25 | Dénombrement

En mathématiques, l'art de poser une question doit être considéré comme plus important que l'art de résoudre cette question.

Georg Cantor (1845-1918), mathématicien.

Notre objectif est ici purement pratique - **APPRENDRE À COMPTER** . Nous omettrons pour cette raison la plupart des démonstrations de ce chapitre, souvent difficiles, conformément au programme de MPSI.

I – Ensembles finis

1 – Cardinal d'un ensemble fini

Définition 25.1 – On dit qu'un ensemble E est **fini** s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- E est l'ensemble vide, auquel cas on dit que son cardinal est nul ;
- E est en bijection avec $[\![1,n]\!]$, auquel cas on dit que son cardinal est n.

Le **cardinal** d'un ensemble fini E est noté $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$.

Exemple 25.2 – Pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $m \leqslant n$, l'ensemble $[\![m,n]\!]$ est fini de cardinal $n-m+1$.

Dans la pratique, on ne prend bien souvent pas la peine d'exhiber la bijection entre l'ensemble dont on cherche à calculer le cardinal et l'ensemble $[\![1,n]\!]$ correspondant. Intuitivement, un ensemble est fini si on peut numéroter ses éléments par les entiers de 1 à n.

Exemple 25.3 – $\mathrm{Card}\big(\{\text{pique, coeur, carreau, trèfle}\}\big) = 4$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Card}\big([\![1,n]\!]\big) = n$ et $\mathrm{Card}\big([\![0,n]\!]\big) = n+1$.

Théorème 25.4 – Cardinal d'une partie

Soient E un ensemble fini et F une partie de E.

1. F est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
2. $F = E \iff \mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$.

Méthode 25.5 –
Pour montrer que deux ensembles finis A et B sont égaux, on peut se contenter de montrer une seule inclusion entre les deux et de montrer que $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$.

Ce résultat est à rapprocher du résultat assurant que deux espaces vectoriels de dimension finie sont égaux si et seulement si l'un est inclus dans l'autre et ils ont même dimension.

2 – Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Proposition 25.6 – Injectivité, surjectivité et cardinaux

Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F.

1. $f(E)$ est un ensemble fini, $\mathrm{Card}\big(f(E)\big) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ et $\mathrm{Card}\big(f(E)\big) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
2. f est injective, si et seulement si, $\mathrm{Card}\big(f(E)\big) = \mathrm{Card}(E)$.   Dans ce cas $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$.

3. f est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Card}\big(f(E)\big) = \operatorname{Card}(F)$. Dans ce cas $\operatorname{Card}(E) \geqslant \operatorname{Card}(F)$.
4. L'application f est bijective si, et seulement si, $\operatorname{Card}\big(f(E)\big) = \operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$.

Démonstration.

□

Théorème 25.7 – Caractérisation des bijections entre ensembles finis

Soient E et F deux ensembles finis **DE MÊME CARDINAL** et f une application de E dans F. Alors,

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

Démonstration.

□

II – Disjonction de cas ou principe de partition

On rappelle que deux parties de E sont dites disjointes lorsque leur intersection est vide.

Proposition 25.8 – Cardinal d'une union disjointe de deux ensembles

Soient A et B deux parties finies **disjointes** d'un ensemble E. L'ensemble $A \cup B$ est fini et

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

Par récurrence on peut généraliser la proposition précédente :

Proposition 25.9 – Cardinal d'une union disjointe

Soit $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille de p parties finies deux à deux disjointes d'un ensemble E. L'ensemble $\bigcup_{k=1}^{p} A_k$ est un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}\Big(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Card}(A_k).$$

Méthode 25.10 – Principe de partition

Si on arrive à partitionner les objets à dénombrer en des catégories disjointes, on peut dénombrer chaque catégorie puis faire la somme des nombres obtenus.

Exemple 25.11 – Un concours comporte dix questions, numérotées de 1 à 10. On a constaté que, parmi les 145 personnes ayant participé au concours, aucune n'a répondu juste à deux questions consécutives. Peut-on affirmer que deux candidats au moins ont répondu exactement de la même manière au questionnaire, c'est-à-dire juste aux mêmes questions et faux aux mêmes questions ?

Corollaire 25.12 – Cardinal du complémentaire

Soit A une partie d'un ensemble fini E. Le complémentaire de A dans E est une partie finie et

$$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A).$$

Démonstration. Les parties A et $\overline{A}$ sont disjointes et $A \cup \overline{A} = E$ donc $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(\overline{A})$. □

Méthode 25.13 – Passage au complémentaire

Lorsqu'on veut déombrer un ensemble décrit par « au plus » ou « au moins », il peut-être plus facile de dénombrer son complémentaire, puis d'en déduire le cardinal recherché.

Exemple 25.14 – Parmi l'ensemble des entiers de $[\![0, 10000]\!]$, combien sont divisibles par au plus trois nombres de l'ensemble $\{2, 3, 5, 7\}$?

Nous avons vu le cardinal de la réunion de parties disjointes. La proposition suivante traite le cas général :

Proposition 25.15 – Cardinal d'une union

Soit A et B deux parties finies d'un ensemble E. L'ensemble $A \cup B$ est fini et

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Démonstration.

□

III – Produit cartésien et principe multiplicatif

Proposition 25.16 – Cardinal d'un produit cartésien de deux ensembles

Soit A et B deux ensembles finis non vides. L'ensemble $A \times B$ est fini et

$$\operatorname{Card}(A \times B) = \operatorname{Card}(A) \operatorname{Card}(B).$$

Démonstration. On note n et m les cardinaux respectifs de A et B.

On peut écrire $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ et

$$A \times B = \bigcup_{k=1}^{n} \{a_k\} \times B$$

qui est une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.

L'application $\varphi_k : \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \{a_k\} \times B \\ x & \longmapsto & (a_k, x) \end{array}$ est une bijection, donc $\operatorname{Card}(\{a_k\} \times B) = \operatorname{Card}(B) = m$. Ainsi, $A \times B$ est la réunion disjointe de n ensembles de cardinal m d'où le résultat. □

Par récurrence on peut généraliser la proposition précédente :

Proposition 25.17 – Cardinal d'un produit cartésien quelconque

Soit $(E_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille de p ensembles finis. L'ensemble $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = \prod_{k=1}^{p} \operatorname{Card}(E_k).$$

Méthode 25.18 – Principe multiplicatif

Si une expérience comporte p étapes, offrant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_p$ possibilités, où chacun des nombres n_i ne dépend que de l'étape i et pas des autres étapes, alors le nombre total de possibilités est égal à $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$.

Exemple 25.19 – Combien existe-t-il de mots de 3 lettres (successions de 3 lettres) ne terminant pas par la lettre e ?

Remarque importante : dans le principe multiplicatif, c'est bien **le nombre** de possibilités à chaque étape qui ne doit pas dépendre des autres étapes, mais ces possibilités peuvent dépendre des étapes précédentes.

Exemple 25.20 –

Combien de mots de trois lettres peut-on former qui obéissent à la règle suivante ?

- La première lettre du mot est l'une des voyelles A,E,I,O,U mais pas Y.
- La deuxième lettre du mot est l'une des 3 lettres suivant, dans l'alphabet, la voyelle précédente.
- La dernière lettre du mot est l'une des 6 voyelles A,E,I,O,U,Y, mais pas celle qui est la première lettre.

Corollaire 25.21 – Cardinal de A^p

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et A un ensemble fini. L'ensemble A^p est fini et

$$\mathrm{Card}(A^p) = \big(\mathrm{Card}(A)\big)^p.$$

Mais finalement, addition ou multiplication ? En résumé :

« On a **SOIT** ceci, **SOIT** cela. » $\longrightarrow$ **ADDITION.**
« On fait ceci, **PUIS** cela. » $\longrightarrow$ **MULTIPLICATION.**

Exemple 25.22 – Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$ qu'on tire successivement sans remise. Combien de tirages peut-on faire pour lesquels un numéro pair est toujours suivi d'un numéro impair et un numéro impair d'un numéro pair ?

IV – Cardinaux de certains ensembles d'applications entre ensembles finis

1 – Nombre d'applications entre deux ensembles finis

Proposition 25.23 – Nombre d'applications entre deux ensembles finis

Si E et F sont deux ensembles finis non vides, alors le nombre d'applications de E dans F est fini et

$$\mathrm{Card}\big(\mathcal{F}(E,F)\big) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}.$$

Démonstration.

□

2 – Nombre de parties d'un ensemble fini

Pour une partie A de E, on rappelle que l'application $\mathbb{1}_A : E \longrightarrow \{0,1\}$ est définie par $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Théorème 25.24 – Nombre de parties d'un ensemble fini

Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini et $\operatorname{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$.

Lemme 25.25

Soit E un ensemble fini. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E,\{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ est une bijection.

Démonstration.

□

Démonstration du théorème 25.24.

□

3 – Nombre de bijections entre deux ensembles finis de même cardinal

Proposition 25.26 – Nombre d'injections entre deux ensembles finis

Soit E un ensemble fini de cardinal p et F un ensemble fini de cardinal $n \geqslant p$.

Il y a en tout $n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ injections de E dans F.

Démonstration.

□

Corollaire 25.27 – Nombre de bijections entre deux ensembles finis

Si E et F sont deux ensembles finis non vides de même cardinal $n > 0$ alors le nombre de bijections de E dans F est égal à $n!$.

Démonstration. D'après la proposition 25.7, l'ensemble des fonctions bijectives est l'ensemble des fonctions injectives. En appliquant la proposition précédente il y a $\dfrac{n!}{(n-n)!} = n!$ bijections de E dans F. □

Définition 25.28 – Soit E un ensemble fini non vide. On appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E.

Notation : Si $E = \{a, b, c, d\}$, la permutation σ de E définie par $\sigma(a) = c$, $\sigma(b) = a$, $\sigma(c) = b$ et $\sigma(d) = d$ se note

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix}.$$

Corollaire 25.29 – Nombre de permutations d'un ensemble fini

Si E est un ensemble fini non vide de cardinal $n > 0$, alors le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Exemple 25.30 – Le nombre de façon de ranger les nombres de 1 à 5 est égal à 5! c'est-à-dire 120.

V – Dénombrement et modélisation

Dans les exercices de dénombrement, on compte des objets de diverses natures : mains de p cartes, façon de tirer p boules dans des urnes, nombres d'applications possédant une propriété etc...

Pour pouvoir dénombrer les situations en question, on commence par les modéliser par des éléments mathématiques, réunis dans un ensemble dont on pourra ensuite déterminer le cardinal.

Il y a généralement deux questions à se poser pour choisir la bonne modélisation :

1. Les constituants des objets sont-ils distincts ou les répétitions sont-elles autorisées ?
2. L'ordre a-t-il une importance ?

Exemple 25.31 –

1. Dans une main de 8 cartes piochées parmi un jeu de 32 cartes usuel, les 8 cartes sont forcément distinctes et leur ordre n'a pas d'importance.
2. Si je regarde le podium d'une course hippique, les 3 chevaux sont distincts et ils sont ordonnés.
3. Pour former un mot de 5 lettres (sans préjuger de son appartenance au dictionnaire), les 5 lettres ne sont pas nécessairement distinctes et elles sont ordonnées.
4. Pour former un domino, il faut deux nombres de $[\![0,6]\!]$. Ces deux nombres ne sont pas ordonnés et ne sont pas nécessairement distincts.

Nous allons voir des modélisations correspondant aux trois premières situations.

1 – Cas ordonné avec répétitions : p-listes

Dans le vocabulaire classique des tirages, cela correspond à la situation : **tirages successifs avec remise**.

Définition 25.32 – Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle $p-$**liste** d'éléments de E ou $p-$**uplet** d'éléments de E un élément de E^p.

Exemple 25.33 – Dans $E = \{$pique, cœur, carreau, trèfle$\}$, le triplet (cœur, cœur, trèfle) est une 3-liste.

Corollaire 25.34 – Nombre de p-listes

Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de $p-$listes ou $p-$uplets d'éléments de E est égal à n^p.

Exemple 25.35 – En notant $E = \{2,3,5,7,11\}$, il existe 5^4, c'est-à-dire 625, quadruplets d'éléments de E.

Exemple 25.36 – Un personnage de jeu de rôle dispose de 5 caractéristiques : force, agilité, intelligence, charisme et intuition. Pour créer un nouveau personnage, on lance pour chaque caractéristique un dé à 8 faces et on ajoute 6 au résultat. Combien de personnages différents sont possibles ?

2 – Cas ordonné sans répétitions : p-arrangements

Dans le vocabulaire classique des tirages, cela correspond à la situation : **tirages successifs sans remise**.
On cherche à dénombrer le nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments **distincts** dans un ensemble à n éléments.

Définition 25.37 – Soit E un ensemble et p un entier naturel non nul. On appelle $p-$**arrangement** de E une $p-$liste d'éléments distincts de E.

Exemple 25.38 – Dans $E = \{$pique, coeur, carreau, casserole, trèfle, lipschitizienne$\}$, les triplets (pique, coeur, casserole) et (coeur, pique, casserole) sont deux 3-arrangements de E différents (l'ordre compte).

Proposition 25.39 – Nombre de p-arrangements d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini à n éléments et $p \in [\![0, n]\!]$. Le nombre de p-arrangements de E est

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration.

□

Exemple 25.40 – On organise un concours blanc commun aux MPSI1 et MPSI2, constituées cette année au total de 96 élèves. Combien de top 10 différents sont possibles ? (On ne prendra pas en compte que les MPSI2 n'ont aucune chance d'être dans le top 10.)

3 – Cas non-ordonné sans répétitions : Parties à p éléments

Dans le vocabulaire classique des tirages, cela correspond à la situation : **tirages simultannés sans remise**.

Proposition 25.41 – Nombre de parties à p éléments d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit p un entier naturel.

Le nombre de parties de E formées de p éléments de E est $\binom{n}{p}$.

On désigne aussi ces nombres sous le nom de **combinaisons**.

Démonstration.

□

Exemple 25.42 – Lorsque l'on joue au bridge, on distribue entièrement un jeu de 52 cartes à 4 joueurs. Chacun reçoit donc 13 cartes.

1. Vous jouez une partie. Combien y-a-t-il de mains de 13 cartes possibles ?
2. Au bridge, une main contenant 5 piques est généralement intéressante. Combien y-a-t-il de mains contenant exactement 5 piques ?

Exemple 25.43 – On considère E l'ensemble des triplets de nombres entiers entre 1 et 10 strictement croissants. C'est à dire l'ensemble des (a, b, c) tels que $a, b, c \in [\![1, 10]\!]$ et $a < b < c$.
Quel est le cardinal de cet ensemble ?

On peut aussi déduire de 25.41 une autre démonstration du nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n :

Démonstration du théorème 25.24. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note A_k l'ensemble des parties de E ayant exactement k éléments. Alors, les A_k forment une partition de $\mathcal{P}(E)$, donc

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(A_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

□

4 – Résumé des trois outils principaux de dénombrement

Propriété de l'objet à dénombrer		Exemple type	Modélisé par	Cardinal	Écriture
Ordre	Éléments tous distincts				
Non	Oui	Tirages simultanés	Parties à p-éléments d'un ensemble E	$\binom{n}{p}$	$\{\ldots;\ldots;\ldots\}$
Oui	Non	Tirages successifs avec remise	$p-$uplets d'éléments d'un même ensemble E	n^p	$(\ldots;\ldots;\ldots)$
Oui	Oui	Tirages successifs sans remise	$p-$uplets d'éléments d'un même ensemble E, sans répétition = $p-$arrangements de E	$\dfrac{n!}{(n-p)!}$	$(\ldots;\ldots;\ldots)$
Non	Non	On modifie la modélisation pour se ramener à l'un des trois cas précédent.			

VI – Démonstrations combinatoires des formules du binôme et de Pascal

1 – Binôme de Newton

2 – Formule de Pascal