27 | Théorie de l'intégration

The greatest strategy is doomed if it's implemented badly.

Bernhard Riemann, 1826-1866

Dans tout ce chapitre, a et b sont deux réels, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $I, J\dots$ sont des intervalles. Quand on notera $[a, b]$, il sera sous-entendu que $a \leqslant b$.

Ce chapitre développe une théorie de l'intégration **SUR UN SEGMENT SEULEMENT**, vous étudierez en spé une théorie de l'intégration sur un intervalle quelconque. La plupart des résultats de ce chapitre vous sont déjà connus, simplement vous ne les avez jamais démontrés et nous allons apprendre à les utiliser à d'autres fins que le calcul bête et méchant de primitives.

I – Continuité uniforme

La notion de *continuité uniforme* aurait pu être présentée au chapitre « Continuité », mais conformément au programme, nous ne l'utiliserons que pour construire proprement l'intégrale. Pour éclairer les notions de ce paragraphe, on pourra se reporter à cette vidéo explicative.

Définition 27.1 – Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est **uniformément continue** sur I si :

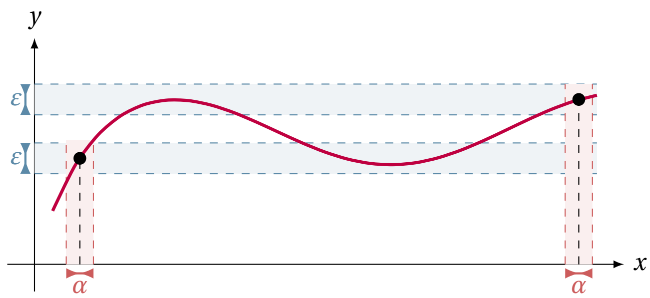
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x, y \in I, \quad |x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Dire que f est continue sur I, c'est dire que f est continue en tout point y de I, c'est-à-dire :

$$\forall y \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha_{y,\varepsilon} > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - y| < \alpha_{y,\varepsilon} \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Avec la continuité, on se fixe donc un point $y \in I$ et un niveau ε, et on récupère un $\alpha_{y,\varepsilon}$. Si on change de y ou de ε, on change a priori la valeur de $\alpha_{y,\varepsilon}$.

Avec la continuité **UNIFORME**, on obtient un α_ε en ayant seulement fixé un ε. Cet α_ε est donc **VALABLE POUR TOUT POINT** $y \in I$. L'adjectif « uniforme » est précisément là pour signifier cette indépendance de α_ε par rapport à y.



Théorème 27.2 – Lien entre la continuité, la continuité uniforme et la lipschitzianité

- Toute fonction uniformément continue sur un intervalle y est continue.
- Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle y est uniformément continue.

Démonstration.

- Évident ! S'il existe un α **UNIFORME** valable pour tout point, alors bien sûr qu'il en existe un pour chacun !
- Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction K-lipschitzienne sur I pour un certain $K > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{K}$.
  Alors pour tous $x, y \in I$ pour lesquels $|x - y| < \alpha$: $\quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y| < K\alpha = \varepsilon$.

□

Une fonction uniformément continue est donc continue, mais qu'en est-il de la réciproque ? Elle est fausse en générale, **SAUF** dans le cas d'une fonction définie sur un **SEGMENT**.

Théorème 27.3 – Heine

Toute fonction continue sur un **SEGMENT** y est uniformément continue.

Démonstration. Explication vidéo.

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$. Supposons par l'absurde que f **N'EST PAS** uniformément continue sur $[a,b]$.
Alors, pour un certain $\varepsilon > 0$: $\forall \alpha > 0, \exists x, y \in [a,b], |x-y| < \alpha \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha = 2^{-n}$, il existe donc deux réels $x_n, y_n \in [a,b]$ pour lesquels $|x_n - y_n| < 2^{-n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$.
Bornée entre a et b, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une suite extraite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, disons de limite $\ell \in [a,b]$. Or $\left|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\right| < 2^{-\varphi(n)}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = \ell$ par encadrement.
Pour conclure, passons à la limite dans l'inégalité $\left|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right| \geqslant \varepsilon$ en utilisant la continuité de f en ℓ :

$$0 = |f(\ell) - f(\ell)| \geqslant \varepsilon > 0 \quad \text{- contradiction.}$$

□

II – Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux

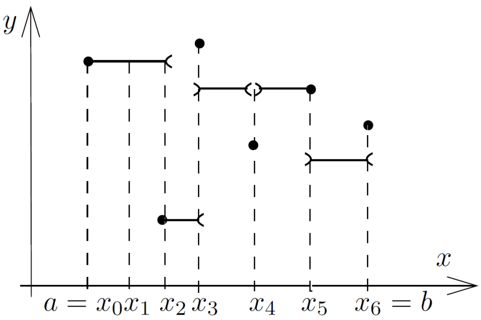
1 – Fonctions en escalier

Définition 27.4 – On appelle **subdivision** de $[a,b]$ toute famille finie $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ strictement croissante d'éléments de $[a,b]$ c'est-à-dire telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Définition 27.5 – Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur le segment $[a,b]$. On dit que la fonction f est **en escalier** si, et seulement si, il existe une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ du segment $[a,b]$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Une telle subdivision est dite **adaptée** à la fonction f. On note $\mathcal{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Remarque 27.6 –

1. Les valeurs de f aux points x_i n'ont pas d'importance.
2. Il n'existe pas qu'une subdivision adaptée à f : dans cet exemple, la subdivision obtenue en enlevant le point x_1 reste adaptée à f. De même, il est toujours possible d'ajouter des points à la subdivision. Pour une fonction en escalier f donnée, on peut former une subdivision minimale (qui contient le moins de points possibles) adaptée à f.
3. Pour deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ données, il existe toujours une subdivision de $[a,b]$ adaptée aux deux fonctions. Cela permet de justifier que les combinaisons linéaires et les produits de fonctions en escalier sont des fonctions en escalier. De même, il est clair que si f est une fonction en escalier sur $[a,b]$, alors $|f|$ est aussi en escalier sur $[a,b]$.



2 – Fonctions continues par morceaux

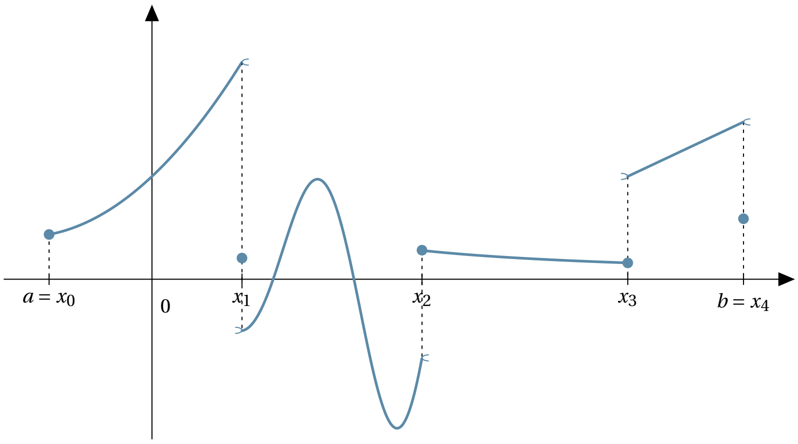
Définition 27.7 – On dit qu'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est **continue par morceaux** si pour une certaine subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$, dite adaptée à f :

$$f_{|]x_i,x_{i+1}[} \text{ est continue sur } \left]x_i, x_{i+1}\right[$$

et **PROLONGEABLE PAR CONTINUITÉ EN** x_i **ET** x_{i+1} pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

Toute fonction en escalier et toute fonction continue sont continues par morceaux.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.



ATTENTION ! Des fonctions aussi simples que la fonction inverse et la fonction logarithme ne sont pas continues par morceaux sur $[0, 1]$ quand bien même on les prolonge artificiellement en 0 car le prolongement ne pourra jamais se faire par continuité. L'exigence de prolongement par continuité de la définition n'est pas anodine.

3 – Norme infinie

Une norme est un outil mathématiques permettant de mesurer des « distances ». Une partie importante du programme de deuxième année y est consacrée. Il existe tout plein de normes en mathématiques, pas seulement celle que vous connaissez dans le plan ou l'espace.

L'idée de ce paragraphe est d'introduire une norme particulièrement importante, la norme infinie, qui permet de mesurer des « distances » entre fonctions.

Définition 27.8 – Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction bornée $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, on appelle **norme infinie** de f sur D et on note $\|f\|_\infty$, ou $\|f\|_{\infty,D}$ en cas d'ambiguïté, le réel :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} |f(x)|.$$

La bonne définition de la norme infinie d'une fonction BORNÉE découle bien sûr de la propriété de la borne supérieure. Le théorème des bornes atteintes montre quant à lui que toute fonction continue sur un segment y est bornée, donc possède une norme infinie.

Théorème 27.9

Pour toutes fonctions $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ bornées et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$: $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$,

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ (inégalité triangulaire).}$$

Démonstration. Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions bornées et $\lambda \in \mathbb{C}$.

- Pour commencer : $\|f\|_\infty = 0 \iff \forall x \in [a, b], \quad |f(x)| = 0$
  $\iff \forall x \in [a, b], \quad f(x) = 0 \iff f = 0.$
- Ensuite, pour tout $x \in D$: $|\lambda f(x)| = |\lambda| \times |f(x)| \leqslant |\lambda| \times \|f\|_\infty$, donc par définition de la borne supérieure : $\|\lambda f\|_\infty \leqslant |\lambda| \times \|f\|_\infty$ avec égalité si $\lambda = 0$. Inversement, si $\lambda \neq 0$, alors pour tout $x \in D$: $|f(x)| = \dfrac{1}{|\lambda|}|\lambda f(x)| \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$, donc $\|f\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$, et enfin $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty$.
- Enfin, pour tout $x \in D$: $|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ d'après l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\{|f(x) + g(x)| \mid x \in D\}$ est ainsi majoré par $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, donc par définition de la borne supérieure : $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

□

Théorème 27.10 – Caractère borné d'une fonction continue par morceaux

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée et possède donc une norme infinie $\|f\|_\infty$.

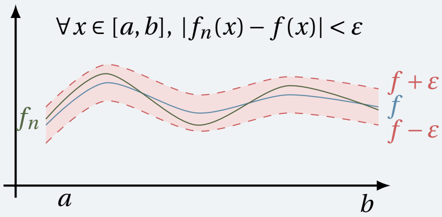
Démonstration. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Notons $(x_0,\dots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, le prolongement par continuité de la fonction réelle $|f|_{|]x_i,x_{i+1}[}$ à $[x_i,x_{i+1}]$ est borné d'après le théorème des bornes atteintes, disons par un certain M_i en valeur absolue. Le maximum des réels positifs $M_1,\dots,M_n$ et $|f(x_0)|,\dots,|f(x_n)|$ majore dès lors $|f|$ sur $[a,b]$ tout entier. □

ATTENTION ! Bornée oui... **MAIS ELLE N'ATTEINT PAS FORCÉMENT SES BORNES!** Faites un dessin.

4 – Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Définition 27.11 –
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$,

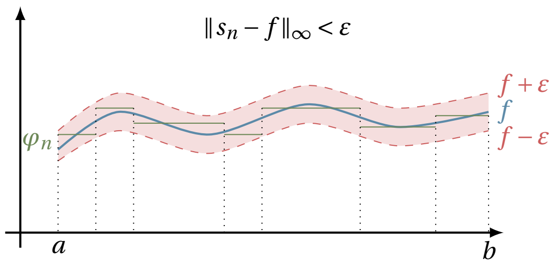
- Le réel $\|f-g\|_\infty=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ est appelé la **distance uniforme** entre f et g.
- On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues par morceaux sur $[a,b]$ **converge uniformément** vers f sur $[a,b]$ si $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f-f_n\|_\infty=0$.



Théorème 27.12 – Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Démonstration.



Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Il nous suffit de montrer que pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction $\varphi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{K}$ en escalier pour laquelle $\|f-\varphi\|_\infty\leqslant\varepsilon$. Si on veut ensuite une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut par exemple choisir $\varepsilon=2^{-n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Fixons donc $\varepsilon>0$.

- **Cas où f est continue sur $[a,b]$:** D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$, donc il existe un réel $\alpha>0$ pour lequel pour tous $x,y\in[a,b]$: $|x-y|<\alpha\implies|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Fixons un entier $n\in\mathbb{N}^*$ pour lequel $\dfrac{b-a}{n}<\alpha$ et posons pour tout $k\in[\![0,n]\!]$: $x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$.
Notons enfin φ la fonction définie sur $[a,b]$ par :
$$\forall i\in[\![0,n-1]\!],\quad\forall x\in[x_i,x_{i+1}[,\quad\varphi(x)=f(x_i)\quad\text{et}\quad\varphi(b)=f(b)$$
Par construction φ est en escalier sur $[a,b]$.
Il reste à vérifier que $\|f-\varphi\|_\infty\leqslant\varepsilon$. Or pour tout $x\in[a,b[$, x appartient à $[x_i,x_{i+1}[$ pour un certain $i\in[\![0,n-1]\!]$, donc $|x-x_i|<x_{i+1}-x_i<\alpha$, donc par continuité uniforme :
$$|f(x)-\varphi(x)|=\big|f(x)-f(x_i)\big|<\varepsilon,\qquad\text{et comme c'est vrai pour tout } x:\quad\|f-\varphi\|_\infty\leqslant\varepsilon.$$
- **Cas général :** Soit $(x_0,\dots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Grâce au point précédent, f étant continue sur $]x_i,x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1}, il existe pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$ une fonction en escalier $\varphi_i:[x_i,x_{i+1}]\longrightarrow\mathbb{K}$ pour laquelle pour tout $x\in]x_i,x_{i+1}[$: $\big|f(x)-\varphi_i(x)\big|\leqslant\varepsilon$. On en tire une fonction en escalier φ sur $[a,b]$ en « accolant » $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ les unes à la suite des autres, sauf aux points de subdivision où l'on pose $\varphi(x_i)=f(x_i)$ pour tout $i\in[\![0,n]\!]$. Ainsi $\|f-\varphi\|_\infty\leqslant\varepsilon$.

□

En vue d'une utilisation ultérieure, remarquez bien que dans cette preuve, si f est réelle positive, φ l'est aussi car les valeurs de φ ont été choisies comme des valeurs de f. A fortiori, dans ce cas, f est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier réelles positives.

III – Construction de l'intégrale

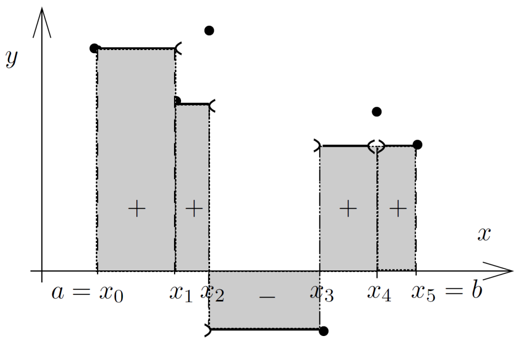
1 – Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 27.13 – Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$. Il est clair que la quantité $\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, y_i$ ne dépend pas de la subdivision σ choisie. On l'appelle **intégrale** de f sur $[a,b]$ et l'on note $\int_{[a,b]} f$ le réel

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, y_i.$$

Remarque 27.14 –

1. Géométriquement, $(x_{i+1} - x_i)\, y_i$ est égal à l'aire du rectangle limité par l'axe (Ox), les droites d'équations $x = x_i$ et $x = x_{i+1}$ et la droite d'équation $y = y_i$, affectée du signe + si ce rectangle est au dessus de (Ox) et du signe - dans le cas contraire.
2. Pour se persuader que la somme de dépend pas de la subdivision choisie, il suffit de considérer la subdivision « minimale »associée à f. Il est alors simple de voir que la somme ne change pas lorsque l'on rajoute un point à cette subdivision.



Proposition 27.15 – Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1. **Linéarité :** pour toutes fonctions f et g en escalier sur $[a,b]$, et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$$
2. **Positivité :** si f est une fonction en escalier positive sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.
3. **Croissance :** si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ et $f \leqslant g$, alors $\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.
4. **Additivité des intervalles :** soit $c \in]a,b[$ et f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Les restrictions de f à $[a,c]$ et $[c,b]$ sont des fonctions en escalier et
$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$
5. **Inégalité triangulaire et même mieux :** $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$.

Démonstration. Il suffit à chaque fois de revenir à la définition avec une subdivision adaptée, et pour le dernier point d'utiliser l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$. □

2 – Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Nous avons vu qu'il existe toujours une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ dont f est la limite uniforme. Par ailleurs, on vient de définir l'intégrale d'une fonction en escalier.
On aurait donc bien envie du coup de définir l'intégrale $\int_{[a,b]} f$ comme la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$ dans l'idée que l'aire algébrique sous φ_n tend vers l'aire algébrique sous f lorsque p tend vers $+\infty$. Cette « définition » pose hélas trois problèmes :

- La limite existe-t-elle ?
- Ne dépend-elle pas du choix de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
- Pour les fonctions en escalier, la limite obtenue coïncide-t-elle bien avec l'intégrale du paragraphe précédent ?

Définition-Théorème 27.16 – Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

Pour toute suite de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f, la suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite ne dépend pas du choix de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. converge et sa limite ne dépend pas du choix de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cette limite unique est appelée l'intégrale de f sur $[a,b]$ et notée $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$. En outre, si f est en escalier sur $[a,b]$, cette définition coïncide avec la précédente.

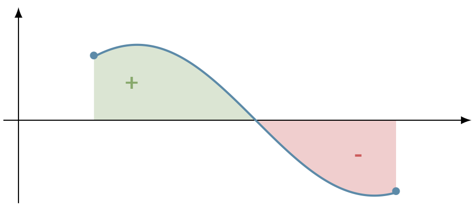
Démonstration.

- Soient $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ dont f est la limite uniforme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après les deux propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier déjà démontrées :
$$\left|\int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} \psi_n\right| = \left|\int_{[a,b]} (\varphi_n - \psi_n)\right| \leqslant (b-a)\,\|\varphi_n - \psi_n\|_\infty \leqslant (b-a)\left(\|f-\varphi_n\|_\infty + \|f-\psi_n\|_\infty\right) \qquad (\star)$$
Il en découle par encadrement que **SI JAMAIS** les suites $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\int_{[a,b]} \psi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, elles ont la même limite, indépendante de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Il reste à montrer que la suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f-\varphi_n\|_\infty = 0$, donc $\|f-\varphi_n\|_\infty \leqslant 1$ à partir d'un certain rang, et ainsi : $\|\varphi_n\|_\infty = \|\varphi_n - f + f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f-\varphi_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + 1$, donc :
$\left|\int_{[a,b]} \varphi_n\right| \leqslant \int_{[a,b]} |\varphi_n| \leqslant \int_{[a,b]} \left(\|f\|_\infty + 1\right) = (b-a)\left(\|f\|_\infty + 1\right)$. Bornée, la suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ possède alors une suite extraite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_{\theta(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.
Ainsi, d'après $(\star)$ appliquée à φ_n et $\varphi_{\theta(n)}$: $\left|\int_{[a,b]} \varphi_n - \int_{[a,b]} \varphi_{\theta(n)}\right| \leqslant (b-a)\left(\|f-\varphi_n\|_\infty + \|f-\varphi_{\theta(n)}\|_\infty\right)$, donc
$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n = \ell$ par encadrement.
- Que dire enfin si f est en escalier sur $[a,b]$? Nous pouvons dans ce cas poser $\varphi_n = f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et aussitôt $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f-\varphi_n\|_\infty = 0$. La limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$ se trouve ainsi égale à l'intégrale $\int_{[a,b]} f$ de f au sens des fonctions en escalier. Nos deux définitions de l'intégrale d'une fonction en escalier coïncident.

□

Remarque 27.17 –

Comme pour les fonctions en escalier, $\int_{[a,b]} f$ représente l'aire algébrique de la région du plan délimitée par l'axe (Ox), la courbe représentative de f et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, en affectant d'un signe + les parties situées au dessus de l'axe (Ox) et d'un signe − les parties situées en dessous.



On vous demandera souvent de « justifier la bonne définition » de telle ou telle intégrale. Il s'agit simplement de montrer que la fonction intégrée est continue - éventuellement par morceaux - sur le segment concerné. On notera notamment que les fonctions continues par morceaux incluent le cas des fonctions prolongeables par continuité.

Exemple 27.18 –

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.
En effet, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{sh}^2\, t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.
En effet, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh}^2\, t}{1-\cos t}$ est continue sur $]0,\pi]$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur 2 :
$\dfrac{\mathrm{sh}^2\, t}{1-\cos t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{\frac{t^2}{2}} \underset{t\to 0}{\sim} 2.$

3 – Propriétés

Théorème 27.19

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. **Linéarité :** Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$.
2. **Inégalité triangulaire :** $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.
3. **Relation de Chasles :** Pour tout $c \in [a,b]$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.
4. **Lien avec les parties réelle et imaginaire :** $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)$. En particulier, si f est réelle, son intégrale sur $[a,b]$ est un réel.
5. **Modification d'un nombre fini de valeurs :** Si f et g sont égales sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points :
$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g.$$

Démonstration. Les propriétés se démontrent toutes de la même façon. On la prouve d'abord pour les fonctions en escalier, puis dans le cas général par passage à la limite. □

Théorème 27.20 – Cas d'une fonction à valeurs réelles

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. **Positivité :** Si $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.
2. **Croissance :** Si $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

Démonstration.

1. Le premier point se démontre en considérant une suite de fonctions en escalier **positives** qui converge uniformément vers f puis en passant à la limite.
2. Comme $f \leqslant g$: $\displaystyle\int_{[a,b]} (g-f) \geqslant 0$ par positivité, puis $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$ par linéarité.

□

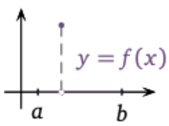
Remarque 27.21 – L'intégrale sur $[a,b]$ de la fonction nulle sur $[a,b]$ vaut 0.

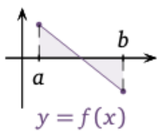
Théorème 27.22 – Intégrale nulle d'une fonction de signe constant

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, de signe constant sur tout le segment $[a,b]$ et telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a,b]$.

ATTENTION ! Continuité et signe constant sont essentiels dans la dernière assertion !

Ici, f est de signe constant et d'intégrale nulle, MAIS n'est pas nulle sur tout $[a,b]$ par manque de continuité.





Ici, f est continue et d'intégrale nulle, MAIS n'est pas nulle sur tout $[a,b]$ car elle n'y est pas de signe constant.

Démonstration. On fait la démonstration dans le cadre d'une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

On raisonne par contraposition : on suppose que f n'est pas partout nulle sur $[a,b]$ et l'on démontre qu'alors f n'est pas d'intégrale nulle sur $[a,b]$.

Supposons que f ne soit pas partout nulle sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, elle est alors strictement positive su un voisinage de c. Quitte à changer de c, on peut supposer que $c \in]a, b[$. Comme f est continue, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]c - \eta, c + \eta[, \ f(x) \geqslant \frac{f(c)}{2}.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{c-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c-\eta}^{c+\eta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_{c-\eta}^{c+\eta} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 2\eta\frac{f(c)}{2} > 0.\end{aligned}$$

Ainsi l'intégrale de f est non nulle. Le théorème est démontré. □

On étend à présent un chouïa la notation $\int_{[a,b]} f$ dans laquelle on imposait toujours $a \leqslant b$ - on intégrait toujours « dans le bon sens ». Pour tous f continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\alpha, \beta \in [a, b]$, on pose :

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int_{[\alpha,\beta]} f & \text{si } \alpha \leqslant \beta \\ \displaystyle -\int_{[\beta,\alpha]}^{\beta} f & \text{si } \beta < \alpha. \end{cases}$$

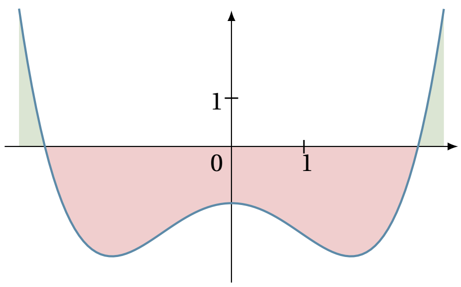
Cette nouvelle notation s'utilise comme la précédente, mais attention, avec un petit changement quand même en cas d'inégalités. Si $\beta < \alpha$: $\left|\int_\alpha^\beta f\right| \leqslant \int_\beta^\alpha |f|$ et si de plus $f \geqslant 0$: $\int_\alpha^\beta f \leqslant 0$.

Nous admettrons les résultats qui suivent pour gagner du temps - ils se démontrent facilement dans le cas continu à l'aide de la formule de changement de variable, et il faut ensuite les étendre au cas des fonctions continues par morceaux.

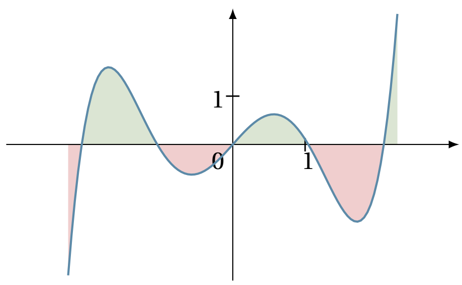
Théorème 27.23 – Intégrale d'une fonction paire/impaire

Soit $a > 0$ et f une fonction continue par morceaux sur $[-a, a]$.
Si f est paire : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$, et si f est impaire : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Graphe d'une fonction paire



Graphe d'une fonction impaire



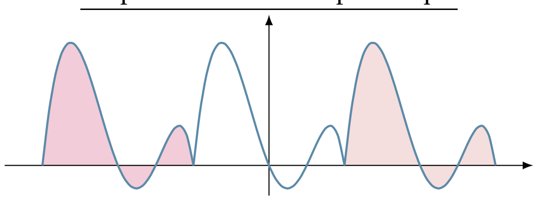
Théorème 27.24 – Intégrale d'une fonction périodique

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue par morceaux et périodique de période $T > 0$. Pour tous a, b réels, on a

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui signifie que l'intégrale de f sur tout segment de longueur T est la même.

Graphe d'une fonction périodique

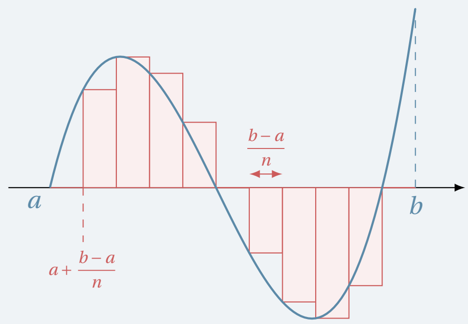


IV – Sommes de Riemann

Définition 27.25 –

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et n un entier strictement positif. Si on partage le segment $[a,b]$ en n intervalles de même longueur à l'aide de la subdivision $\left(a+i\,\dfrac{b-a}{n}\right)_{i\in[\![0,n]\!]}$, on appelle **somme de Riemann** correspondant à cette subdivision la somme

$$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right).$$



Remarque 27.26 –

1. On peut également choisir pour somme de Riemann la somme $S_n'=\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right)$,

   ce qui revient à choisir l'extrémité de droite de chacun des segments de longueur $\dfrac{b-a}{n}$ pour tracer les rectangles.
2. Dans chaque cas, une somme de Riemann est l'intégrale d'une fonction en escalier sur $[a,b]$.

Théorème 27.27 – Convergence des sommes de Riemann

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes de Riemann d'une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$ converge vers l'intégrale de f sur $[a,b]$, autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En particulier, pour toute fonction f continue par morceaux sur le segment $[0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 27.28 – La convergence vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a lieu aussi pour la suite (S_n').

Démonstration du théorème dans le cas particulier où f est lipschitzienne. On suppose que f est lipschitzienne sur $[a,b]$. On note M un réel positif ou nul tel que

$$\forall x,y\in[a,b],\quad |f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|.$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+i\,\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\,\frac{b-a}{n}}f\left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right)\mathrm{d}x$$

donc en utilisant ce qui précède et la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-S_n\right|&=\left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+i\,\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\,\frac{b-a}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+i\,\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\,\frac{b-a}{n}}f\left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a+i\,\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\,\frac{b-a}{n}}\left[f(x)-f\left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right)\right]\mathrm{d}x\right|\qquad\text{(linéarité de l'intégrale).}\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire puis la majoration classique de la valeur absolue d'une intégrale, on obtient alors successivement

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-S_n\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{a+i\,\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\,\frac{b-a}{n}}\left[f(x)-f\left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right)\right]\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+i\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\frac{b-a}{n}} \left| f(x) - f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) \right| \mathrm{d}x.$$

Puisque f est M-lipschitzienne sur $[a,b]$, on a que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ et $x \in \left[a+i\dfrac{b-a}{n}, a+(i+1)\dfrac{b-a}{n}\right]$,

$$\left| f(x) - f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) \right| \leqslant M\left| x - \left(a+i\frac{b-a}{n}\right) \right| \leqslant M\frac{b-a}{n}$$

et donc par croissance de l'intégrale

$$\int_{a+i\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\frac{b-a}{n}} \left| f(x) - f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) \right| \mathrm{d}x \leqslant \int_{a+i\frac{b-a}{n}}^{a+(i+1)\frac{b-a}{n}} M\frac{b-a}{n}\,\mathrm{d}x = M\left(\frac{b-a}{n}\right)^2.$$

Ainsi, on obtient

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n \right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M\left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$

donc

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_n \right| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{n}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M\frac{(b-a)^2}{n} = 0$, par le théorème des gendarmes, on obtient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Remarque 27.29 – Le cas lipschitzien inclus le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$. En effet, dans ce cas, f' est continue sur un segment, donc bornée par théorème des bornes atteintes, et l'inégalité des accroissements finis nous dit alors que f est lipschitzienne.

Grâce aux sommes de Riemann, il est possible de calculer des valeurs approchées d'intégrales mais cette méthode n'est pas très performante (en termes de rapidité de convergence). Cependant, les sommes de Riemann sont utiles pour trouver la limite de certaines suites.

Application 27.30 – Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Méthode 27.31 –

Pour ce genre d'exercice, il s'agit de transformer l'expression de u_n pour l'écrire sous la forme

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

où f est une fonction continue. Ainsi on considère u_n comme une somme de Riemann de f entre 0 et 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \times \frac{n}{1+\frac{k^2}{n^2}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

où on a posé $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$. Alors, d'après le Théorème 27.27, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{\pi}{4}$.

V – Lien entre intégrale et primitive

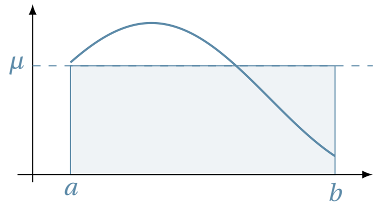
1 – Théorème fondamental de l'analyse

Dans toute cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Définition 27.32 – Soit f une fonction continue sur un segment $I = [a, b]$ avec $a < b$. On appelle **valeur moyenne** de f sur I le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 27.33 – La valeur moyenne μ de f est égale à la valeur de la fonction constante sur $[a, b]$ qui a la même intégrale que f sur $[a, b]$. Autrement dit, c'est la longueur du côté du rectangle dont l'autre côté est $[a, b]$ et qui a même aire que l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. (cf figure ci-contre)



Lemme 27.34 – La valeur moyenne d'une fonction continue est atteinte

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ (où $a < b$) et $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_{[a,b]} f$ sa valeur moyenne sur $[a, b]$. Il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mu$.

Démonstration. Sur le segment $[a, b]$, la fonction f est continue donc elle est bornée sur $[a, b]$ et $f([a, b]) = \left[\inf\limits_{[a,b]} f, \sup\limits_{[a,b]} f\right]$. On sait que $\inf\limits_{[a,b]} f \leqslant f \leqslant \sup\limits_{[a,b]} f$ (Image d'un segment par une fonction continue). Par croissance de l'intégrale sur $[a, b]$ et en divisant par le nombre positif $b - a$, on obtient

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} \inf_{[a,b]} f \leqslant \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f \leqslant \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} \sup_{[a,b]} f$$

c'est-à-dire $\inf\limits_{[a,b]} f \leqslant \mu \leqslant \sup\limits_{[a,b]} f$ donc $\mu \in f([a, b])$ et donc il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mu$. □

Théorème 27.35 – Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et a un point de I. La fonction F_a définie par :

$$\forall x \in I,\ F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur I. C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration. La fonction f étant continue sur I, la fonction F_a est bien définie sur I. Nous allons montrer que F_a est dérivable en tout point x de I et que $F_a'(x) = f(x)$.

Soit $x \in I$. Pour tout réel h non nul tel que $x + h \in I$, on a

$$\begin{aligned}\frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ce quotient est donc la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[x, x+h]$ (ou $[x+h, x]$ si $h < 0$).

Comme f est continue, cette valeur moyenne est atteinte en un point c_h compris entre x et $x + h$ et

$$\frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(c_h) \text{ avec } |c_h - x| \leqslant h.$$

Ainsi, lorsque h tend vers 0, c_h tend vers x et puisque f est continue en x, $f(c_h)$ tend vers $f(x)$. Par conséquent, la limite du quotient précédent existe et

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x).$$

On a démontré que F_a est dérivable en x de dérivée $F_a'(x) = f(x)$ donc F_a est une primitive de f sur I.

Il est clair que F_a s'annule en a. Si G est une autre primitive de f sur I, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $G = F_a + C$. En particulier, on a $G(a) = C$, de sorte que G s'annule en a si, et seulement si, $C = 0$. Il en résulte que F_a est l'unique primitive de f qui s'annule en a. □

Corollaire 27.36 – Primitives des fonctions continues

1. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle.
2. Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. Pour toute primitive F de f sur I,
$$\forall x \in I,\ \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$
3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $a \in I$. Pour tout $x \in I$, $f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration.
1) Évident avec le théorème précédent.
2) D'après la preuve du théorème précédent, pour tout $x \in I$, $F(x) = F_a(x) + F(a)$, i.e $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + F(a)$ et le résultat en découle immédiatement.
3) C'est une conséquence du point précédent, f étant une primitive de f' sur I. □

Le calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment se ramène, à chaque fois que c'est possible, à la recherche d'une primitive de cette fonction. Dans certains cas, l'expression d'une primitive peut être très compliquée et il se peut aussi qu'une primitive ne puisse pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles, il faut alors définir de nouvelles fonctions (cf. la définition du logarithme népérien).

Méthode 27.37 – Montrer qu'une fonction définie par une intégrale est de dérivable et calculer sa dérivée
On considère deux fonctions u et v définies sur I et f une fonction continue. On s'intéresse à la fonction φ définie sur I par
$$\varphi : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$
Puisque f est continue, elle admet une primitive F. On a alors, pour tout $x \in I$,
$$\varphi(x) = [F(x)]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x)).$$
Si u et v sont dérivables sur I, comme F est dérivable aussi sur I (en tant que primitive), on obtient avec la formule de dérivation d'une composée,
$$\varphi'(x) = v'(x) \cdot F'(v(x)) - u'(x) \cdot F'(u(x))$$
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = v'(x) \cdot f(v(x)) - u'(x) \cdot f(u(x))}$$

Exemple 27.38 – On considère $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner l'expression de sa dérivée.
La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{1+t^2}}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue par opérations sur les fonctions continues. Ainsi, g a des primitives sur $\mathbb{R}$. Notons G une de ces primitives. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\varphi(x) = \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = G(x) - G(-x)$$
G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\varphi'(x) = G'(x) + G'(-x) = g(x) + g(-x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exemple 27.39 – Pour tout réel x, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} \exp(\mathrm{Arctan}(t^2+t))\,\mathrm{d}t$.
Montrer que f est correctement définie sur $\mathbb{R}$, dérivable, et calculer sa dérivée
La fonction $g : t \mapsto \exp(\mathrm{Arctan}(t^2+t))$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue car c'est une composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $f(x)$ est bien défini quel que soit x réel.
Ainsi, g a des primitives sur $\mathbb{R}$. Notons G une de ces primitives. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} \exp(\mathrm{Arctan}(t^2+t))\,\mathrm{d}t = G(\cos(x)) - G(\sin(x))$$

G, cos et sin sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = -\sin(x)g(\cos(x)) - \cos(x)g(\sin(x)).$$

VI – Formules de Taylor

1 – La formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 27.40 – Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Pour tous réels a et b dans I,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$ la propriété : «pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et tous réels a et b dans I,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.\text{»}$$

• $\mathcal{H}_0$ est vraie : si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a déjà vu que pour tout a et b dans I,

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{0} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I et soit a et b deux réels dans I. La fonction f est en particulier de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et on peut utiliser l'hypothèse de récurrence :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On intègre par parties le terme complémentaire (la fonction $f^{(n+1)}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur I) :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et le résultat est démontré au rang $n+1$. □

Théorème 27.41 – Formule de Taylor avec reste intégral en 0

Soit I un intervalle contenant 0. Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.

$$\text{Pour tout } x \in I, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t.$$

Exemple 27.42 – En appliquant à la fonction cosinus la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, montrer que $\forall x \in [-\pi, \pi],\ \cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$ En appliquant à la fonction cosinus la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, on obtient : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Comme la fonction sinus est positive sur $[0;\pi]$ et négative sur $[-\pi;0]$,

$$\forall x \in [-\pi;\pi],\ \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \sin(t)\, \mathrm{d}t \geqslant 0$$

ce qui donne :

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ \cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}\,.$$

2 – Inégalité de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor avec reste intégral est exacte mais le reste intégral n'est pas très maniable. Or il nous suffit souvent de connaître une majoration du reste. C'est ce que donne l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Théorème 27.43 – Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $(a,b) \in I^2$. Si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment d'extrémités a et b, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration. C'est un corollaire de la formule de Taylor avec reste intégral. Supposons que $a \leqslant b$. Si l'on applique cette formule à f sur I, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| &= \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)|\, \mathrm{d}t \\
&\leqslant M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\, \mathrm{d}t \\
&= M \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^b \\
&= M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Le cas où $b \leqslant a$ se démontre de façon similaire. □

Remarque 27.44 – Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un segment dans le théorème précédent, l'existence de M est assurée. On peut choisir en particulier $M = \sup\limits_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$.

Théorème 27.45 – Inégalité de Taylor-Lagrange en 0

Soit I un intervalle contenant 0. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $x \in I$. Si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment d'extrémités 0 et x, alors

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\right| \leqslant M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemple 27.46 – Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 à la fonction sinus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}\right| \leqslant \frac{x^4}{24} \qquad \text{puisque :} \qquad \forall u \in \mathbb{R}, \ |\sin^{(4)}(u)| = |\sin(u)| \leqslant 1.$$

Corollaire 27.47 – Développement en série entière de exp

Quel que soit le réel x, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa somme est égale à $\exp(x)$, ce qu'on peut écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

Démonstration. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

La fonction exponentielle étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre en 0. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{lll} \text{si } x \geqslant 0 & \forall y \in [0,x], & |\exp^{(n+1)}(y)| = |\mathrm{e}^y| \leqslant \mathrm{e}^x \\ \text{si } x \leqslant 0 & \forall y \in [x,0], & |\exp^{(n+1)}(y)| = |\mathrm{e}^y| \leqslant 1 \end{array}$$

Dans tous les cas, en notant I_x le segment d'extrémités 0 et x, on a : $\forall y \in I_x$, $|\exp^{(n+1)}(y)| \leqslant M$ où $M = \max(\mathrm{e}^x, 1)$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(0)\right| = \left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Le second membre de cette inégalité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ d'où le résultat. $\square$