu'elle prend sur une base de l'espace de départ.

Démonstration.

□

Corollaire 28.58 – Deux applications linéaires qui coïncident sur une base de E sont égales

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et u et v deux applications linéaires de E dans F.

Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u(e_k) = v(e_k)$, alors les applications u et v sont égales ($\forall x \in E,\ u(x) = v(x)$).

Dans le théorème qui suit, on ne définit plus les applications linéaires par l'image d'une base mais par leurs restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires - cela dit l'idée est la même.

Théorème 28.59 – Détermination d'une application linéaire sur une somme directe

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ pour laquelle : $\quad u|_{E_1} = u_1 \quad$ et $\quad u|_{E_2} = u_2$.

En résumé, tout élément de $\mathcal{L}(E, F)$ est une sorte de concaténation ou de recollement d'un élément de $\mathcal{L}(E_1, F)$ et d'un élément de $\mathcal{L}(E_2, F)$.

Démonstration.

□

Exemple 28.60 – Montrer qu'il existe une unique application linéaire φ de $\mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \varphi(P) = P' \qquad \text{et} \qquad \varphi(X^4) = X$$

et la déterminer.

Démonstration.

□

III – Applications linéaires en dimension finie

1 – Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Le résultat suivant a déjà été énoncé (sous une autre forme) précédemment, mais il n'est pas inutile de le rappeler ici.

Proposition 28.61 – Image d'une famille génératrice par une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$−ev. Soit f une application linéaire de E vers F. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de E. Alors,

$$f(\operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n)) = \operatorname{Vect}\big(f(v_1), \dots, f(v_n)\big).$$

Démonstration. Soit $y \in F$, alors

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Vect}\big(f(v_1), \dots, f(v_n)\big) &\iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n,\ \ y = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \\ &\iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n,\ \ y = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \\ &\iff \exists x \in \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n),\ \ y = f(x) \\ &\iff y \in f(\operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n)) \end{aligned}$$

D'où $f(\operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n)) = \operatorname{Vect}\big(f(v_1), \dots, f(v_n)\big)$. □

Corollaire 28.62 – Famille génératrice d'une image

Sous ces hypothèses, si A est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille génératrice de A, alors $\big(f(v_1), \dots, f(v_n)\big)$ est une famille génératrice de $f(A)$.

Proposition 28.63 – Conservation des propriétés des familles par des applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$−ev. Soit f une application linéaire de E vers F. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille finie de vecteurs de E. On pose $\mathcal{G} = \big(f(v_1), \dots, f(v_n)\big)$.

1. Si f est injective et si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathcal{G}$ est libre.
2. Si f est surjective et si $\mathcal{F}$ est génératrice de E, alors $\mathcal{G}$ est génératrice de F.
3. Si f est bijective et si $\mathcal{F}$ est une base de E, alors $\mathcal{G}$ est une base de F.

Démonstration.

□

Corollaire 28.64 – Injectivité, surjectivité et inégalités sur les dimensions

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. S'il existe une application linéaire injective de E vers F, alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.
2. S'il existe une application linéaire surjective de E vers F, alors $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

Démonstration.

□

2 – Rang d'une application linéaire

Proposition 28.65 – Image d'un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit E et F deux $\mathbb{K}$−ev. Soit f une application linéaire de E dans F. Soit A un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors $f(A)$ est de dimension finie et $\dim(f(A)) \leqslant \dim(A)$.

Démonstration.

□

Définition 28.66 – Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Si $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension finie, on dit que f est de rang fini et l'on appelle **rang** de f la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. On la note $\mathrm{rg}(f)$.

Proposition 28.67 – Famille génératrice de l'image

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie n.
Soient $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et f une application linéaire de E vers F.
La famille $\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$ engendre $\mathrm{Im}(f)$. $\mathrm{Im}(f)$ est donc de dimension finie, donc f est de rang fini et

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1),\dots,f(e_n)) \leqslant \dim(E).$$

Démonstration. On applique la Proposition 28.65 avec $A = E$. On obtient que $f(E) = \mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie inférieure à $\dim(E)$. □

Proposition 28.68 – Rang et composition

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$–ev. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Si f et g sont de rang fini, alors $g\circ f$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(g\circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f),\mathrm{rg}(g))$.
2. Si f est un isomorphisme et si g est de rang fini, alors $g\circ f$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}(g)$.
3. Si f est de rang fini et si g est un isomorphisme, alors $g\circ f$ est de rang fini et $\mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

Démonstration.

1. • On sait que $\mathrm{Im}(g\circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$. Comme $\mathrm{Im}(g)$ est de dimension finie, il en va de même pour $\mathrm{Im}(g\circ f)$ donc $g\circ f$ est de rang fini. Comme $\dim(\mathrm{Im}(g\circ f)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(g))$, on a $\mathrm{rg}(g\circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$.
   • On sait que $\mathrm{Im}(g\circ f) = g(\mathrm{Im}(f))$ donc $\dim(\mathrm{Im}(g\circ f)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f))$ c'est-à-dire $\mathrm{rg}(g\circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f)$.
2. $\mathrm{Im}(g\circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}((g\circ f)\circ f^{-1}) \subset \mathrm{Im}(g\circ f)$ donc $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g\circ f)$ et c'est gagné.
3. On a $\mathrm{Im}(g\circ f) = g(\mathrm{Im}(f))$. Or $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie donc $g(\mathrm{Im}(f))$ est de dimension finie. Notons $\mathcal{B}$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Puisque $\mathcal{B}$ est libre et comme g est injective, $g(\mathcal{B})$ est libre. Or on sait que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ donc $g(\mathcal{B})$ est une famille génératrice $g(\mathrm{Im}(f))$. Au final, $g(\mathcal{B})$, qui a autant de vecteurs que $\mathcal{B}$, est une base de $\mathrm{Im}(g\circ f)$ donc $\mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

□

Théorème 28.69 – Master théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. f est injective	$\iff$	$\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$ est libre	$\iff$	$\mathrm{rg}(f) = n$
2. f est surjective	$\iff$	$\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$ est génératrice de F	$\iff$	$\mathrm{rg}(f) = p$
3. f est bijective	$\iff$	$\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$ est une base de F	$\iff$	$\mathrm{rg}(f) = p = n$

Démonstration.

□

Exemple 28.70 – Pour tous $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}$ distincts, l'application $P \longmapsto (P(x_1),\dots,P(x_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration.

□

D'après la classification des espaces vectoriels de dimension finie que voici, les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont tous isomorphes à un et un seul $\mathbb{K}^n$. En d'autres termes, à isomorphisme près, on connaît tout d'un espace vectoriel de dimension finie quand on connaît sa dimension. Une telle classification est à la fois satisfaisante - chouette, $\mathbb{K}^n$ est une grande vérité des mathématiques - et décevante - bof, quel manque d'exotisme !

Corollaire 28.71 – Caractérisation des espaces isomorphes en dimension finie

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Si E est de dimension n, alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
2. E et F sont isomorphes si, et seulement si, ils ont la même dimension.

Démonstration.

□

Corollaire 28.72 – Injectivité et surjectivité entre espaces de même dimension

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est bijective} \iff f \text{ est surjective}$$

Démonstration.

□

Exemple 28.73 – L'application $(x, y, z) \xmapsto{\varphi} (x+y, -x+y, z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

□

Exemple 28.74 – L'application $P \xmapsto{\psi} XP' + P(0)$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

□

ATTENTION ! Ce résultat est faux en dimension infinie.
Par exemple, l'application linéaire $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ est surjective mais pas injective.

Lemme 28.75

Soit $f \in \mathcal{F}(A, B)$ où A et B sont des ensembles quelconques.

1. S'il existe $g \in \mathcal{F}(B, A)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_B$, alors f est surjective.
2. S'il existe $g \in \mathcal{F}(B, A)$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$, alors f est injective.

Démonstration. Application de l'exercice 11 du TD 13. En effet, Id_A est injective et Id_B surjective. □

Corollaire 28.76 – Inversibilité à gauche / à droite

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.

1. S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$, alors u est bijective.
2. S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors u est bijective.

Autrement dit, si u est inversible à gauche ou à droite, elle est inversible.

Démonstration.

□

3 – Théorème du rang

Théorème 28.77 – Théorème du rang, forme géométrique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque. Soit f une application linéaire de E dans F. Si G est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E, alors $g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.

□

Théorème 28.78 – Théorème du rang, forme usuelle

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque. Soit f une application linéaire de E dans F.

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

Autrement dit,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$$

Démonstration.

□

Exemple 28.79 – On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = P'$.
Montrer que f est linéaire et vérifier le théorème du rang dans ce cas précis.

Démonstration.

□

IV – Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

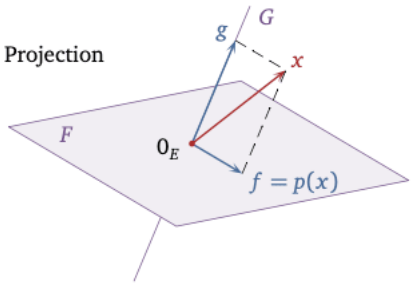
1 – Définitions des projecteurs et symétries

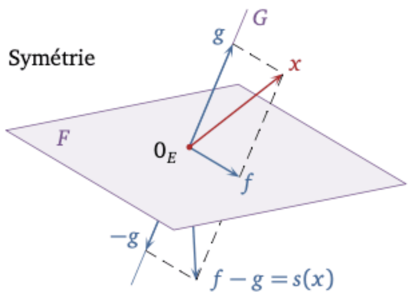
Définition 28.80 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E (c'est-à-dire $E = F \oplus G$). Alors tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. On définit alors deux applications :

- La **projection** (ou le projecteur) p sur F parallèlement à G est l'application de E dans E définie pour tout $x \in E$ par $p(x) = f$.
- La **symétrie** s par rapport à F parallèlement à G est l'application de E dans E définie pour tout $x \in E$ par $s(x) = f - g$.

F est la **base** et G est la **direction** de p et s.

On comprend mieux ces définitions un peu abstraites au moyen de quelques figures. Notons p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.





Proposition 28.81

Avec les mêmes notations, ces deux applications sont des endomorphismes de E.

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème 28.59.
p est définie par $p\big|_F = \mathrm{Id}_F$ et $p\big|_G = 0$.
s est définie par $s|_F = \mathrm{Id}_F$ et $s|_G = -\mathrm{Id}_G$. □

Remarque 28.82 – Avec les notations précédentes,
Pour $x \in F$, $p(x) = x$ et $s(x) = x$. (Ces éléments sont appelés **invariants** de p et s)
Pour $x \in G$, $p(x) = 0$ et $s(x) = -x$.

Exemple 28.83 –

1. Les symétries et les projections géométriques dans le plan vectoriel euclidien et dans l'espace vectoriel euclidien sont des projections et des symétries au sens qui vient d'être défini.
2. En considérant le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$:
   $z \longmapsto \bar{z}$ est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$.
   $z \longmapsto \Re e(z)$ est le projecteur sur $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$.
   $z \longmapsto i\mathrm{Im}(z)$ est le projecteur sur $i\mathbb{R}$ parallèlement à $\mathbb{R}$.

Exemple 28.84 – Dans $\mathbb{R}[X]$, on note $F = \mathbb{R}_2[X]$ et G le sous-espace vectoriel des polynômes admettant 2 comme racine de multiplicité au moins 3.
Justifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$ et déterminer pour $P \in \mathbb{R}[X]$ une expression de $\varphi(P)$ en fonction de P, où φ est le projecteur sur F parallèlement à G.

2 – Projecteurs

Proposition 28.85 – Espaces caractéristiques des projecteurs

Soient E un espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$

Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors

$$\operatorname{Im}(p) = F = \ker(\operatorname{Id}_E - p), \qquad \ker(p) = G$$

Démonstration.

□

Théorème 28.86 – Caractérisation des projecteurs

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Alors,

$$u \text{ est un projecteur} \iff u \circ u = u.$$

Démonstration.

$\square$

Méthode 28.87 –
Pour montrer qu'un endomorphisme u est un projecteur, on montre que $u \circ u = u$.
Ensuite, on détermine les deux espaces caractéristiques de u :
Pour trouver $\ker(u)$, on résout $u(x) = 0_E$.
Pour trouver $\mathrm{Im}(u) = \ker(\mathrm{Id}_E - u)$, on résout $u(x) = x$. (Vecteurs invariants par u)

Exemple 28.88 – Montrer que $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, 0) \end{array}$ est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.

Exemple 28.89 – On note $F = \left\{aX^2 + bX + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a + b + c = 0\right\}$ et $G = \operatorname{Vect}\left(1 + X + X^2\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$.
Déterminer l'expression de p la projection sur F parallèlement à G.

Proposition 28.90 – Lien entre les deux projecteurs liés à des supplémentaires

Soient E un espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.

Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors la projection p' sur G parallèlement à F est $\mathrm{Id}_E - p$. On a donc

$$p + p' = \mathrm{Id}_E$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.
Alors, $(\mathrm{Id}_E - p)(x) = x_F + x_G - x_F = x_G$. Donc $p' = \mathrm{Id}_E - p$. □

3 – Symétries

Proposition 28.91 – Espaces caractéristiques des symétries

Soient E un espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$
Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors

$$F = \ker(s - \mathrm{Id}_E), \qquad G = \ker(s + \mathrm{Id}_E)$$

Démonstration.

□

Théorème 28.92 – Caractérisation des symétries

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Alors,

$$u \text{ est une symétrie} \iff u \circ u = \mathrm{Id}_E.$$

Démonstration.

□

Corollaire 28.93 – Les symétries sont des automorphismes

Toute symétrie s est un automorphisme et $s^{-1} = s$.

Démonstration. On a vu que si s est une symétrie, elle vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. □

Méthode 28.94 –
Pour montrer qu'un endomorphisme u est une symétrie, on montre que $u \circ u = \mathrm{Id}_E$.
Ensuite, on détermine les deux espaces caractéristiques de u :
Pour trouver $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$, l'espace par rapport auquel s'effectue la symétrie, on résout $u(x) = x$ pour $x \in E$
Pour trouver $\ker(u + \mathrm{Id}_E)$, l'espace parallèlement auquel s'effectue la symétrie, on résout $u(x) = -x$.

Exemple 28.95 –
Montrer que $s : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array}$ est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques.

Exemple 28.96 –
Montrer que $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{array}$ est une symétrie. Donner ses éléments caractéristiques.

Proposition 28.97 – Lien entre les deux symétries liés à des supplémentaires

Soient E un espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.

Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors la symétrie s' par rapport à G parallèlement à F est $-s$. On a donc

$$s + s' = 0$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

Alors, $-s(x) = -x_F + x_G = s'(x)$. Donc $s' = -s$. □

4 – Liens entre projecteur et symétrie

Proposition 28.98 – Relations entre s et p

Soient F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Si p est le projecteur sur F parallèlement à G et s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors :

$$s = 2p - \mathrm{Id}_E, \qquad p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

Alors $(2p - \mathrm{Id}_E)(x) = 2x_F - (x_F + x_G) = x_F - x_G = s(x)$.

Donc $s = 2p - \mathrm{Id}_E$. On en déduit l'autre relation. □

V – Formes linéaires et hyperplans

Rappelons pour commencer qu'une **FORME** linéaire n'est jamais qu'une application linéaire **À VALEURS DANS** $\mathbb{K}$.

1 – Formes coordonnées

Définition-Théorème 28.99 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que E possède une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$. Pour tout $i \in I$, l'application qui associe à tout vecteur de E sa coordonnée dans $\mathcal{B}$ selon le vecteur e_i est une forme linéaire de E appelée la i-ième **forme coordonnée** de E (dans $\mathcal{B}$).

Démonstration.

□

Exemple 28.100 –

- Les formes coordonnées de $\mathbb{R}^n$ pour sa base canonique sont, dans cet ordre, les applications $(x_1,\dots,x_n) \longmapsto x_1$, $(x_1,\dots,x_n) \longmapsto x_2,\dots,(x_1,\dots,x_n) \longmapsto x_n$.
- Les formes coordonnées de $\mathbb{R}_n[X]$ pour sa base canonique sont, dans cet ordre, les applications $P \longmapsto a_0, P \longmapsto a_1$, $\dots, P \longmapsto a_n$ si on note $a_0,\dots,a_n$ les coefficients de P : $\quad P = a_nX^n + \dots + a_1X + a_0$.

2 – Hyperplan

Définition 28.101 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel - pas forcément de dimension finie. On appelle **hyperplan** de E tout noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

Le noyau de la forme linéaire nulle $x \longmapsto 0_E$ est E tout entier. On précise donc « non nulle » dans la définition pour éviter que E lui-même soit un hyperplan de E.

Exemple 28.102 –

- Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x+y-z=0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ - noyau de la forme linéaire non nulle $(x,y,z) \longmapsto 2x+y-z$.
- L'ensemble $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \quad P'(1)+P(0)=0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ - noyau de la forme linéaire non nulle $P \longmapsto P'(1)+P(0)$.
- L'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \quad f'(0)=f(0)\}$ est un hyperplan de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ - noyau de la forme linéaire non nulle $f \longmapsto f(0)-f'(0)$. Ici, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Théorème 28.103

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) H est un hyperplan de E ;

(ii) H est le supplémentaire d'une droite vectorielle de E.

En particulier, si E est de dimension finie $n \geqslant 1$, les hyperplans de E sont donc des sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.

En dimension 3 : hyperplan=plan. En dimension 2 : hyperplan=droite.

Démonstration.

□

Exemple 28.104 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour une raison de dimension, $\mathbb{K}_n[X]$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$ et $\mathbb{K}^n \times \{0\}$ un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Exemple 28.105 –

- L'ensemble $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad 2x + y = z + t\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 4-1=3 en tant que noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z, t) \longmapsto 2x + y - z - t$.
- L'ensemble $\left\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid \quad P(0) = P(1)\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ de dimension $5 - 1 = 4$ en tant que noyau de la forme linéaire non nulle $P \longmapsto P(1) - P(0)$.

Théorème 28.106 – Comparaison des équations d'un hyperplan

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E dont H est le noyau. Alors $\psi = \lambda\varphi$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Démonstration.

□

En résumé, tout hyperplan possède une et une seule « vraie » équation, toutes ses équations sont multiples les unes des autres. Nous connaissions bien ce résultat en géométrie élémentaire, le plan d'équation $x+y+2z=0$ et le plan d'équation $2x+2y+4z=0$ sont évidemment un seul et même plan, et ce plan n'a pas d'équation « vraiment » différente.

Théorème 28.107 – Intersection d'hyperplans

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $r \in [\![1, n]\!]$.

(i) L'intersection de r hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension **AU MOINS** $n-r$.

(ii) Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-r$ est l'intersection d'exactement r hyperplans de E.

Démonstration.

□

Dans $\mathbb{R}^3$, nous savons bien qu'une équation scalaire décrit un plan et que deux telles équations, pour peu qu'elles ne soient pas multiples l'une de l'autre, décrivent une droite. L'idée générale du théorème ci-dessus, c'est que dans un système linéaire, chaque équation occasionne potentiellement la perte d'une dimension par rapport au nombre total d'inconnues. Pourquoi potentiellement ? Parce que certaines équations peuvent être redondantes et ne pas compter vraiment dans le système. Par exemple, le système linéaire $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right.$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ décrit une droite et non un point de $\mathbb{R}^3$ car la troisième équation n'est jamais que la somme des deux premières.

VI – Une application aux suites récurrentes d'ordre 2

Fixons a et b deux nombres de $\mathbb{C}$, b étant non nul. On cherche l'ensemble de toutes les suites u de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On note donc $E = \left\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$. Il est facile de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On considère alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & u & \longmapsto & (u_0, u_1). \end{array}$$

L'application φ est clairement linéaire. Or, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, il existe une unique suite u telle que

$$u_0 = \alpha, \quad u_1 = \beta \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

c'est-à-dire une unique suite $u \in E$ telle que $\varphi(u) = (\alpha, \beta)$. Donc φ est bijective et c'est un isomorphisme de E sur $\mathbb{C}^2$.

Comme $\mathbb{C}^2$ est de dimension 2, on en déduit que E est également de dimension 2. Ainsi, pour décrire complètement E, il suffit d'en trouver une base, qui est donc formée de deux suites linéairement indépendantes. La première idée est de chercher ces suites parmi les suites géométriques.

Soit r un élément de $\mathbb{C}$. On considère la suite géométrique $u = (r^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Remarquons que $u_0 = 1$ ce qui fait que si $r = 0$, on a $\underbrace{u_2}_{=0} \neq \underbrace{au_1}_{=0} + \underbrace{bu_0}_{=b\neq 0}$. On peut donc supposer que $r \neq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u \in E &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{r^n}_{\neq 0}(r^2 - ar - b) = 0 \\ &\iff r^2 - ar - b = 0 \qquad (C) \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation caractéristique (C) associée à cette suite.

Comme on est dans $\mathbb{C}$, (C) a soit deux racines complexes distinctes, soit une seule.

- Si (C) a deux racines complexes distinctes r_1 et r_2, on obtient que les deux suites $u = ({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = ({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E.

  Dans ce cas, puisque $\varphi(u) = (1, r_1)$ et $\varphi(v) = (1, r_2)$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{C}^2$ (car $r_1 \neq r_2$), les suites u et v sont aussi linéairement indépendantes (car (u, v) est l'image par l'injection φ^{-1} de la famille libre $\big((1, r_1), (1, r_2)\big)$ de $\mathbb{C}^2$). Ainsi, (u, v) est une famille libre de deux vecteurs de E, qui est de dimension 2 donc une base de E, ce qui prouve que

  $$E = \operatorname{Vect}(u, v) = \left\{(\lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{C}\right\}.$$

- Si (C) n'a qu'une seule racine r_0, on n'obtient alors que la suite $u = ({r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E sous la forme cherchée. Puisque E est de dimension 2, il faut encore trouver une autre suite dans E, non colinéaire à u pour obtenir une base de E. On a

  $\varphi(u) = (1, r_0)$. Si l'on trouve une suite v de E telle que $\varphi(v) = (0, r_0)$ ($r_0 \neq 0$ car $b \neq 0$), on pourra affirmer (pour la même raison que précédemment), que la famille (u, v) est une famille libre de E et donc une base de E.

  On cherche donc v telle que $v_0 = 0$, $v_1 = r_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$. Avec les relations coefficients-racines de l'équation (C), on a $a = 2r_0$ et $b = -{r_0}^2$ ce qui donne que v vérifie :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2r_0 v_{n+1} - {r_0}^2 v_n.$$

  On calcule : $v_0 = 0$, $v_1 = r_0$, $v_2 = 2{r_0}^2$, $v_3 = 4{r_0}^3 - {r_0}^3 = 3{r_0}^3$, $v_4 = 6r_0^4 - 2{r_0}^4 = 4{r_0}^4$, etc. On peut montrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n{r_0}^n$. La suite v ainsi trouvée est non colinéaire à la suite u et la famille (u, v) est donc une base de E. On obtient :

  $$E = \operatorname{Vect}(u, v) = \left\{(\lambda {r_0}^n + \mu n {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{C}\right\}.$$

Autre chose? En procédant de façon très similaire, on peut aussi retrouver tous les résultats sur les solutions des équations différentielles linéaires.