

# 25 | Dénombrément

En mathématiques, l'art de poser une question doit être considéré comme plus important que l'art de résoudre cette question.

Georg Cantor (1845-1918), mathématicien.

Notre objectif est ici purement pratique - **APPRENDRE À COMPTER**. Nous omettrons pour cette raison la plupart des démonstrations de ce chapitre, souvent difficiles, conformément au programme de MPSI.

## I – Ensembles finis

### 1 – Cardinal d'un ensemble fini

**Définition 25.1** – On dit qu'un ensemble  $E$  est **fini** s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- $E$  est l'ensemble vide, auquel cas on dit que son cardinal est nul ;
- $E$  est en bijection avec  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , auquel cas on dit que son cardinal est  $n$ .

Le **cardinal** d'un ensemble fini  $E$  est noté  $\text{Card}(E)$  ou  $|E|$ .

**Exemple 25.2** – Pour tous  $m, n \in \mathbb{Z}$  pour lesquels  $m \leq n$ , l'ensemble  $\llbracket m, n \rrbracket$  est fini de cardinal  $n - m + 1$ . La fonction  $k \mapsto k + m - 1$  est bijective de  $\llbracket 1, n - m + 1 \rrbracket$  sur  $\llbracket m, n \rrbracket$  de réciproque  $k \mapsto k - m + 1$ .

Dans la pratique, on ne prend bien souvent pas la peine d'exhiber la bijection entre l'ensemble dont on cherche à calculer le cardinal et l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$  correspondant. Intuitivement, un ensemble est fini si on peut numéroter ses éléments par les entiers de 1 à  $n$ .

**Exemple 25.3** –  $\text{Card}(\{\text{pique, coeur, carreau, trèfle}\}) = 4$ .  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket) = n$  et  $\text{Card}(\llbracket 0, n \rrbracket) = n + 1$ .

#### Théorème 25.4 – Cardinal d'une partie

Soient  $E$  un ensemble fini et  $F$  une partie de  $E$ .

1.  $F$  est un ensemble fini et  $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E)$ .
2.  $F = E \iff \text{Card}(F) = \text{Card}(E)$ .



#### Méthode 25.5 –

Pour montrer que deux ensembles finis  $A$  et  $B$  sont égaux, on peut se contenter de montrer une seule inclusion entre les deux et de montrer que  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ .

Ce résultat est à rapprocher du résultat assurant que deux espaces vectoriels de dimension finie sont égaux si et seulement si l'un est inclus dans l'autre et ils ont même dimension.

### 2 – Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

#### Proposition 25.6 – Injectivité, surjectivité et cardinaux

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

1.  $f(E)$  est un ensemble fini,  $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card}(F)$  et  $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card}(E)$ .
2.  $f$  est injective, si et seulement si,  $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$ . Dans ce cas  $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$ .

3.  $f$  est surjective si, et seulement si,  $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$ . Dans ce cas  $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$ .
4. L'application  $f$  est bijective si, et seulement si,  $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ .

*Démonstration.* Notons  $n$  le cardinal de  $E$ .

1. La finitude de  $f(E)$  est évidente car  $f(E)$  est une partie de  $F$  qui est un ensemble fini. Même chose pour la majoration par  $\text{Card}(F)$ . On a  $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$  donc puisque  $E$  possède  $n$  éléments,  $f(E)$  a au plus  $n$  éléments distincts donc  $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card}(E)$ .
2.  $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$  si, et seulement si, tous les éléments de  $E$  ont des images distinctes par  $f$ , autrement dit si, et seulement si,  $f$  est injective. Comme  $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card}(F)$  et que  $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$  on a le résultat.
3. Si  $f$  est surjective, alors  $f(E) = F$  donc  $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$ .  
Réciproquement, si  $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$ , alors  $f(E) = F$  car  $f(E)$  est un sous-ensemble de  $F$  et donc  $f$  est surjective.
4. C'est une conséquence de 3 et 4. □

### Théorème 25.7 – Caractérisation des bijections entre ensembles finis

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis **DE MÊME CARDINAL** et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Alors,

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

*Démonstration.* Si  $f$  est injective, alors  $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$  donc  $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$  et donc  $f$  est aussi surjective donc bijective.

Si  $f$  est surjective, alors  $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F)$  donc  $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$  et donc  $f$  est aussi injective donc bijective. □

## II – Disjonction de cas ou principe de partition

On rappelle que deux parties de  $E$  sont dites disjointes lorsque leur intersection est vide.

### Proposition 25.8 – Cardinal d'une union disjointe de deux ensembles

Soient  $A$  et  $B$  deux parties finies **disjointes** d'un ensemble  $E$ . L'ensemble  $A \cup B$  est fini et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

Par récurrence on peut généraliser la proposition précédente :

### Proposition 25.9 – Cardinal d'une union disjointe

Soit  $(A_k)_{1 \leq k \leq p}$  une famille de  $p$  parties finies deux à deux disjointes d'un ensemble  $E$ . L'ensemble  $\bigcup_{k=1}^p A_k$  est un ensemble fini et

$$\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^p A_k\right) = \sum_{k=1}^p \text{Card}(A_k).$$



### Méthode 25.10 – Principe de partition

Si on arrive à partitionner les objets à dénombrer en des catégories disjointes, on peut dénombrer chaque catégorie puis faire la somme des nombres obtenus.

**Exemple 25.11** – Un concours comporte dix questions, numérotées de 1 à 10. On a constaté que, parmi les 145 personnes ayant participé au concours, aucune n'a répondu juste à deux questions consécutives. Peut-on affirmer que deux candidats au moins ont répondu exactement de la même manière au questionnaire, c'est-à-dire juste aux mêmes

**questions et faux aux mêmes questions?**

Les réponses d'un candidat au questionnaire forment un 10-uplet de  $\{V, F\}$ .

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n$  l'ensemble des  $n$ -uplets de  $\{V, F\}$  ne comportant pas deux "V" consécutifs, et  $r_n$  le cardinal de  $R_n$ . On cherche donc  $r_{10}$ .

On remarque que  $r_1 = 2$  et  $r_2 = 3$ .

Pour tout  $n \geq 3$ , un  $n$ -uplet de  $R_n$  peut

- soit se terminer par "F", auquel cas les  $n - 1$  premières coordonnées forment un élément de  $R_{n-1}$ . (Il y a donc  $r_{n-1}$  tels  $n$ -uplets)
- soit se terminer par "FV", auquel cas les  $n - 2$  premières coordonnées forment un élément de  $R_{n-2}$ . (Il y a donc  $r_{n-2}$  tels  $n$ -uplets)

Ces possibilités sont mutuellement exclusives (un  $n$ -uplet ne peut à la fois se terminer par "F" et par "V") et regroupent tous les éléments de  $R_n$ . On en déduit donc que  $r_n = r_{n-1} + r_{n-2}$ .

On peut alors facilement calculer que  $r_{10} = 144$ . Comme il y avait 145 candidats, cela signifie qu'au moins deux ont répondu exactement de la même façon au questionnaire.

**Corollaire 25.12 – Cardinal du complémentaire**

Soit  $A$  une partie d'un ensemble fini  $E$ . Le complémentaire de  $A$  dans  $E$  est une partie finie et

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A).$$

*Démonstration.* Les parties  $A$  et  $\bar{A}$  sont disjointes et  $A \cup \bar{A} = E$  donc  $\text{Card}(E) = \text{Card}(A) + \text{Card}(\bar{A})$ . □



**Méthode 25.13 – Passage au complémentaire**

Lorsqu'on veut dénombrer un ensemble décrit par « au plus » ou « au moins », il peut-être plus facile de dénombrer son complémentaire, puis d'en déduire le cardinal recherché.

**Exemple 25.14** – Parmi l'ensemble des entiers de  $\llbracket 0, 10000 \rrbracket$ , combien sont divisibles par au plus trois nombres de l'ensemble  $\{2, 3, 5, 7\}$ ? Notons  $A$  l'ensemble des entiers de  $\llbracket 0, 10000 \rrbracket$  divisibles par au plus trois nombres de l'ensemble  $\{2, 3, 5, 7\}$ .

Alors,  $\bar{A}$  est l'ensemble des nombres divisibles par 2, 3, 5 et 7. Comme 2, 3, 5 et 7 sont des nombres premiers distincts,  $\bar{A}$  est donc l'ensemble des nombres divisibles par  $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ , c'est-à-dire  $\bar{A} = \left\{ 210k \mid k \in \left[ 0, \left\lfloor \frac{10000}{210} \right\rfloor \right] \right\}$

Comme  $\left\lfloor \frac{10000}{210} \right\rfloor = 46$ , on en déduit que  $\text{Card}(\bar{A}) = 47$ , et donc

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(\llbracket 0, 10000 \rrbracket) - \text{Card}(\bar{A}) = 10001 - 47 = 9954$$

Nous avons vu le cardinal de la réunion de parties disjointes. La proposition suivante traite le cas général :

**Proposition 25.15 – Cardinal d'une union**

Soit  $A$  et  $B$  deux parties finies d'un ensemble  $E$ . L'ensemble  $A \cup B$  est fini et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

*Démonstration.* • L'ensemble  $A \setminus B$  est un sous-ensemble de  $A$  donc  $A \setminus B$  est un ensemble fini. Comme  $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ , et que  $A \setminus B$  et  $B$  sont disjointes, d'après la Proposition 25.8,  $A \cup B$  est fini.

- On a les égalités suivantes :

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B \quad \text{et} \quad A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

où chacune des réunions est une réunion d'ensembles disjointes. Ainsi

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A \setminus B) + \text{Card}(B) \quad \text{et} \quad \text{Card}(A) = \text{Card}(A \setminus B) + \text{Card}(A \cap B).$$

Le résultat en découle aisément. □

## III – Produit cartésien et principe multiplicatif

### Proposition 25.16 – Cardinal d'un produit cartésien de deux ensembles

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles finis non vides. L'ensemble  $A \times B$  est fini et

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \text{Card}(B).$$

*Démonstration.* On note  $n$  et  $m$  les cardinaux respectifs de  $A$  et  $B$ .

On peut écrire  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  et

$$A \times B = \bigcup_{k=1}^n \{a_k\} \times B$$

qui est une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.

L'application  $\varphi_k : \begin{array}{l} B \longrightarrow \{a_k\} \times B \\ x \longmapsto (a_k, x) \end{array}$  est une bijection, donc  $\text{Card}(\{a_k\} \times B) = \text{Card}(B) = m$ . Ainsi,  $A \times B$  est la réunion disjointe de  $n$  ensembles de cardinal  $m$  d'où le résultat.  $\square$

Par récurrence on peut généraliser la proposition précédente :

### Proposition 25.17 – Cardinal d'un produit cartésien quelconque

Soit  $(E_k)_{1 \leq k \leq p}$  une famille de  $p$  ensembles finis. L'ensemble  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$  est un ensemble fini et

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \prod_{k=1}^p \text{Card}(E_k).$$



### Méthode 25.18 – Principe multiplicatif

Si une expérience comporte  $p$  étapes, offrant respectivement  $n_1, n_2, \dots, n_p$  possibilités, où chacun des nombres  $n_i$  ne dépend que de l'étape  $i$  et pas des autres étapes, alors le nombre total de possibilités est égal à  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$ .

**Exemple 25.19** – Combien existe-t-il de mots de 3 lettres (successions de 3 lettres) ne terminant pas par la lettre  $e$ ?

**1<sup>er</sup> étape** : Pour la première lettre : 26 possibilités.

**2<sup>e</sup> étape** : Pour la deuxième lettre : 26 possibilités.

**3<sup>e</sup> étape** : Pour la dernière lettre : 25 possibilités (la lettre  $e$  est exclue).

En tout, il y a  $26 \times 26 \times 25 = 16900$  possibilités par principe multiplicatif.

**Remarque importante** : dans le principe multiplicatif, c'est bien **le nombre** de possibilités à chaque étape qui ne doit pas dépendre des autres étapes, mais ces possibilités peuvent dépendre des étapes précédentes.

### Exemple 25.20 –

Combien de mots de trois lettres peut-on former qui obéissent à la règle suivante?

- La première lettre du mot est l'une des voyelles A, E, I, O, U mais pas Y.
- La deuxième lettre du mot est l'une des 3 lettres suivant, dans l'alphabet, la voyelle précédente.
- La dernière lettre du mot est l'une des 6 voyelles A, E, I, O, U, Y, mais pas celle qui est la première lettre.

**1<sup>er</sup> étape** : Pour la première lettre : 5 possibilités.

**2<sup>e</sup> étape** : Pour la deuxième lettre : 3 possibilités (qui dépendent de la voyelle choisie à l'étape 1).

**3<sup>e</sup> étape** : Pour la dernière lettre : 5 possibilités (qui dépendent de la voyelle choisie à l'étape 1).

En tout, il y a  $5 \times 3 \times 5 = 75$  possibilités par principe multiplicatif.

**Corollaire 25.21 – Cardinal de  $A^p$** 

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $A$  un ensemble fini. L'ensemble  $A^p$  est fini et

$$\text{Card}(A^p) = (\text{Card}(A))^p.$$

Mais finalement, addition ou multiplication? En résumé :

« On a **SOIT** ceci, **SOIT** cela. »  $\rightarrow$  **ADDITION.**  
 « On fait ceci, **PUIS** cela. »  $\rightarrow$  **MULTIPLICATION.**

**Exemple 25.22** – Une urne contient  $2n$  boules numérotées de 1 à  $2n$  qu'on tire successivement sans remise. Combien de tirages peut-on faire pour lesquels un numéro pair est toujours suivi d'un numéro impair et un numéro impair d'un numéro pair?

Un tirage commence **SOIT** par un numéro pair **SOIT** par un numéro impair. Nous allons dénombrer séparément ces deux ensembles de tirages et nous **ADDITIONNERONS** à la fin les deux cardinaux obtenus.

Combien sont-ils à commencer par un numéro pair? Faire un tel tirage, c'est tirer une boule paire ( $n$  possibilités), **PUIS** une boule impaire ( $n$  possibilités), **PUIS** de nouveau une boule paire ( $n-1$  possibilités), **PUIS** une boule impaire ( $n-1$  possibilités)... - d'où un total de  $n^2 \times (n-1)^2 \times \dots \times 2^2 \times 1^2 = n!^2$  tirages.

Un raisonnement analogue montre que  $n!^2$  tirages exactement commencent par un numéro impair - d'où un total définitif de  $n!^2 + n!^2 = 2 \times n!^2$ .

## IV – Cardinaux de certains ensembles d'applications entre ensembles finis

### 1 – Nombre d'applications entre deux ensembles finis

**Proposition 25.23 – Nombre d'applications entre deux ensembles finis**

Si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles finis non vides, alors le nombre d'applications de  $E$  dans  $F$  est fini et

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}.$$

*Démonstration.* Notons  $p = \text{Card}(E)$  et  $n = \text{Card}(F)$ . On veut montrer que  $\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = n^p$ .

On note  $E = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ .

On dénombre les applications de  $E$  dans  $F$  :

**1<sup>e</sup> étape** : Il y a  $n$  possibilités pour l'image de  $a_1$ .

**2<sup>e</sup> étape** : Il y a  $n$  possibilités pour l'image de  $a_2$ .

etc.

**(p-1)<sup>e</sup> étape** : Il y a  $n$  possibilités pour l'image de  $a_{p-1}$ .

**p<sup>e</sup> étape** : Il y a  $n$  possibilités pour l'image de  $a_p$ .

Finalement, pour définir une application de  $E$  dans  $F$ , on a fait  $p$  étapes avec pour chacune  $n$  possibilités, donc il y a en tout  $\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p$  applications de  $E$  dans  $F$ .  $\square$

### 2 – Nombre de parties d'un ensemble fini

Pour une partie  $A$  de  $E$ , on rappelle que l'application  $\mathbb{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$  est définie par  $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**Théorème 25.24 – Nombre de parties d'un ensemble fini**

Si  $E$  est un ensemble fini de cardinal  $n$ , alors  $\mathcal{P}(E)$  est un ensemble fini et  $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ .

**Lemme 25.25**

Soit  $E$  un ensemble fini. L'application  $\varphi$  :  $\begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{F}(E, \{0, 1\}) \\ A \longmapsto \mathbb{1}_A \end{array}$  est une bijection.

*Démonstration. Injectivité* : soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . Supposons que  $\varphi(A) = \varphi(B)$  c'est-à-dire  $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ . Alors pour tout  $x \in E$ , si  $x \in A$ , alors  $\mathbb{1}_A(x) = 1$ , donc  $\mathbb{1}_B(x) = 1$  donc  $x \in B$  et de même si  $x \in B$ , alors  $x \in A$ . Donc  $A = B$ .

*Surjectivité* : Soit  $f \in \mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ . Posons  $A = f^{-1}(\{1\})$ . Alors pour tout  $x \in E$ , si  $x \in A$  alors  $\mathbb{1}_A(x) = 1 = f(x)$  et si  $x \notin A$ ,  $\mathbb{1}_A(x) = 0 = f(x)$  donc  $f = \mathbb{1}_A$  donc  $f = \varphi(A)$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 25.24*. Il suffit d'utiliser le lemme : puisque  $\varphi$  est une bijection de  $\mathcal{P}(E)$  sur  $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$  et puisque  $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$  est un ensemble fini de cardinal  $2^n$ , on obtient que  $\mathcal{P}(E)$  est un ensemble fini de cardinal  $2^n$ .  $\square$

### 3 – Nombre de bijections entre deux ensembles finis de même cardinal

**Proposition 25.26 – Nombre d'injections entre deux ensembles finis**

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $p$  et  $F$  un ensemble fini de cardinal  $n \geq p$ .

Il y a en tout  $n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$  injections de  $E$  dans  $F$ .

*Démonstration*. On note  $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

On construit une bijection  $f$  de  $E$  dans  $F$  :

**1<sup>e</sup> étape** : il y a  $n$  possibilités pour l'image de  $a_1$  (les  $n$  éléments de  $F$ ).

**2<sup>e</sup> étape** : il y a  $n-1$  possibilités pour l'image de  $a_2$  (les  $n$  éléments de  $F$  sauf l'élément  $f(a_1)$  qui est exclu car  $f$  est injective).

**3<sup>e</sup> étape** : il y a  $n-2$  possibilités pour l'image de  $a_3$  (les  $n$  éléments de  $F$  sauf  $f(a_1)$  et  $f(a_2)$  qui sont exclus car  $f$  est injective).

etc...

**$p$ <sup>e</sup> étape** : il y a  $n - (p-1)$  possibilités pour l'image de  $a_p$ , car les éléments  $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{p-1})$  sont exclus.

Finalement, par principe multiplicatif, il y a en tout  $n \times (n-1) \times \dots \times (n - (p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}$  injections de  $E$  dans  $F$ .  $\square$

**Corollaire 25.27 – Nombre de bijections entre deux ensembles finis**

Si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles finis non vides de même cardinal  $n > 0$  alors le nombre de bijections de  $E$  dans  $F$  est égal à  $n!$ .

*Démonstration*. D'après la proposition 25.7, l'ensemble des fonctions bijectives est l'ensemble des fonctions injectives. En appliquant la proposition précédente il y a  $\frac{n!}{(n-n)!} = n!$  bijections de  $E$  dans  $F$ .  $\square$

**Définition 25.28** – Soit  $E$  un ensemble fini non vide. On appelle **permutation** de  $E$  toute bijection de  $E$  dans  $E$ .

**Notation** : Si  $E = \{a, b, c, d\}$ , la permutation  $\sigma$  de  $E$  définie par  $\sigma(a) = c$ ,  $\sigma(b) = a$ ,  $\sigma(c) = b$  et  $\sigma(d) = d$  se note

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix}.$$

**Corollaire 25.29 – Nombre de permutations d'un ensemble fini**

Si  $E$  est un ensemble fini non vide de cardinal  $n > 0$ , alors le nombre de permutations de  $E$  est égal à  $n!$ .

**Exemple 25.30** – Le nombre de façon de ranger les nombres de 1 à 5 est égal à 5! c'est-à-dire 120.

## V – Dénombrement et modélisation

Dans les exercices de dénombrement, on compte des objets de diverses natures : mains de  $p$  cartes, façon de tirer  $p$  boules dans des urnes, nombres d'applications possédant une propriété etc...

Pour pouvoir dénombrer les situations en question, on commence par les modéliser par des éléments mathématiques, réunis dans un ensemble dont on pourra ensuite déterminer le cardinal.

Il y a généralement deux questions à se poser pour choisir la bonne modélisation :

1. Les constituants des objets sont-ils distincts ou les répétitions sont-elles autorisées ?
2. L'ordre a-t-il une importance ?

### Exemple 25.31 –

1. Dans une main de 8 cartes piochées parmi un jeu de 32 cartes usuel, les 8 cartes sont forcément distinctes et leur ordre n'a pas d'importance.
2. Si je regarde le podium d'une course hippique, les 3 chevaux sont distincts et ils sont ordonnés.
3. Pour former un mot de 5 lettres (sans préjuger de son appartenance au dictionnaire), les 5 lettres ne sont pas nécessairement distinctes et elles sont ordonnées.
4. Pour former un domino, il faut deux nombres de  $[[0, 6]]$ . Ces deux nombres ne sont pas ordonnés et ne sont pas nécessairement distincts.

Nous allons voir des modélisations correspondant aux trois premières situations.

### 1 – Cas ordonné avec répétitions : $p$ -listes

Dans le vocabulaire classique des tirages, cela correspond à la situation : **tirages successifs avec remise**.

**Définition 25.32** – Soit  $E$  un ensemble et  $p \in \mathbb{N}^*$ . On appelle  $p$ -**liste** d'éléments de  $E$  ou  $p$ -**uplet** d'éléments de  $E$  un élément de  $E^p$ .

**Exemple 25.33** – Dans  $E = \{\text{pique, cœur, carreau, trèfle}\}$ , le triplet (cœur, cœur, trèfle) est une 3-liste.

#### Corollaire 25.34 – Nombre de $p$ -listes

Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments et  $p \in \mathbb{N}^*$ . Le nombre de  $p$ -listes ou  $p$ -uplets d'éléments de  $E$  est égal à  $n^p$ .

**Exemple 25.35** – En notant  $E = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ , il existe  $5^4$ , c'est-à-dire 625, quadruplets d'éléments de  $E$ .

**Exemple 25.36** – Un personnage de jeu de rôle dispose de 5 caractéristiques : force, agilité, intelligence, charisme et intuition. Pour créer un nouveau personnage, on lance pour chaque caractéristique un dé à 8 faces et on ajoute 6 au résultat. Combien de personnages différents sont possibles ? Chaque personnage correspond à une unique 5-liste (force, agilité, intelligence, charisme et intuition). Il y a donc autant de personnages que de 5-listes de  $[[7, 14]]$ , c'est-à-dire

$$8^5 = 32784$$

### 2 – Cas ordonné sans répétitions : $p$ -arrangements

Dans le vocabulaire classique des tirages, cela correspond à la situation : **tirages successifs sans remise**.

On cherche à dénombrer le nombre de  $p$ -listes (ou  $p$ -uplets) d'éléments **distincts** dans un ensemble à  $n$  éléments.

**Définition 25.37** – Soit  $E$  un ensemble et  $p$  un entier naturel non nul. On appelle  $p$ -**arrangement** de  $E$  une  $p$ -liste d'éléments distincts de  $E$ .

**Exemple 25.38** – Dans  $E = \{\text{pique, cœur, carreau, casserole, trèfle, lipschitzienne}\}$ , les triplets (pique, cœur, casserole) et (cœur, pique, casserole) sont deux 3-arrangements de  $E$  différents (l'ordre compte).

**Proposition 25.39 – Nombre de  $p$ -arrangements d'un ensemble fini**

Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments et  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Le nombre de  $p$ -arrangements de  $E$  est

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

*Démonstration.* Pour créer un tel  $p$ -arrangement, on procède de la façon suivante :

- ▷ Choix du premier élément de l'arrangement :  $n$  possibilités.
- ▷ Choix du deuxième :  $n-1$
- ▷ ...
- ▷ Choix du  $p$ -ième :  $n-p+1$  possibilités.

En utilisant le principe multiplicatif, on obtient le résultat voulu. □

**Exemple 25.40** – On organise un concours blanc commun aux MPSI1 et MPSI2, constituées cette année au total de 96 élèves. Combien de top 10 différents sont possibles? (On ne prendra pas en compte que les MPSI2 n'ont aucune chance d'être dans le top 10.)

En numérotant les élèves de 1 à 96, un top 10 est un 10-arrangement de  $\llbracket 1, 96 \rrbracket$ .

Le nombre de top 10 possibles est donc  $\frac{96!}{(96-10)!} = 96 \times 95 \times \dots \times 87 = \dots$  beaucoup!

### 3 – Cas non-ordonné sans répétitions : Parties à $p$ éléments

Dans le vocabulaire classique des tirages, cela correspond à la situation : **tirages simultanés sans remise**.

**Proposition 25.41 – Nombre de parties à  $p$  éléments d'un ensemble fini**

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$  et soit  $p$  un entier naturel.

Le nombre de parties de  $E$  formées de  $p$  éléments de  $E$  est  $\binom{n}{p}$ .

On désigne aussi ces nombres sous le nom de **combinaisons**.

*Démonstration.*

- La seule partie de  $E$  à 0 élément est l'ensemble vide et l'on a  $\binom{n}{0} = 1$ .
- Il n'existe pas de partie de  $E$  à plus de  $n$  éléments et l'on a  $\binom{n}{p} = 0$  si  $p > n$ .
- Supposons  $1 \leq p \leq n$ .

Donc en tout, il existe  $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$  listes ordonnées de  $p$  éléments distincts (=  $p$ -arrangements) de  $E$ .

Comme à partir de  $p$  éléments fixés distincts de  $E$ , on peut les ordonner de  $p!$  façons différentes (voir corollaire 25.29), alors pour obtenir le nombre de sous-ensemble à  $p$  éléments de  $E$ , il ne reste plus qu'à diviser le nombre de  $p$ -arrangements de  $E$  par  $p!$  : on obtient

$$\frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

c'est-à-dire  $\binom{n}{p}$ . □

**Exemple 25.42** – Lorsque l'on joue au bridge, on distribue entièrement un jeu de 52 cartes à 4 joueurs. Chacun reçoit donc 13 cartes.

1. Vous jouez une partie. Combien y-a-t-il de mains de 13 cartes possibles?
2. Au bridge, une main contenant 5 piques est généralement intéressante. Combien y-a-t-il de mains contenant exactement 5 piques?

Notons  $C$  l'ensemble des 52 cartes du jeu.

1. Puisqu'il n'y a pas d'ordre, une main est une partie de cardinal 13 de  $C$ .

Il en existe donc  $\binom{52}{13} = 635\,013\,559\,600$ .

2. Une main contenant exactement 5 piques contient donc 5 piques parmi les 13 du jeu. Soit  $\binom{13}{5}$  possibilités. Elle contient également 8 cartes qui ne sont pas des piques. Il y a 39 cartes qui ne sont pas des piques, et donc  $\binom{39}{8}$  possibilités pour ces 8 cartes.

Par principe multiplicatif, le nombre de mains contenant exactement 5 piques est donc  $\binom{13}{5} \times \binom{39}{8} = 1287 \times 61523748 = 79\,181\,063\,676$ .

**Exemple 25.43** – On considère  $E$  l'ensemble des triplets de nombres entiers entre 1 et 10 strictement croissants. C'est à dire l'ensemble des  $(a, b, c)$  tels que  $a, b, c \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$  et  $a < b < c$ .

Quel est le cardinal de cet ensemble?

A chaque élément de  $E$  correspond une partie de cardinal 3 de  $\llbracket 1, 10 \rrbracket$  formées des 3 éléments du triplets (qui sont bien différents).

Réciproquement, si l'on considère une partie de cardinal 3 de  $\llbracket 1, 10 \rrbracket$ , il existe une et une seule façon d'ordonner ces 3 éléments par ordre (strictement) croissant.

Il y a donc autant d'éléments dans  $C$  que de parties de  $\llbracket 1, 10 \rrbracket$  de cardinal 3, c'est-à-dire  $\binom{10}{3} = 120$ .

De manière plus formelle, on a justifié que

$$\begin{aligned} \{(a, b, c) \in \llbracket 1, 10 \rrbracket^3 \mid a < b < c\} &\rightarrow \{A \subset \llbracket 1, 10 \rrbracket \mid \text{Card}(A) = 3\} \\ (a, b, c) &\mapsto \{a, b, c\} \end{aligned}$$

est une bijection.

On peut aussi déduire de 25.41 une autre démonstration du nombre de parties d'un ensemble à  $n$  éléments est  $2^n$  :

*Démonstration du théorème 25.24.* Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $A_k$  l'ensemble des parties de  $E$  ayant exactement  $k$  éléments. Alors, les  $A_k$  forment une partition de  $\mathcal{P}(E)$ , donc

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(A_k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1 + 1)^n = 2^n$$

□

## 4 – Résumé des trois outils principaux de dénombrement

Propriété de l'objet à dénombrer		Exemple type	Modélisé par	Cardinal	Écriture
Ordre	Éléments tous distincts				
Non	Oui	Tirages simultanés	Parties à $p$ -éléments d'un ensemble $E$	$\binom{n}{p}$	$\{\dots; \dots; \dots\}$
Oui	Non	Tirages successifs avec remise	$p$ -uplets d'éléments d'un même ensemble $E$	$n^p$	$(\dots; \dots; \dots)$
Oui	Oui	Tirages successifs sans remise	$p$ -uplets d'éléments d'un même ensemble $E$ , sans répétition = $p$ -arrangements de $E$	$\frac{n!}{(n-p)!}$	$(\dots; \dots; \dots)$
Non	Non	On modifie la modélisation pour se ramener à l'un des trois cas précédent.			

## VI – Démonstrations combinatoires des formules du binôme et de Pascal

### 1 – Binôme de Newton

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $x$  et  $y$  des réels. Alors  $(x + y)^n$  est une somme de termes de la forme  $x^k y^{n-k}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On peut donc écrire  $\sum_{k=0}^n a_k x^k y^{n-k}$  avec  $a_k$  un réel pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Le coefficient de  $x^k$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , est le nombre fois que  $x^k y^{n-k}$  apparaît dans le développement de  $(x + y)^n$ .

$(x + y)^n = (x + y)(x + y) \dots (x + y)$ . Le terme  $x^k y^{n-k}$  apparaît autant de fois qu'il y a de possibilités de choisir les  $k$  facteurs fournissant le  $x$ , c'est à dire de possibilités de choisir  $k$  indices dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , c'est à dire le nombre de parties à  $k$  éléments dans

$\llbracket 1, n \rrbracket$ , à savoir  $\binom{n}{k}$ .

Donc  $a_k = \binom{n}{k}$ . On a donc bien  $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ .

### 2 – Formule de Pascal

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{Z}$ . On note  $A$  l'ensemble des parties de  $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$  de cardinal  $p$ . On a  $\text{Card}(A) = \binom{n+1}{p}$ .

On note  $B$  l'ensemble des parties de  $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$  de cardinal  $p$  et contenant  $n + 1$ ,  $C$  l'ensemble des parties de  $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$  de cardinal  $p$  et ne contenant pas  $n + 1$ .

On a alors par définition que  $A = B \cup C$  et  $B \cap C = \emptyset$ , donc  $B$  et  $C$  sont disjoints.

Donc  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B \cup C) = \text{Card}(B) + \text{Card}(C)$ .

Les éléments de  $C$  sont les parties de  $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$  de cardinal  $p$  ne contenant pas  $n + 1$ . Ce sont donc exactement les parties de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de cardinal  $p$ . Donc  $\text{Card}(C) = \binom{n}{p}$ .

Les éléments de  $B$  sont les parties de  $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$  de cardinal  $p$  contenant  $n + 1$ . Il y en a autant que de façons de choisir les  $p - 1$  autres éléments de la partie, c'est à dire autant que de partie à  $p - 1$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Donc  $\text{Card}(B) = \binom{n}{p-1}$ . On a donc bien prouvé que

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$$