26 | Probabilités élémentaires

In flying, the probability of survival is inversely proportional to the angle of arrival.

Neil Armstrong, 1930-2012

I – Vocabulaire probabiliste

Le but est ici de reprendre le vocabulaire des probabilités, vu en classe de terminale, et d'établir le lien avec une vision ensembliste.

Définition 26.1 – On considère qu'il est possible d'associer à une expérience aléatoire un ensemble qui contient tous les résultats possibles de l'expérience. Cet ensemble est appelé **univers** et souvent noté Ω.

Exemple 26.2 –

- On lance un dé à six faces (sous-entendu, les faces portent les numéros 1,2,3,4,5 et 6, et on considère que le résultat de l'expérience est le numéro qui apparaît sur la face du dessus). On peut choisir comme univers l'ensemble $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ (on aurait aussi pu choisir $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,42\}$ même si 42 est un résultat qui n'a « aucune chance » d'être obtenu).
- On lance une pièce de monnaie. On peut choisir comme univers $\Omega = \{\text{pile},\text{face}\}$.
- On met en route une machine et on considère le nombre total de jours de fonctionnement de cette machine avant qu'elle ne tombe en panne. Un univers possible est ici $\Omega = \mathbb{N}^*$.

Remarque 26.3 – Dans le troisième exemple, l'univers n'est pas un ensemble fini. Cette année, on ne s'intéressera qu'aux expériences pouvant être modélisées par un univers fini.

Nous tricherons parfois un peu dans certains exercices. Cette restriction du programme aux univers finis est uniquement technique. La théorie des probabilités sur un univers quelconque est techniquement délicate et vous la découvrirez un peu en deuxième année - mais juste un peu. L'ennui bien sûr, c'est qu'en limitant la taille des univers, on limite drastiquement le nombre des expériences aléatoires autorisées. Il nous sera par exemple impossible en MPSI :

- de jouer à pile ou face **INDÉFINIMENT** ,
- de jouer aux fléchettes contre un disque de rayon 2 et de calculer la probabilité d'atterrir dans le disque central de rayon 1 , intuitivement égale au quotient d'aires $\dfrac{\pi \times 1^2}{\pi \times 2^2} = \dfrac{1}{4}$ - mais comment le justifier ?

Définition 26.4 – On appelle **événement** toute partie de l'univers Ω. À l'issue d'une expérience aléatoire, on dit que l'événement A est **réalisé** lorsque le résultat de l'expérience est un élément de la partie A.

Exemple 26.5 –

- On lance un dé à 6 faces, et on associe à l'expérience l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]$. On considère l'événement $A =$« on obtient un nombre pair ». On a ainsi $A = \{2,4,6\}$, qui est bien une partie de Ω.
- On lance simultanément deux dés à 6 faces distinguables (un rouge et un vert, par exemple). Le résultat de l'expérience est le couple (valeur lue sur le dé rouge, valeur lue sur le dé vert). Un univers possible pour cette expérience est $[\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!] = [\![1,6]\!]^2$. On considère les événements $A =$« la somme des points obtenus vaut 7 » et $B =$« le plus petit des nombres obtenus est 3 ».
  Les événements A et B sont les parties suivantes de Ω :

  $A =$ et $B =$

Définition 26.6 – L'événement Ω est appelé l'événement **certain** (il est toujours réalisé). L'évènement $\varnothing$ est appelé l'événement **impossible** (il n'est jamais réalisé). Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, les singletons $\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\}$ sont appelés les **événements élémentaires**.

Exemple 26.7 – Lors d'un lancer de dé à 6 faces, l'événement A =« obtenir 6 » est l'événement élémentaire $A = \{6\}$, l'événement B =« obtenir un nombre à la fois pair et strictement inférieur à 2 » est l'événement impossible $B = \varnothing$, et l'événement C =« obtenir un nombre pair ou un nombre impair » est l'événement certain $C = \Omega$.

Remarque 26.8 – Soit Ω un univers fini. L'ensemble de tous les événements est alors l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$. Vous verrez l'an prochain que lorsque l'univers est infini, la situation est plus compliquée et qu'on ne peut considérer qu'une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ comme ensemble des évènements.

Définition 26.9 – Soient A et B deux événements d'un univers Ω.

1. $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$ est l'« **événement contraire** » de A.
2. $A \cup B$ est l'événement « A **ou** B ».
3. $A \cap B$ est l'événement « A **et** B ».
4. $A \setminus B = \{\omega \in A \mid \omega \notin B\}$ est l'événement « A **mais pas** B ».

Exemple 26.10 – Dans le lancer de deux dés à 6 faces (avec $\Omega = [\![1,6]\!]^2$), on considère à nouveau les événements A =« la somme des nombres obtenus vaut 7 » et B =« le plus petit des nombres obtenu est 3 ».

- L'événement $A \cup B$ est
- L'événement $A \cap B$ est
- L'événement $A \setminus B$ est

La théorie des probabilités nous mettra généralement en présence d'événements plus compliqués à décrire que de simples « A ou B » ou « A et B ». Nous aurons par exemple affaire à des réunions d'intersection qui vous paniqueront au départ, mais que vous trouverez vite naturelles.

Exemple 26.11 – On lance une pièce n fois successivement. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note F_k l'événement « On obtient face au k-ième lancer ». Les événements $F_1, \dots, F_n$ sont en quelque sorte les événements les plus basiques auxquels cette expérience aléatoire nous confronte. Il paraît raisonnable que tout événement puisse être écrit en fonction d'eux. Par exemple :

- l'événement A « On obtient pile au moins une fois au cours des n lancers » peut être écrit $A = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} \overline{F_k}$,
- l'événement B « On n'obtient jamais pile » peut être écrit $B = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} F_k$,
- et l'événement C « On obtient deux faces consécutifs au cours des n lancers » peut être écrit $C = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1} (F_k \cap F_{k+1})$.

Définition 26.12 – Soient A et B deux événements d'un univers Ω.

- On dit que « A **implique** B » lorsque $A \subset B$.
- On dit que « A et B sont **incompatibles** » lorsque $A \cap B = \varnothing$. Deux événements incompatibles sont deux événements qui ne peuvent pas être tous les deux réalisés à l'issue de l'expérience aléatoire.

Exemple 26.13 –

- Un événement A et son contraire $\overline{A}$ sont incompatibles.
- Dans le lancer de deux dés à 6 faces, les événements A =« la somme des nombres obtenus vaut 7 » et C =« les deux numéros obtenus sont pairs » sont incompatibles car $A \cap C = \varnothing$.

Remarque 26.14 – Si deux événements A et B sont incompatibles, A implique $\overline{B}$ et B implique $\overline{A}$.

Définition 26.15 – Soient E_1, $E_2, \dots,$ E_n des événements d'un univers Ω. On dit que $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ est **un système complet d'événements** lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. les événements E_k (où $k \in [[1, n]]$) sont deux à deux incompatibles. $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, si $i \neq j$, alors $E_i \cap E_j = \varnothing$.
2. La réunion de ces évènements donne Ω. C'est-à-dire $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \Omega$.

Remarque 26.16 – C'est la traduction probabiliste de la notion de recouvrement disjoint.
Si aucun des événements E_k n'est vide, la notion de système complet d'événements coïncide avec celle de partition de Ω.

Reprenons le lancer de deux dés à 6 faces, pour lequel $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Considérons,

Exemple 26.17 –

- Un événement A et son contraire $\overline{A}$ forment un système complet d'événements.
- L'ensemble $\Big\{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}\Big\}$ des événements élémentaires de l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ est aussi un système complet d'événements.
- On considère une succession de n lancers d'une pièce à pile ou face. Le résultat de cette expérience est un $n-$uplet constitué d'éléments de {pile,face}. L'univers est ici $\Omega = \{\text{pile,face}\}^n$. On note, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, P_k l'événement « le k-ième lancer est un Pile », A_k l'événement « le premier Pile apparaît au k-ième lancer » et A_∞ l'événement « Pile n'apparaît jamais »
  1. L'ensemble $\{P_1, \dots, P_n\}$ est-il un système complet d'événements ?
  2. L'ensemble $\{A_1, \dots, A_n\}$ est-il un système complet d'événements ?
  3. L'ensemble $\{A_\infty, A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est-il un système complet d'événements ?

On récapitule toutes ces notions dans le tableau suivant :

Terminologie probabiliste	**Terminologie ensembliste**	**Notation**
événement certain	ensemble dans sa totalité	Ω
événement impossible	ensemble vide	$\emptyset$
événement élémentaire	singleton	$\{\omega\}$
événement A	ensemble A	$A \subset \Omega$
événement contraire de A	complémentaire de A	$\overline{A} = \Omega \setminus A$
A ou B	A union B	$A \cup B$
A et B	A inter B	$A \cap B$
A mais pas B	A privé de B	$A \setminus B$
A implique B	A inclus dans B	$A \subset B$
A et B incompatibles	A et B disjoints	$A \cap B = \emptyset$
ω réalise A	ω appartient à A	$\omega \in A$

II – Probabilités

Le concept d'expérience aléatoire décrit des situations susceptibles de conduire à plusieurs résultats, mais rien ne nous permet pour le moment de mesurer la **VRAISEMBLANCE** de ces résultats les uns par rapport aux autres. Nous allons associer dans ce paragraphe à tout événement d'une expérience aléatoire une *probabilité*, i.e. un réel compris entre 0 et 1 dont la valeur 0 représente le plus bas niveau de vraisemblance et la valeur 1 le niveau le plus élevé.

Dans toute la suite du chapitre, Ω désigne un ensemble fini et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

Définition 26.18 – On appelle **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant

$$P(\Omega) = 1 \text{ et pour tous événements incompatibles } A \text{ et } B, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A)$ est appelée **probabilité de l'événement** A.
Le couple (Ω, P) est alors appelé un **espace probabilisé** (fini).

ATTENTION ! Pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\boxed{0 \leqslant P(A) \leqslant 1.}$ On vérifie donc **SYSTÉMATIQUEMENT** que le résultat d'un calcul de probabilité est bien un nombre compris entre 0 et 1. Pensez aux chatons !

Exemple 26.19 – On considère le lancer d'une pièce de monnaie qui donne pile avec une fréquence $p \in [0,1]$ et face avec une fréquence $1 - p \in [0,1]$.

Remarque 26.20 – Dans l'exemple précédent, on a dû donner la probabilité de tous les événements appartenant à $\mathcal{P}(\Omega)$. On verra plus loin qu'on peut définir correctement une probabilité P sans être aussi exhaustif.

Vocabulaire. Deux événements qui ont la même probabilité sont dits **équiprobables**.

1 – Exemple fondamental : la probabilité uniforme

Définition 26.21 – Soit Ω un univers fini non vide. On appelle **probabilité uniforme** sur Ω l'application

$$P : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \dfrac{\operatorname{Card}(A)}{\operatorname{Card}(\Omega)} \end{array}.$$

Proposition 26.22 – Une probabilité uniforme est une probabilité

L'application définie ci-dessus est bien une probabilité sur Ω.

Démonstration.

□

Remarque 26.23 – La définition de la probabilité uniforme donne : $\forall \omega \in \Omega,\ P\big(\{\omega\}\big) = \dfrac{1}{\operatorname{Card}(\Omega)}$,

ce qui signifie que tous les événements élémentaires sont équiprobables. On verra plus loin que c'est la seule probabilité sur Ω qui a cette propriété. On pourra retenir qu'en pratique, pour la probabilité uniforme :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables pour } A}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

On utilise cette probabilité lorsque toutes les issues de l'expérience on la même « chance » de se produire. Dans les énoncés, cela se traduit par l'utilisation de termes comme « choix au hasard », « dé non truqué », pièce « équilibrée », etc. Les calculs avec la probabilité uniforme font appel aux techniques de dénombrement.

Exemple 26.24 – On range au hasard les n tomes ($n \geqslant 1$) d'une encyclopédie sur une étagère. On désire connaître la probabilité que les tomes 1 et 2 soient côte à côte et dans cet ordre.

2 – Propriétés de base

Proposition 26.25 – Propriétés des probabilités

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P).

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. $P(\varnothing) = 0$.

3. $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.

4. Si $A \subset B$, alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

5. Si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$.

On dit que la probabilité est une application **croissante** pour la relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Démonstration.

□

Méthode 26.26 –
La propriété 1. s'appelle le « passage au contraire ». Elle est bien pratique lorsque l'on cherche la probabilité d'un événement qui est décrit par la locution « au moins un » ou « au plus un ».

Exemple 26.27 – On lance deux dés à 6 faces discernables et non pipés. Déterminer la probabilité qu'un des deux au moins donne un chiffre pair.

Exemple 26.28 – Le panier de balles d'un entraîneur de tennis contient 60 balles dont 17 balles sont dans un état correct (les autres étant bonnes pour le chien). L'entraîneur choisit 7 balles pour un exercice au panier. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une balle correcte parmi les 7 ?

Proposition 26.29 – Propriété d'une union disjointe

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé (Ω, P).
Si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, alors

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Démonstration. Le résultat se démontre à l'aide d'une simple récurrence, en utilisant le fait que si les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont deux à deux incompatibles, alors $(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ et A_{n+1} sont aussi incompatibles. □

Corollaire 26.30 – Probabilité de somme 1

Soit (Ω, P) un espace probabilisé.

1. Si $\{E_1, \ldots, E_n\}$ est un système complet d'événements, alors $\sum_{k=1}^{n} P(E_k) = 1$.
2. Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, alors $\sum_{k=1}^{n} P(\{\omega_k\}) = 1$, autrement dit la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

Démonstration. Pour 1., on utilise la proposition précédente, avec $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Pour 2., on utilise le fait que les événements élémentaires forment un système complet. □

Proposition 26.31 – Formule de Poincaré

Soient A et B deux événements. Dans le cas où les deux événements ne sont pas incompatibles,
la probabilité de l'union est donnée par $P\big(A \cup B\big) = P\big(A\big) + P\big(B\big) - P\big(A \cap B\big)$.

Démonstration.

□

3 – Construction de probabilités sur un univers fini

Définition 26.32 – On appelle **distribution de probabilités** sur un ensemble fini E toute famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1.

Théorème 26.33 – Probabilité définie par une distribution

Soit Ω un univers fini et $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une distribution de probabilités sur Ω.

Il existe une et une seule probabilité P sur Ω vérifiant : $\forall \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = p_\omega$. On calcule la probabilité d'un événement A par la formule : $P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$.

Démonstration.

- ▷ **Analyse** : Soit P une probabilité sur Ω. Supposons que P vérifie : $\forall \omega \in \Omega,\ P\big(\{\omega\}\big) = p_\omega$.
  Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. On a

$$P(A) = P\underbrace{\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right)}_{\text{evts 2 à 2 incpt}} = \sum_{\omega \in A} P\big(\{\omega\}\big) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

  Donc si une telle probabilité existe, elle est unique.

▷ **Synthèse** : Montrons que l'application $P : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0;1] \\ A & \longmapsto & \sum_{\omega\in A} p_\omega \end{array}$ définit bien une probabilité sur Ω.

- Déjà, P est correctement définie, car pour tout $A\in\mathcal{P}(\Omega)$, on a $0 \leqslant \sum_{\omega\in A} p_\omega \leqslant \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.
- Ensuite, on a bien $P(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.
- Si A et B sont deux événements incompatibles,

$$P(A\cup B) = \sum_{\omega\in A\cup B} p_\omega = \left(\sum_{\omega\in A} p_\omega\right) + \left(\sum_{\omega\in B} p_\omega\right) = P(A) + P(B).$$

- Enfin, pour tout $\omega_0\in\Omega$, on a :

$$P\big(\{\omega_0\}\big) = \sum_{\omega\in\{\omega_0\}} p_\omega = p_{\omega_0}.$$

□

Corollaire 26.34 – Probabilité définie par ses valeurs sur les événements élémentaires

Pour définir complètement une probabilité, il suffit de définir la probabilité de chacun des événements élémentaires.

Exemple 26.35 –

- Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. L'unique probabilité telle que $\forall k\in[\![1,n]\!],\ P\big(\{\omega_k\}\big) = \dfrac{1}{n}$ est la probabilité uniforme sur Ω.
- Un dé est truqué pour que le 6 apparaisse deux fois plus souvent que les autres faces qui, elles, ont toutes la même probabilité de tomber. Calculer $P\big(\{4,5,6\}\big)$.
- Soit $\Omega = [\![1,n]\!]$. Montrer qu'on peut définir une probabilité P sur Ω, en posant : $\forall k\in\Omega,\ P\big(\{k\}\big) = \dfrac{4k^3}{n^2(n+1)^2}$.

III – Probabilités conditionnelles

1 – Introduction

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Faisons l'hypothèse qu'un certain événement B est réalisé. Cette hypothèse modifie a priori la vraisemblance de tous les événements du contexte étudié. Il paraît par exemple raisonnable de considérer que, sous cette hypothèse, B est réalisé « avec probabilité 1 » et que $\overline{B}$ l'est « avec probabilité nulle », pourtant il est faux a priori que $P(B) = 1$ et $P(\overline{B}) = 0$. Comment tenir compte de notre hypothèse sur B ? La probabilité P mesure la vraisemblance de tout événement, mais ceci avant toute hypothèse selon laquelle B est réalisé. Sous cette hypothèse, une autre mesure de vraisemblance doit être introduite, une autre probabilité sur Ω que nous noterons P_B et qu'on appelle la probabilité conditionnelle sur Ω sachant B. C'est pour cette nouvelle probabilité que $P_B(B) = 1$ et $P_B(\overline{B}) = 0$.

Considérons un exemple éclairant un peu la manière dont on va définir la probabilité P_B.

Exemple 26.36 – Il y a, au lycée Malherbe, 200 élèves en filière MPSI-MP. Chacun a sa matière scientifique préférée, selon la répartition ci-dessous. On choisit un élève au hasard dans le lycée.

1. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
2. Quelle est la probabilité que ce soit une fille et qu'elle préfère la SI ?
3. On croise une étudiante dans le couloir. Quelle est la probabilité qu'elle préfère la SI ?
4. On sélectionne un fan de SI au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

	Garçons	Filles	Total
Maths	108	22	130
SI	10	3	13
Info	12	4	16
Physique	30	11	41
Total	160	40	200

2 – Définitions et propriétés

Définition 26.37 – Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement tel que $P(A) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A** le nombre, noté $P_A(B)$ (parfois également $P(A \mid B)$), défini par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple 26.38 – On lance un dé cubique équilibré. On considère les événements suivants :

- A : "obtenir un nombre inférieur à 3",
- B : "obtenir un 5",
- C : "obtenir un 2".

Calculer $P_A(B)$ et $P_A(C)$ de deux façons différentes.

Proposition 26.39 – P_A est une probabilité

Soit A un événement de probabilité non nulle de (Ω, P).

L'application $P_A : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longmapsto & P_A(B) \end{array}$ est une probabilité sur Ω appelée la probabilité conditionnelle sachant E.

Démonstration.

□

Corollaire 26.40 – Propriétés de P_A

Soient A un événement de probabilité non nulle et B_1 et B_2 deux événements de (Ω, P).

1. $P_A(\overline{B_1}) = 1 - P_A(B_1)$.
2. $P_A(B_2 \setminus B_1) = P_A(B_2) - P_A(B_1 \cap B_2)$.
3. $P_A(B_1 \cup B_2) = P_A(B_1) + P_A(B_2) - P_A(B_1 \cap B_2)$.

Démonstration. Tout cela découle immédiatement du fait que P_A est une probabilité. □

3 – Formule des probabilités composées

Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors par définition de $P_A(B)$ et de $P_B(A)$,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B) \times P_B(A).$$

On peut généraliser cette formule à un nombre arbitraire d'événements.

Proposition 26.41 – Formule des probabilités composées

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des événements tels que $P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}\big) \neq 0$. Alors

$$P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_n\big) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration.

□

Remarque 26.42 –
Dans le cas $n = 2$, on obtient la formule $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
Dans le cas $n = 3$, on obtient la formule $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C)$.

Exemple 26.43 – Une urne contient quatre boules rouges et six boules noires, indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise trois boules dans cette urne.
Calculer la probabilité d'obtenir trois boules rouges.

Exemple 26.44 – Un commerçant met en vente 50 tickets d'un jeu dont exactement 3 sont gagnants. Je lui achète 6 tickets. Avec quelle probabilité en ai-je acheté au moins un gagnant ?

4 – Formule des probabilités totales

Théorème 26.45 – Formule des probabilités totales

Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complet d'événements. Alors pour tout événement B, $\quad P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B).$

Si de plus pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\quad P(A_k) \neq 0$, $\quad$ alors $\quad P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \times P_{A_k}(B).$

Démonstration.

□

Remarque 26.46 –
Dans le cas $n = 2$, on note $\{A, \overline{A}\}$ et on obtient la formule $\quad P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B).$
Dans le cas $n = 3$, on note $\{A_1, A_2, A_3\}$ et on obtient la formule $\quad P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B).$

Exemple 26.47 – Dans une population, une personne sur 10000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99% des malades mais aussi faussement positif chez 0.1% des personnes non atteintes.
Calculer la probabilité qu'un individu obtienne un résultat positif.

Exemple 26.48 – Au cours des 2000 jours de sa vie, un photocopieur du lycée obéit aux règles suivantes : pour tout $n \in [\![1, 2000]\!]$,

- s'il fonctionne à la date $n-1$, alors il a la probabilité $\dfrac{3}{5}$ de toujours fonctionner à la date n;
- s'il est en panne à la date $n-1$, alors il a la probabilité $\dfrac{4}{5}$ d'être encore en panne à la date n.

On suppose que le photocopieur est en état de marche à la date 0. Pour tout $n \in [\![0, 2000]\!]$, on note M_n l'événement « le photocopieur est en état de marche à la date n » et $p_n = P(M_n)$.

1. Soit $n \in [\![0, 1999]\!]$. Démontrer soigneusement que : $p_{n+1} = \dfrac{2}{5} p_n + \dfrac{1}{5}$.
2. Déterminer le terme général de $\left(p_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème 26.49 – Formule de Bayes

Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complet d'événements et soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement.
On suppose que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(A_k) \neq 0$ et que $P(B) \neq 0$. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k) \times P_{A_k}(B)}.$$

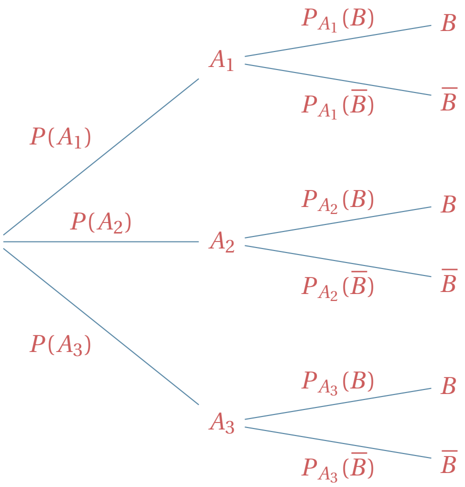
Exemple 26.50 – On reprend l'exemple précédent. Un individu passe le test et obtient un résultat positif. Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

5 – Lien avec les arbres pondérés

Il est relativement commode de représenter une expérience aléatoire par un arbre pondéré et surtout de savoir utiliser cet arbre pour faire des calculs de probabilités.
On considère l'exemple ci-contre dont l'univers associé comporte six issues :

$$\Omega = \{A_1 \cap B, A_1 \cap \overline{B}, A_2 \cap B, A_2 \cap \overline{B}, A_3 \cap B, A_3 \cap \overline{B}\}.$$

Le but de ce paragraphe est d'illustrer les propriétés vues précédemment via un certain nombre de "règles" de calcul sur les arbres pondérés.



- **Règle 1 : La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.**

Cette règle illustre notamment le fait que la probabilité conditionnelle est bien une probabilité.
Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1,$$
$$P_{A_1}(B) + P_{A_1}(\overline{B}) = 1, \quad \text{etc.}$$

- **Règle 2 : La probabilité de l'événement représenté par un chemin est égal au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.**

Cette règle illustre la formule des probabilités composées. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B),$$
$$P(A_2 \cap \overline{B}) = P(A_2) \times P_{A_2}(\overline{B}), \quad \text{etc.}$$

- **Règle 3 : La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet événement.**

Cette règle illustre la formule des probabilités totales. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + P(A_3) \times P_{A_3}(B).$$

Exemple 26.51 – Un élève, que nous appellerons Félix H., a beaucoup de mal à se réveiller le matin. Aussi, pour parer à toute éventualité, il programme son réveil à trois horaires h_1, h_2 et h_3. Il se réveille à l'horaire h_1 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à l'horaire h_2 avec probabilité $\frac{1}{4}$. Lorsqu'il se réveille à l'horaire h_1, la probabilité qu'il arrive à l'heure en classe est de 95%. Lorsqu'il se réveille à l'horaire h_2, la probabilité qu'il arrive en retard en classe est de 10%. Enfin, lorsqu'il se réveille à l'horaire h_3, la probabilité qu'il arrive en retard en classe est de 30%. Quelle est la probabilité que l'élève soit en retard ?

Remarque 26.52 – Vous pouvez (c'est même conseillé) dessiner des arbres pour vous aider à modéliser une situation, mais cela ne vous dispense pas d'écrire explicitement les formules du cours (qu'il faut nommer, après avoir rappelé les hypothèses). On ne peut malheureusement pas toujours utiliser un arbre (penser à un arbre à n branches, difficile à représenter !) : il faut donc être capable d'utiliser les formules du cours sans arbre.
Les règles énoncées ci-dessus ne sont finalement qu'une bonne représentation visuelle des propriétés énoncées précédemment.

IV – Indépendance

1 – Indépendance de deux événements

Intuitivement, étant donnés deux événements A et B pour lesquels $P(B) > 0$, on a envie de dire que A et B sont *indépendants* si la probabilité $P(A)$ ne dépend pas de la réalisation de B, i.e. si $P_B(A) = P(A)$, ce qui s'écrit aussi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Cette remarque conduit à la définition suivante.

Définition 26.53 – Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

On note alors $A \perp\!\!\!\perp B$.

Remarque 26.54 –

1. L'indépendance de deux événements résulte souvent d'une hypothèse d'indépendance parmi les données du problème et n'est donc pas toujours à démontrer.
2. L'indépendance est une notion liée à la probabilité, contrairement à la notion d'événements incompatibles. En fait, deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants : dans le cas contraire, on aurait $P(A) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$, ce qui est absurde.

Exemple 26.55 – On lance un dé cubique et on considère les événements :

- A : "le résultat obtenu est inférieur ou égal à 2",
- B : "le résultat obtenu est supérieur ou égal à 4".

Déterminer si A et B sont indépendants dans les deux cas suivants.

- **Cas d'un dé équilibré :**

- **Cas d'un dé pipé :** On considère un dé qui permet d'obtenir 1 avec la probabilité 1.

Proposition 26.56 – Passage au contraire pour des événements indépendants

Soient A et B deux événements.
Si A et B sont indépendants, alors on a : $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$ et $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

Démonstration.

□

2 – Indépendance d'une famille d'événements

Définition 26.57 – Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements. On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si

$$\forall I \subset [\![1, n]\!], \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont **deux à deux indépendants** si

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad i \neq j \Longrightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Exemple 26.58 – Avec quatre événements A_1, A_2, A_3 et A_4, on dit que les événements A_1, A_2, A_3 et A_4 sont mutuellement indépendants lorsque l'on a les 11 égalités suivantes :

- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$, $\quad P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_3)$, $\quad P(A_1 \cap A_4) = P(A_1) \times P(A_4)$,
  $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \times P(A_3)$, $\quad P(A_2 \cap A_4) = P(A_2) \times P(A_4)$, $\quad P(A_3 \cap A_4) = P(A_3) \times P(A_4)$,
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3)$, $\quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_4)$,
  $P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \times P(A_3) \times P(A_4)$, $\quad P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_2) \times P(A_3) \times P(A_4)$,
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times P(A_4)$.

Exemple 26.59 – On lance deux fois un dé équilibré et on considère les événements suivants.

- A : "le premier chiffre est pair",
- B : "le second chiffre est impair",
- C : "la somme des chiffres est paire".

Les événements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

ATTENTION ! (Mutuellement) indépendants $\Longrightarrow$ DEUX À DEUX indépendants.
MAIS la réciproque est fausse !

Proposition 26.60 – Opérations sur des événements indépendants

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (où $n \geqslant 2$) des événements indépendants.

1. En remplaçant des A_i par leur événement contraire, on obtient encore une famille d'événements indépendants.
2. Chacun des A_i est indépendant de tout événement B qu'on peut former par intersections, réunions avec des événements A_k où $k \neq i$ ou leur contraire.

Démonstration.

1. On va démontrer que $A_1, \ldots, A_{n-1}, \overline{A_n}$ sont indépendants (l'ordre n'a pas d'importance). Soit $p \in [\![2, n]\!]$ et $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ une partie de $[\![1, n]\!]$.

   - 1er cas : $n \notin I$

     Comme $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants, on a bien $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_p}) = P(A_{i_1}) \times P(A_{i_2}) \times \cdots \times P(A_{i_p})$.

   - 2e cas : $n \in I$. Disons que $i_p = n$. Il s'agit alors de montrer que

     $$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}} \cap \overline{A_n}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_{p-1}}) \times P(\overline{A_n}).$$

     On a

     $$\begin{aligned} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}} \cap \overline{A_n}) &= P\Big((A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}}) \setminus A_n\Big) \\ &= P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}}) - P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{p-1}} \cap A_n) \\ &= P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_{p-1}}) - P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_{p-1}}) \times P(A_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{(par mutuelle indépendance des } A_1, \dots A_n)\\ &= P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_{p-1}})(1 - P(A_n))\\ &= P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_{p-1}})P(\overline{A_n}) \end{aligned}$$

Ceci prouve que $A_1, \dots, A_{n-1}, \overline{A_n}$ sont indépendants.
On peut alors remplacer A_{n-1} par son contraire et obtenir que les événements $A_1, \dots, A_{n-2}, \overline{A_{n-1}}, \overline{A_n}$ sont indépendants.
Et ainsi de suite.

2. Démonstration technique. Voyons sur un exemple. On suppose que A, B et C sont indépendants et montrons que A et $(B \cup C)$ sont indépendants.

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cup C)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)\\ &= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) = P(A)\left(P(B) + P(C) - P(B)P(C)\right)\\ &= P(A)\left(P(B) + P(C) - P(B \cap C)\right) = P(A)P(B \cup C) \end{aligned}$$

Donc A et $B \cup C$ sont indépendants.

□

Exemple 26.61 – Si A, B, C sont mutuellement indépendants, alors A, $\overline{B}$, C aussi, ou encore $\overline{A}$, B, C, etc.

Exemple 26.62 – On fait n lancers indépendants d'une pièce de monnaie. À chaque lancer, la probabilité de faire face est la même : c'est le nombre $p \in]0,1[$. Calculer la probabilité d'avoir obtenu pile pour la première fois au dernier lancer.