

24 | Dimensions des espaces vectoriels

I call our world Flatland, not because we call it so, but to make its nature clearer to you, my happy readers, who are privileged to live in Space.

Edwin Abbot Abbot, professeur et théologien, dans *Flatland : A romance of many dimensions*, satire mathématique qui conte les aventures d'un Carré dont le monde plat est mis en cause par la découverte de l'intrusion d'une Sphère.

I – Familles de vecteurs

1 – Parties et familles génératrices

Définition 24.1 – Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et X une partie de E . On dit que la partie X est **génératrice** de E ou **engendre** E si tout élément de E est combinaison linéaire d'éléments de X , i.e si $E = \text{Vect}(X)$.

Si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, cela se traduit par

$$\forall x \in E, \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$$

Exemple 24.2 –

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, donc la famille $((1, 0), (0, 1))$ engendre $\mathbb{R}^2$. De même, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, donc $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ engendre $\mathbb{R}^3$.

Plus généralement, posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ engendre $\mathbb{K}^n$ car pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$: $(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ car pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, notons E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de position de (i, j) , égal à 1. La famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est alors génératrice

de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ car pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$.

- La famille $(1, i)$ engendre le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais (1) suffit à engendrer le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.
- $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$ et $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, on considère $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 \\ -x/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x/2 \\ x/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \frac{x}{2}A + \frac{x}{2}B + yC$.

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Vect}(A, B, C)$. Ceci étant vrai pour tout matrice de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, (A, B, C) est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Remarque 24.3 –

1. Le caractère générateur ou non d'une famille ne dépend pas de l'ordre de ses vecteurs.
2. Une famille quelconque $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E n'est pas nécessairement génératrice de E . En revanche, elle est une famille génératrice de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Lemme 24.4 – Croissance des sous-espaces engendrés

Soient n et p deux entiers naturels non nul. Soit $(v_1, \dots, v_{n+p})$ une famille de vecteurs de E .
On a $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \subset \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n+p})$.

Démonstration. $v_1, \dots, v_n$ sont des éléments de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_{n+p})$. Or, $\text{Vect}(v_1, \dots, v_{n+p})$ est sous-espace vectoriel de E , donc est stable par combinaison linéaire.

D'où $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \subset \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n+p})$. □

Proposition 24.5

Toute famille contenant une famille génératrice de E est génératrice de E .

Démonstration. Soit $(v_1, \dots, v_n, \dots, v_{n+p})$ une famille de vecteurs de E telle que $(v_1, \dots, v_n)$ soit génératrice de E , c'est à dire que $E = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. Alors par le lemme précédent, on a

$$E = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \subset \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n+p}) \subset E.$$

On en déduit que toutes ces inclusions sont des égalités et donc que $(v_1, \dots, v_{n+p})$ est génératrice de E . □

Trouver une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel, c'est l'écrire comme un Vect.

Exemple 24.6 –

- L'ensemble $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $((1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1))$.

Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$: $(x, y, z, t) \in E \iff \begin{cases} z = x + 2y \\ t = -x + y, \end{cases}$ donc :

$$E = \{(x, y, x + 2y, -x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1, -1) + y(0, 1, 2, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1))$$

Ceci montre **À LA FOIS** que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et que $((1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1))$ engendre E .

- L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid 2P(X+1) = XP'\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par $X^2 - 4X + 3$.
Pour tout $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$:

$$\begin{aligned} P \in F &\iff 2P(X+1) = XP' &\iff 2a(X+1)^3 + 2b(X+1)^2 + 2c(X+1) + 2d = X(3aX^2 + 2bX + c) \\ &\iff \begin{cases} 2a = 3a \\ 6a + 2b = 2b \\ 6a + 4b + 2c = c \\ 2a + 2b + 2c + 2d = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a = 0 \\ 4b + c = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a = 0 \\ c = -4b \\ d = 3b \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : $F = \{bX^2 - 4bX + 3b \mid b \in \mathbb{R}\} = \{b(X^2 - 4X + 3) \mid b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X^2 - 4X + 3)$. Ceci montre **À LA FOIS** que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et que $(X^2 - 4X + 3)$ en est une famille génératrice.

2 – Parties et familles libres ou liées

Définition 24.7 – Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n \in E$. On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre ou que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont **linéairement indépendants** si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \right)$$

ou encore, si et seulement si, aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Quitte à remplacer λ_i par $\lambda_i - \mu_i$ dans la définition de la liberté, on peut aussi dire que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \mu_i \right)$, ce qui n'est finalement rien de plus qu'un **PRINCIPE D'IDENTIFICATION**. En résumé :

FAMILLE GÉNÉRATRICE	=	EXISTENCE pour TOUT vecteur d'une décomposition comme combinaison linéaire
FAMILLE LIBRE	=	UNICITÉ des coefficients dans les combinaisons linéaires, donc possibilité de pratiquer des IDENTIFICATIONS

Définition 24.8 – Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n \in E$. On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est **liée** ou que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont linéairement dépendants si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ n'est **PAS** libre. Cela revient à dire que l'un au moins des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est combinaison linéaire des autres.

Pour deux vecteurs $x, y \in E$, on dit que x et y sont **colinéaires** si la famille (x, y) est liée, i.e. si x ou y est un multiple de l'autre.

Exemple 24.9 –

- Tout ensemble de vecteurs qui contient le vecteur nul est lié.
Le vecteur nul est combinaison linéaire de tout ensemble de vecteurs - coefficients tous nuls...
- La famille $(1, i)$ est libre dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$ - principe d' **IDENTIFICATION DES PARTIES RÉELLES ET IMAGINAIRES** - mais liée dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.
 - ★ Montrons que $(1, i)$ est libre sur le corps de base $\mathbb{R}$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ des réels pour lesquels $\lambda.1 + \mu.i = 0$. Par identification des parties réelle et imaginaire : $\lambda = \mu = 0$.
 - ★ La famille $(1, i)$ est en revanche liée sur le corps de base $\mathbb{C}$ car $i = i \times 1$ est un multiple **COMPLEXE** de 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons : $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre dans $\mathbb{K}^n$ - principe d' **IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS D'UNE FAMILLE DE SCALAIRES**.
Pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$: $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donc si $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0_{\mathbb{K}^n}$, alors aussitôt $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
- Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, notons E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de position de (i, j) , égal à 1. La famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est alors libre dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ - principe d' **IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS D'UNE MATRICE**.
- La famille $((2, 1), (-1, 3), (0, 2))$ est liée dans $\mathbb{R}^2$.
Pour tous $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$: $\lambda(2, 1) + \mu(-1, 3) + \nu(0, 2) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2\lambda - \mu = 0 \\ \lambda + 3\mu + 2\nu = 0 \end{cases}$ Ce système possède des solutions (λ, μ, ν) autres que $(0, 0, 0)$, $(1, 2, -\frac{7}{2})$ par exemple, donc les vecteurs $(2, 1)$, $(-1, 3)$ et $(0, 2)$ sont linéairement dépendants.
- La famille $(X^2 - X + 1, X^2 + X - 2, X^2 - 2X + 3)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.
Pour tous $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$: $\lambda(X^2 + X + 1) + \mu(X^2 - X - 2) + \nu(X^2 + 2X + 3) = 0$

$$\begin{aligned} \iff \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda - \mu + 2\nu = 0 \\ \lambda - 2\mu + 3\nu = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ 2\mu - \nu = 0 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 3\mu - 2\nu = 0 & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ 2\mu - \nu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} & \iff \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ 2\mu - \nu = 0 \\ L_3 \leftarrow 2L_2 - L_3 \end{cases} \iff \lambda = \mu = \nu = 0. \end{aligned}$$

- La famille $(\sin, \cos)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lambda \sin x + \mu \cos x = 0$, i.e. que $\lambda \sin x + \mu \cos x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Dans ces conditions : $\lambda \sin 0 + \mu \cos 0 = 0$ et $\lambda \sin \frac{\pi}{2} + \mu \cos \frac{\pi}{2} = 0$, donc $\lambda = \mu = 0$.
- Montrer que 2 suites géométriques de raisons non-nulles distinctes forment une famille libre de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
On note $a, b, r, q \in \mathbb{C}^*$, avec $r \neq q$ et $u = (a \times r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (b \times q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites géométriques.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda u + \mu v = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda a r^n + \mu b q^n = 0$.
En prenant $n = 0$ et $n = 1$ en particulier, on obtient (S) : $\begin{cases} \lambda a + \mu b = 0 \\ \lambda a r + \mu b q = 0 \end{cases}$
On en déduit que $\begin{cases} \lambda a + \mu b = 0 \\ \mu b(q - r) = 0 \end{cases}$ Comme $b \neq 0$ et $q \neq r$, on en déduit que $\mu = 0$ puis que $\lambda = 0$ par la première ligne.
 (u, v) est donc libre.

Définition 24.10 – Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

- **Partie/famille libre** : On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ ou l'ensemble $\{x_i \mid i \in I\}$ est **libre** ou que les vecteurs x_i , i décrivant I , sont linéairement indépendants si :

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle, } \left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0 \right).$$

- **Partie/famille liée** : On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ ou l'ensemble $\{x_i \mid i \in I\}$ est **lié(e)** ou que les vecteurs x_i , i décrivant I , sont linéairement dépendants si $(x_i)_{i \in I}$ n'est **PAS** libre. Cela revient à dire que **L'UN AU MOINS** d'entre eux est combinaison linéaire des autres.

L'expression « presque nulle » nous ramène toujours à un nombre **FINI** de vecteurs utiles, donc la liberté d'une famille **INFINIE** de vecteurs est équivalente à la liberté de toutes ses sous-familles **FINIES**. Pour montrer qu'une famille $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs est libre, il suffit même de montrer que la famille $(x_0, \dots, x_n)$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 24.11 – La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$ - principe d'IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS.

Exemple 24.12 – Pour $a \in \mathbb{R}$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_a(x) = |x - a|$. La famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre d'éléments de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ des réels deux à deux distincts. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lambda_1 f_{a_1} + \dots + \lambda_n f_{a_n} = 0$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si $\lambda_i \neq 0$ alors $\lambda_1 f_{a_1} + \dots + \lambda_n f_{a_n}$ n'est pas dérivable en a_i alors que la fonction nulle l'est. Nécessairement $\lambda_i = 0$ et la famille étudiée est donc libre. $\square$

Proposition 24.13

1. Toute famille extraite d'une famille libre est libre.
2. Toute famille contenant une famille liée est liée.

Démonstration. Soient p et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .

On suppose que $(x_1, \dots, x_p)$ est liée. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0_E$. Alors on a aussi $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p + 0x_{p+1} + \dots + 0x_n = 0_E$, donc la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée. Par contraposition, si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, $(x_1, \dots, x_p)$ est libre. L'ordre des vecteurs n'influe pas sur le caractère libre ou lié d'une famille, la proposition est démontrée.

Le second point est la contraposée du premier. $\square$

Proposition 24.14 – Liberté de certaines familles polynomiales

Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés tous distincts est libre.

Démonstration. Considérons une famille $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ de polynômes non nuls de degrés tous distincts. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$ puisque l'ordre des vecteurs dans la famille n'influe pas sur la liberté de celle-ci.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que ces scalaires ne sont pas tous nuls. Notons i l'indice du dernier λ_i non-nul. On a donc

$$P = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_i P_i = 0 \quad (24.1)$$

En notant $d = \deg(P_i)$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$. D'après l'égalité (24.1), le coefficient de degré d de $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_i P_i$ est nul. Or, comme $P_1, \dots, P_{i-1}$ sont de degré strictement inférieur à d , ce coefficient est $\lambda_i a_d$.

On a donc $\lambda_i a_d = 0$ et $a_d \neq 0$, donc $\lambda_i = 0$, ce qui est absurde.

Donc, pour tout $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, et la famille $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est libre. $\square$

Exemple 24.15 – La famille $(X^2 - 1, 1, 4X^3 + X + 2)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés tous distincts donc c'est une famille libre.

3 – Bases

Définition 24.16 – Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{B}$ est une **base** de E si $\mathcal{B}$ est à la fois libre et génératrice de E , i.e. si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathcal{B}$ **D'UNE ET D'UNE SEULE MANIÈRE**.

Dans ce cas, pour tout $x \in E$, l'unique famille presque nulle $(x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ pour laquelle $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ est appelée la **famille des coordonnées** de x dans $\mathcal{B}$.

Convention de la base vide : Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E réduit au singleton $\{0_E\}$ possède-t-il une base? Oui, la famille vide! - autrement dit l'unique famille de vecteurs de E indexée par l'ensemble vide. Par convention des sommes vides, 0_E est en effet combinaison linéaire de la famille vide, et ce d'une et une seule manière. Ce point de vue peut paraître curieux, mais il rend de nombreuses preuves plus digestes.

La définition suivante est une synthèse des exemples précédents :

Définition 24.17 – **Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**

- **Familles de scalaires** : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si on pose : $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée sa **base canonique**.
- **Polynômes** : La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée sa **base canonique** et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée sa **base canonique**.
- **Matrices** : Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, si on note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont tous nuls sauf celui de position de (i, j) , égal à 1, la famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} < 1$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée sa **base canonique**.

Que signifie « canonique »? Réponse : « la plus naturelle ». De fait, les bases exhibées ci-dessus sont les plus naturelles, les plus simples, les plus faciles d'emploi auxquelles on peut penser dans $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[X], \mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, les coordonnées de $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base canonique sont... ce vecteur lui-même!
- Pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, la famille des coordonnées de P dans la base canonique est $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \dots$ i.e. P lui-même si on veut bien se souvenir qu'un polynôme n'est qu'une suite presque nulle de scalaires.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille des coordonnées de A dans la base canonique est $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \dots$ i.e. A elle-même.

Exemple 24.18 –

- La famille $((1, 1), (1, -2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

★ Nous voulons montrer ceci : $\exists!(a, b) \in \mathbb{R}^2, (x, y) = a(1, 1) + b(1, -2)$. Or pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) = a(1, 1) + b(1, -2) \iff \begin{cases} a + x = b \\ a - 2b = y \end{cases} = x \iff \begin{cases} a + b \\ 3b \end{cases} = x - y \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2$$

Triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, le système obtenu possède une et une seule solution.

- ★ Si on veut connaître en plus les coordonnées de (x, y) dans la base $((1, 1), (1, -2))$, il ne reste qu'à achever la résolution du système précédent. Après calcul, ces coordonnées sont $(a, b) = \left(\frac{2x+y}{3}, \frac{x-y}{3} \right)$.

- La famille $(X^2 + X, X^2 + 1, X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

On pourrait prouver en deux temps que $(X^2 + X, X^2 + 1, X + 1)$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, mais il y a plus simple. Montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ revient à montrer que tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2 est combinaison linéaire d'une unique façon de $X^2 + X, X^2 + 1$ et $X + 1$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \exists!(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, P = \lambda(X^2 + X) + \mu(X^2 + 1) + \nu(X + 1)$$

Soit donc $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Pour tous $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$:

$$P = \lambda(X^2 + X) + \mu(X^2 + 1) + \nu(X + 1) \iff \begin{cases} \lambda + \mu = a \\ \lambda + \nu = b \\ \mu + \nu = c \end{cases} \quad \text{après identification}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = a \\ \mu - \nu = a - b \\ \mu + \nu = c \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \iff \begin{cases} \lambda + \mu = a \\ \mu - \nu = a - b \\ \nu = \frac{-a + b + c}{2} \end{cases} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 - \frac{1}{2}L_2$$

Triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, le système obtenu possède une et une seule solution (λ, μ, ν) pour tout P fixé - d'où le résultat.

En pratique, pour trouver une base d'un espace vectoriel, on en cherche d'abord une famille génératrice en l'écrivant comme un Vect, puis on essaie de montrer que la famille ainsi obtenue est libre.

Exemple 24.19 –

- L'ensemble F des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour lesquelles $M^T = M + \text{tr}(M)I_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

Nous allons faire comme si la base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ ne nous était pas fournie.

★ Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$: $A \in F \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + (a+d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff d = -a \text{ et } c = b$,

donc : $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. En particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

★ Il nous reste à espérer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre. Or pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si jamais :

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{alors clairement } \lambda = \mu = 0$$

- ★ Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts. On note $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange de $x_1, \dots, x_n$. La famille $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et les coordonnées d'un polynôme P dans cette base sont $(P(x_1), \dots, P(x_n))$.

Nous avons en effet démontré au chapitre « Polynômes » que pour tous $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$: $P = \sum_{i=1}^n y_i L_i$ si et seulement si $y_i = P(x_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- ★ Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, la famille $(1, X - \lambda, (X - \lambda)^2, \dots, (X - \lambda)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont $\left(P(\lambda), P'(\lambda), \frac{P''(\lambda)}{2}, \dots, \frac{P^{(n)}(\lambda)}{n!} \right)$.

★ Pour la liberté, soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Faisons l'hypothèse que $\sum_{i=0}^n a_i (X - \lambda)^i = 0$. Par composition à droite par

$$X + \lambda : \sum_{i=0}^n a_i X^i = 0, \quad \text{donc aussitôt } a_0 = \dots = a_n = 0.$$

★ D'après la formule de Taylor polynomiale : $P = \sum_{i=0}^n \frac{P^{(i)}(\lambda)}{i!} (X - \lambda)^i$ pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, donc en effet $(1, X - \lambda, (X - \lambda)^2, \dots, (X - \lambda)^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$ et la formule donne aussi les coordonnées de P .

- La famille $(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x})$ est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel F des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Nous savons déjà que $F = \text{Vect}(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x})$, i.e. que cette famille engendre F . Pour la liberté, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $\lambda e^x + \mu e^{2x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors après évaluation en 0 : $\lambda + \mu = 0$, puis après dérivation et évaluation en 0 : $\lambda + 2\mu = 0$, donc $\lambda = \mu = 0$.

Théorème 24.20 – Caractérisation des matrices inversibles au moyen de leurs lignes/colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est inversible.
- (ii) La famille des colonnes de A est une base de $\mathbb{K}^n$.
- (iii) La famille des lignes de A est une base de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de A et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes. Le point important, c'est que pour tout $X \in \mathbb{K}^n$:

$$AX = \sum_{k=1}^n x_k C_k \quad \text{ou les } x_k \text{ désignent les coordonnées de } X. \text{ Ainsi :}$$

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\iff \forall Y \in \mathbb{K}^n, \exists ! X \in \mathbb{K}^n, Y = AX \\ &\iff \forall Y \in \mathbb{K}^n, \exists ! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, Y = \sum_{k=1}^n x_k C_k \iff (C_1, \dots, C_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n. \end{aligned}$$

En retour, les lignes de A n'étant jamais que les colonnes de $A^\top$:

$$A \text{ est inversible} \iff A^\top \text{ est inversible} \iff (L_1, \dots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n.$$

□

II – Espaces vectoriels de dimension finie

La notion de dimension fait aujourd'hui partie des meubles en littérature, au cinéma et au-delà. Tout le monde sait qu'une droite ou une même courbe est de dimension 1, qu'un plan ou même une surface est de dimension 2 et que nous vivons dans un espace à trois dimensions. Il n'est pourtant pas aisé de donner un sens rigoureux à ces idées courantes, mais c'est précisément notre but dans ce paragraphe - proposer une définition axiomatique de la dimension et en faire la théorie.

1 – Définition et propriétés fondamentales.

Proposition 24.21 – Stabilité des familles libres ou génératrices

1. Une famille génératrice reste génératrice si on lui enlève un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille (notamment un vecteur nul).
2. Une famille libre reste libre si on lui ajoute un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Démonstration.

- ▷ Soit $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n)$ une famille génératrice de E . Supposons que v_n est une combinaison linéaire des autres vecteurs. Par hypothèse, il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que $v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$. Soit u un vecteur quelconque de E . Comme $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice de E , on peut trouver des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Mais alors

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}) \\ &= (\lambda_1 + \alpha_1 \lambda_n) v_1 + (\lambda_2 + \alpha_2 \lambda_n) v_2 + \dots + (\lambda_{n-1} + \alpha_{n-1} \lambda_n) v_{n-1} \end{aligned}$$

donc $u \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1})$. Ceci étant vrai quel que soit le vecteur u , la famille $(v_1, \dots, v_{n-1})$ est génératrice de E .

- ▷ Si $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est libre et si $v_{n+1} \notin \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ des scalaires tels que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0_E$. Alors, nécessairement $\lambda_{n+1} = 0$ sinon v_{n+1} serait combinaison linéaire des vecteurs v_1 à v_n . Par suite, puisque $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, tous les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont nuls. Donc $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ est libre.

□

Définition 24.22 – On dit qu'un espace vectoriel E est **de dimension finie** si, et seulement si, il existe une famille finie de vecteurs de E qui soit génératrice de E . Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Exemple 24.23 – $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie (puisque'ils ont des bases de cardinal fini) pour $n, p \in \mathbb{N}^*$.

$\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. En effet, s'il était de dimension finie, il serait engendré par une famille finie de polynômes $(P_1, \dots, P_k)$. En notant d le degré maximal de ces polynômes, on a par les relations sur le degré que tout polynôme obtenu par combinaison linéaire de $P_1, \dots, P_k$ serait également de degré inférieur à d , ce qui contredit que $(P_1, \dots, P_k)$ engendre $\mathbb{K}[X]$.

Définition 24.24 – On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de E est **contenue** dans une famille $\mathcal{G}$ de E si tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ apparaissent dans $\mathcal{G}$ au moins autant de fois que dans $\mathcal{F}$.

Exemple 24.25 – $(1, i, i)$ est contenue dans $(i, 1, 3 - 2i, i)$ mais pas dans $(1, 1, i)$.

Théorème 24.26 – Base comprise entre une famille libre et une famille génératrice

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs.

Si $(x_1, \dots, x_n)$ engendrent E et si la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1, \dots, n\}$, alors il existe une partie J de $\{1, \dots, n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j \in J}$ est une base de E .

Démonstration. On note $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_n)$ et l'on suppose que $\mathcal{G}$ engendrent E . Quitte à réordonner les vecteurs, on peut supposer que $I = \{1, \dots, p\}$ où $1 \leq p \leq n$, autrement dit supposer que la famille $\mathcal{F}_p = (x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Pour tout $k \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, on définit par récurrence la famille libre $\mathcal{F}_k$ de la manière suivante :

- Si x_k est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}_{k-1}$, on pose $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{k-1}$. Dans ce cas $\mathcal{F}_k$ est libre car $\mathcal{F}_{k-1}$ l'est.
- Sinon, on ajoute x_k à $\mathcal{F}_{k-1}$ pour former $\mathcal{F}_k$. Comme $\mathcal{F}_{k-1}$ est libre et qu'on ajoute un vecteur qui n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}_{k-1}$, la famille $\mathcal{F}_k$ est aussi libre.

On construit ainsi une suite « croissante » de familles libres incluses dans $\mathcal{G}$.

De plus, $\mathcal{G}$ est génératrice de E et les vecteurs qui sont dans $\mathcal{G}$ mais pas dans $\mathcal{F}_n$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}_n$. Donc $\mathcal{F}_n$ est génératrice de E .

Donc $\mathcal{F}_n$ est libre et génératrice de E et donc c'est une base de E . La partie J de $\{1, \dots, n\}$ contenant I est ici l'ensemble des indices des vecteurs apparaissant dans $\mathcal{F}_n$. $\square$

On en déduit plusieurs conséquences fondamentales :

Théorème 24.27 – Théorème de la base extraite

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute famille génératrice finie $\mathcal{G}$ de E contient une base de E .

Démonstration. Si E est réduit au vecteur nul, alors la famille vide est une base de E et elle est incluse dans toute famille génératrice de E .

Sinon, soit $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice de E . Il existe un indice $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_{i_0} \neq 0$ (puisque E n'est pas réduit au vecteur nul). La famille (x_{i_0}) est alors libre et en appliquant le théorème précédent, on obtient qu'il existe une base de E extraite de la famille $\mathcal{G}$. $\square$

Corollaire 24.28 – Existence de base en dimension finie

Tout espace vectoriel de dimension finie contient au moins une base.

Théorème 24.29 – Théorème de la base incomplète

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base en lui adjoignant des vecteurs bien choisis d'une famille génératrice de E .

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ une famille libre. Soit $\mathcal{G}$ génératrice (existe d'après la définition de dimension finie) de E . On considère la famille $\mathcal{H}$ obtenue en concaténant les deux familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. La famille $\mathcal{H}$ est alors génératrice de E . D'après le théorème 24.26, on peut compléter $\mathcal{F}$ avec des vecteurs de $\mathcal{G}$ pour obtenir une base de E . $\square$

2 – Dimension d'un espace vectoriel

Intuitivement, on a bien envie de définir la dimension d'un espace vectoriel comme le nombre de vecteurs qu'on trouve dans ses bases, mais... qui nous dit que toutes les bases ont le même nombre de vecteurs? Pourquoi un espace vectoriel ne pourrait-il pas être à la fois de dimension 2 et de dimension 3?

En principe, la notion de *cardinal* concerne les ensembles et les ensembles seulement, mais par abus de langage, une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de n objets est souvent appelée une famille de *cardinal* n , c'est très commode.

Proposition 24.30 – Cardinaux relatifs des familles libres ou génératrices

Dans un espace vectoriel E de dimension finie,

- ▷ le cardinal de toute famille libre est inférieur ou égal au cardinal de toute famille génératrice de E ;
- ▷ une famille libre qui a autant d'éléments qu'une famille génératrice est une base.

Lemme 24.31

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux familles finies de vecteurs de E . Si $\mathcal{G}$ est génératrice de E et si tout vecteur de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est génératrice de E .

Démonstration du lemme. Soit u un vecteur de E . On sait que u est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G}$. Or tout vecteur de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ donc u est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}$ engendre E . $\square$

Démonstration de la proposition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit $(g_1, \dots, g_n)$ une famille génératrice de E .

Supposons qu'il existe une famille libre $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ à p éléments telle que $p \geq n$.

On va montrer par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la famille $(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$ est génératrice (avec éventuellement une permutation des g_i).

▷ Comme $(g_1, \dots, g_n)$ est génératrice, il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\ell_1 = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n$. Puisque ℓ_1 n'est pas nul, les α_i ne sont pas tous nuls. Quitte à effectuer une permutation des g_i on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. On a alors

$$g_1 = \frac{1}{\alpha_1} \ell_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} g_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} g_n.$$

Ainsi, tout vecteur de la famille génératrice $(g_1, \dots, g_n)$ est combinaison linéaire de la famille $(\ell_1, g_2, \dots, g_n)$ et donc $(\ell_1, g_2, \dots, g_n)$ est une famille génératrice.

▷ Soit $k < n$, supposons que $(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$ est génératrice. Il existe donc des scalaires $\beta_1, \dots, \beta_n$ tels que

$$\ell_{k+1} = \beta_1 \ell_1 + \dots + \beta_k \ell_k + \beta_{k+1} g_{k+1} + \dots + \beta_n g_n$$

La famille $(\ell_1, \dots, \ell_k, \ell_{k+1})$ est une famille libre en tant que famille extraite d'une famille libre, ainsi ℓ_{k+1} n'est pas combinaison linéaire de $(\ell_1, \dots, \ell_k)$ et donc les coefficients $\beta_{k+1}, \dots, \beta_n$ ne sont pas tous nuls. Quitte à effectuer une permutation des vecteurs $g_{k+1}, \dots, g_n$, on peut supposer que $\beta_{k+1} \neq 0$. Ainsi,

$$g_{k+1} = -\frac{\beta_1}{\beta_{k+1}} \ell_1 - \dots - \frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} \ell_k + \frac{1}{\beta_{k+1}} \ell_{k+1} - \frac{\beta_{k+2}}{\beta_{k+1}} g_{k+2} - \dots - \frac{\beta_n}{\beta_{k+1}} g_n.$$

Tout vecteur de la famille génératrice $(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$ est combinaison linéaire de la famille $(\ell_1, \dots, \ell_k, \ell_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_n)$ et donc $(\ell_1, \dots, \ell_k, \ell_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_n)$ est une famille génératrice.

Le principe de récurrence nous permet de conclure que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la famille $(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$ est génératrice.

En particulier lorsque $p = n$, pour $k = n$, on obtient que la famille $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ est génératrice (ce qui prouve d'ailleurs le 2ème point de la proposition).

Si $p > n$, alors la sous-famille $(\ell_1, \dots, \ell_{n+1})$ est aussi une famille libre, et elle contient $n+1$ éléments. Mais alors ℓ_{n+1} est une combinaison linéaire des vecteurs $\ell_1, \dots, \ell_n$ ce qui contredit le fait que la famille $(\ell_1, \dots, \ell_{n+1})$ est libre. $\square$

Théorème 24.32

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Les bases de E sont toutes finies de même cardinal. Ce cardinal unique est appelé la **dimension** de E et notée $\dim E$.

Si $\dim E = 1$, on dit que E est une droite (vectorielle), et si $\dim E = 2$, que E est un plan (vectoriel).

Démonstration. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases de E . Notons n_1 le nombre d'éléments de $\mathcal{B}_1$ et n_2 celui de $\mathcal{B}_2$.

- ▷ Comme $\mathcal{B}_1$ est libre et que $\mathcal{B}_2$ est génératrice de E , on a $n_1 \leq n_2$.
- ▷ Comme $\mathcal{B}_2$ est libre et que $\mathcal{B}_1$ est génératrice de E , on a $n_2 \leq n_1$.

Finalement, $n_2 = n_1$. □

Exemple 24.33 (À CONNAÎTRE) – D'après les bases canoniques déjà vues,

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ -espace de dimension 2.
3. $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.
4. $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n + 1$ sur $\mathbb{K}$.
5. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension np (en particulier, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2).

Théorème 24.34 – Cardinal d'une famille libre ou génératrice en dimension finie

Si E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, alors :

1. toute famille libre a au plus n éléments;
2. toute famille libre à n éléments est une base;
3. toute famille génératrice de E a au moins n éléments;
4. toute famille génératrice de E à n éléments est une base.

Démonstration. 1. 2. 3. sont des conséquences de la proposition précédente.

4. Si $n = 1$ c'est évident. On suppose que $n \geq 2$. Soit $(g_1, \dots, g_n)$ une famille génératrice de E à n éléments. Si cette famille n'était pas libre, l'un des vecteurs de cette famille serait une combinaison linéaire des autres et en le retirant de cette famille, on obtiendrait une famille génératrice à $n - 1$ éléments, ce qui est impossible.

Donc la famille $(g_1, \dots, g_n)$ est une base de E □

Théorème 24.35 – Caractérisation des bases en dimension finie

Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, ou bien si et seulement si elle est génératrice.

Démonstration. Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , si une famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs est libre (resp. génératrice), on peut la compléter en une base d'après le théorème de la base incomplète (resp. en extraire une base d'après le théorème de la base extraite). Le résultat est une famille de n vecteurs par définition de la dimension, ce qui veut dire qu'on n'a en fait ajouté (resp. ôté) aucun vecteur à $\mathcal{F}$. Conclusion : $\mathcal{F}$ était une base dès le départ! □



ATTENTION ! Ce théorème ne dit pas que : base = famille génératrice = famille libre en dimension finie! Il dit seulement que c'est vrai pour les familles qui ont exactement autant de vecteurs que la dimension de l'espace ambiant.

Exemple 24.36 – La famille $((0, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et comme la famille considérée est une famille de trois vecteurs, nous saurons que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$ quand nous aurons montré qu'elle est libre.

Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ des réels pour lesquels $\lambda(0, 1, 2) + \mu(1, 2, 0) + \nu(2, 0, 1) = (0, 0, 0)$. Clairement $\lambda = \mu = \nu = 0$ et c'est tout.

Théorème 24.37 – Bases de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P_0, P_1, \dots, P_n$ sont $n+1$ polynômes non nuls de degrés tous distincts dans $\mathbb{K}_n[X]$, alors la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration. C'est une famille libre d'après la Proposition 24.14. Comme elle est de cardinal $n+1$ dans un espace de dimension $n+1$, c'est bien une base de $\mathbb{K}_n[X]$. $\square$

Remarque 24.38 – Lorsque $\deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$, on dit que la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est échelonnée en degrés.

3 – Sous-espaces vectoriels de dimension finie**Théorème 24.39 – Dimension des sous-espaces vectoriels**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie, et

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

De plus si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Démonstration. Notons n la dimension de E . Si $F = \{0_E\}$, alors F est de dimension 0.

Sinon, il existe f_1 un vecteur non nul de F .

Si F est engendré par f_1 , alors F est de dimension 1 car (f_1) est alors une base de F .

Sinon, il existe f_2 un vecteur de F non colinéaire à f_1 de sorte que (f_1, f_2) est libre. Si (f_1, f_2) engendrent F , alors F est de dimension 2. Sinon, il existe $f_3 \in F$ non-coplanaire à f_1 et f_2 , etc....

On continue ainsi à ajouter des vecteurs à notre famille libre de vecteurs de F tant que celle-ci n'engendre pas F .

Le processus s'arrête nécessairement car une famille libre de n éléments de F (donc de E) engendrent E tout entier donc F . Au moment où le processus s'arrête, la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est alors une base de F et $p \leq n$. Donc F est de dimension finie et $\dim(F) = p \leq n$.

Si $\dim(F) = \dim(E)$, une base de F est une famille libre de E à n éléments : c'est aussi une base de E et donc $F = E$. $\square$

**Méthode 24.40 –**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. F et G des sous-espaces vectoriels de E . Pour prouver que $F = G$, il suffit de prouver que

$$F \subset G \text{ et } \dim(F) = \dim(G)$$

Exemple 24.41 – $\text{Vect}(1, 1+X, 1+X+X^2) = \mathbb{R}_2[X]$.

La famille $(1, 1+X, 1+X+X^2)$ est échelonnée en degré donc elle est libre et c'est donc une base de $\text{Vect}(1, 1+X, 1+X+X^2)$ qui est donc de dimension 3. Il est de plus clairement inclus dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est lui-même de dimension 3. Ainsi, on a bien $\text{Vect}(1, 1+X, 1+X+X^2) = \mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 24.42 – Dimension d'un espace vectoriel produit

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et : $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Le résultat se généralise au cas d'un nombre fini quelconque d'espaces vectoriels.

Démonstration. Donnons-nous $(e_1, \dots, e_m)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F — éventuellement vides. Nous allons montrer que la famille $\mathcal{B} = ((e_1, 0_F), \dots, (e_m, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_n))$ est une base de $E \times F$. Cela montrera bien que $E \times F$ est de dimension finie $m+n = \dim E + \dim F$.

- Montrons que $\mathcal{B}$ engendrent $E \times F$. Pour tout $(x, y) \in E \times F$, si nous notons $(x_1, \dots, x_m)$ les coordonnées de x dans $(e_1, \dots, e_m)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ celles de y dans $(f_1, \dots, f_n)$, alors :

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^m x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j f_j \right) = \sum_{i=1}^m x_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^n y_j (0_E, f_j).$$

- Pour la liberté, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ pour lesquels $\sum_{i=1}^m \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^n \mu_j (0_E, f_j) = (0_E, 0_F)$.

Alors $\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j f_j \right) = (0_E, 0_F)$, donc $\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i = 0_E$ et $\sum_{j=1}^n \mu_j f_j = 0_F$, et enfin par liberté de $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$:
 $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \mu_1 = \dots = \mu_n = 0$.

□

III – Somme de deux sous-espaces vectoriels et dimension

1 – Sommes directes

Nous avons vu dans le chapitre précédent que pour deux familles de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E , on a :

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) + \text{Vect}(y_1, \dots, y_p) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$$

On en déduit en particulier le résultat suivant :

Proposition 24.43 – Famille génératrice d'une somme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On suppose que F et G sont de dimension finie. Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille génératrice de F et soit $(g_1, \dots, g_n)$ une famille génératrice de G . Alors $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_n)$ est une famille génératrice de $F + G$.

Proposition 24.44 – Base d'une somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E qui sont en somme directe.

On suppose que F et G sont de dimension finie. Si $(f_1, \dots, f_p)$ est une base de F et $(g_1, \dots, g_n)$ est une base de G , alors la famille $\mathcal{H} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_n)$ est une base de $F \oplus G$, dite base adaptée à la somme directe $F \oplus G$.

Démonstration. D'après la proposition précédente $\mathcal{H}$ est une famille génératrice de $F \oplus G$.

Montrons qu'elle est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + \dots + \mu_n g_n = 0.$$

On pose $f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p$ et $g = \mu_1 g_1 + \dots + \mu_n g_n$. Alors $f \in F$ et $g \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E . De plus $f + g = 0$. Or, F et G sont en somme directe, donc $f = 0$ et $g = 0$. Ainsi, on a :

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p = 0 \quad \text{ET} \quad \mu_1 g_1 + \dots + \mu_n g_n = 0,$$

d'où $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ et $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$ car $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des bases de E .

Donc $\mathcal{H}$ est une base de $F \oplus G$

□

Proposition 24.45 – Supplémentaires par scission de base

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et k et n deux entiers tels que $1 \leq k < n$. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E . On note $H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $G = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$.

- ▷ Si $\mathcal{F}$ est libre, alors H et G sont en somme directe.
- ▷ Si $\mathcal{F}$ est une base de E , alors H et G sont supplémentaires dans E .

Démonstration. ▷ Supposons que $\mathcal{F}$ est libre.

Soit $x \in H$ et $y \in G$ tels que $x + y = 0$. Par définition de H et G , il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k, \quad y = \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n$$

Donc $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n = 0$. Comme $\mathcal{F}$ est libre, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Donc $x = 0$ et $y = 0$. D'après la caractérisation 1 des sommes directes, H et G sont en somme directe.

- ▷ Si $\mathcal{F}$ est une base de E , alors H et G sont en somme directe par le premier point. $H \oplus G \subset E$ car ce sont des sous-espaces vectoriels de E . De plus, pour tout $x \in E$, $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $H \oplus G$. Donc $E \subset H \oplus G$.

□

2 – Supplémentaires en dimension finie

Théorème 24.46 – Caractérisation des supplémentaires en dimension finie

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont supplémentaires.
2. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
3. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F + G = E$.

Démonstration. Notons $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F , $(g_1, \dots, g_r)$ une base de G et n la dimension de E .

$1 \Rightarrow 2$
 $1 \Rightarrow 3$ Supposons que F et G sont supplémentaires. Alors on sait que $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_r)$ est une base de $F \oplus G$ c'est-à-dire de E . En considérant le nombre de vecteurs de ces bases, on obtient $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. Par ailleurs, si F et G sont supplémentaires, alors $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$. Les points 2 et 3 sont donc démontrés.

$2 \Rightarrow 1$ Supposons que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$. L'hypothèse $F \cap G = \{0\}$ entraîne que F et G sont en somme directe donc $\mathcal{E} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_r)$ est une base de $F \oplus G$. Donc $\dim(F \oplus G) = p + r = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et donc $F \oplus G$ est un sous-espace vectoriel de E de même dimension que E . Ainsi, $F + G = E$ et finalement, F et G sont supplémentaires dans E .

$3 \Rightarrow 1$ Supposons que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$. L'hypothèse $F + G = E$ entraîne que $\mathcal{E} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_r)$ est une famille génératrice de E . L'hypothèse $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ donne $p + r = n$. Ainsi, $\mathcal{E}$ est une famille génératrice de n vecteurs de E , donc une base de E . D'après la proposition 24.45, F et G sont supplémentaires.

□

Théorème 24.47 – Existence de supplémentaires en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E .

Il existe alors dans E un sous-espace vectoriel G tel que F et G soient supplémentaires.

Démonstration. Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F . C'est une famille libre de E donc, d'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de E en lui adjoignant des vecteurs $g_1, \dots, g_r$.

Par définition, on a $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$ et l'on pose $G = \text{Vect}(g_1, \dots, g_r)$.

Comme $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_r)$ est une base de E , les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E .

□



ATTENTION ! Il n'y a pas unicité du supplémentaire d'un sous-espace vectoriel!

Exemple 24.48 – Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y + z = 0\}$ et $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$(x, y, z) \in E \iff x + y + z = 0 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}.$$

$$\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (x, y, z) = \lambda(-1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1) \iff (x, y, z) \in \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

Donc $E = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Comme $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires, E est donc de dimension 2.

F est évidemment de dimension 1. On a donc $\dim(E) + \dim(F) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Soit $(x, y, z) \in F \cap E$. $x \in F$ donc $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $(x, y, z) \in E$, $\lambda + \lambda + \lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ et $(x, y, z) = 0$.

Ainsi, $F \cap E = \{0\}$ donc F et E sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 24.49 – $\text{Vect}(X, X^3)$ est un supplémentaire de $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X+1) = P(1-X)\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

- Nous avons besoin d'abord d'une base de F . Pour tout $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$:

$$\begin{aligned} P \in F &\iff a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d = a(1-X)^3 + b(1-X)^2 + c(1-X) + d \\ &\iff \begin{cases} a &= -a \\ 3a+b &= 3a+b \\ 3a+2b+c &= -3a-2b-c \\ a+b+c+d &= a+b+c+d \end{cases} \quad \text{après identification des coefficients} \\ &\iff a=0 \quad \text{et} \quad 2b+c=0 \end{aligned}$$

Ce calcul montre que $(1, X^2 - 2X)$ engendre F . Cette famille étant libre, c'est une base de F .

- Complétons-la en une base de $\mathbb{R}_3[X]$ avec certains vecteurs de la base canonique. Échelonnée en degré, la famille $(1, X^2 - 2X, X, X^3)$ est libre, et composée de quatre vecteurs alors que $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, c'est même une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Conclusion : $\text{Vect}(X, X^3)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Théorème 24.50 – Formule de Grassmann

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration. Si $F \cap G = \{0\}$, on est dans le cas de la somme directe. Voir 24.44.

Sinon, on considère une base $(u_1, \dots, u_p)$ de $F \cap G$, où $p = \dim(F \cap G)$. Comme c'est à la fois une famille libre des sous-espaces vectoriels F et G , on peut, grâce au théorème de la base incomplète, la compléter en :

$(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ une base de F , avec $p + q = \dim(F)$.

$(u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r)$ une base de G , avec $p + r = \dim(G)$.

On pose alors $\mathcal{A}$ la famille $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_r)$.

D'après la Proposition 24.43, $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r)$ est une famille génératrice de $F + G$. En retirant les vecteurs en double, on obtient que $\mathcal{A}$ est une famille génératrice de $F + G$.

Montrons qu'elle est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q, \gamma_1, \dots, \gamma_r \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_q v_q + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_r w_r = 0.$$

On pose $x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$, $y = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_q v_q$, $z = \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_r w_r$. On a alors $x \in F \cap G$, $y \in F$, $z \in G$.

Comme $x + y + z = 0$, on a $z = -(x + y)$. Or $x + y \in F$, donc $z \in F$. On savait déjà que $z \in G$, donc $z \in F \cap G$. Comme $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de $F \cap G$, il existe $\rho_1, \dots, \rho_p \in \mathbb{K}$ tels que $z = \rho_1 u_1 + \dots + \rho_p u_p$. D'où

$$\rho_1 u_1 + \dots + \rho_p u_p - (\gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_r w_r) = 0.$$

Comme $(u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r)$ est une base de G , donc tous les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls. Notamment $\gamma_1 = \dots = \gamma_r = 0$.

On a alors

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_q v_q = 0.$$

Comme $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est une base de F , donc tous les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls.

Donc $\mathcal{A}$ est bien libre. Il s'agit donc d'une base de $F + G$. On a

$$\dim(F + G) = p + q + r = (p + q) + (p + r) - p = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

□

IV – Rang d'une famille de vecteurs

Définition 24.51 –

Soit E un espace vectoriel (de dimension finie ou non) et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

On appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille et on le note $\text{rg}(\mathcal{F})$. Autrement dit

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)).$$

Remarque 24.52 – Le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ de E est bien de dimension finie car $\mathcal{F}$ en est une famille génératrice.

Proposition 24.53 – Rang et caractère libre/génératrice

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E .

1. $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq p$.
2. $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$ si, et seulement si, la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.
3. Si E est de dimension finie n , alors $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq n$.
4. Si E est de dimension finie n , alors $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = n$ si, et seulement si, $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E .

Démonstration.

1. $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$, or dans une base de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$, le nombre de vecteurs est inférieur ou égal au nombre de vecteurs dans toute famille génératrice de cet espace vectoriel. On en déduit que $\dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)) \leq p$ c'est-à-dire $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq p$.
2. $\Rightarrow$ Supposons que $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$, alors $\dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)) = p$ et puisque $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille génératrice de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$, elle en est aussi une base, eu égard au nombre de ses vecteurs; c'est donc aussi une famille libre.
 $\Leftarrow$ Supposons que $(u_1, \dots, u_p)$ est libre. Puisque cette famille est génératrice de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$, elle est aussi une base de cet espace vectoriel et donc $\dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)) = p$, c'est-à-dire $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$.
3. Puisque $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E , si E est de dimension finie, alors on a que $\dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)) \leq \dim(E)$ et donc si $\dim(E) = n$, alors $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq n$.
4. On suppose que E est de dimension finie n . Comme $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \subset E$, on a

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = E \iff \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)) = \dim(E) \iff \text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$$

□

Corollaire 24.54 – Caractérisation des bases par le rang

Soient E un espace vectoriel de dimension finie égale à n et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E . La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si, et seulement si, $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$.

Démonstration. En dimension finie n , une famille de n vecteurs est une base si, et seulement si, elle est libre. Il suffit d'appliquer la proposition précédente. □

Exemple 24.55 – On considère les polynômes suivants de $\mathbb{R}[X]$:

$$P = X + 2 \quad Q = X^2 + 2X \quad R = X^3 + 2X^2 \quad \text{et} \quad S = X^3 + 3X^2 + 3X + 2.$$

Déterminer le rang de la famille (P, Q, R, S) .

On constate que $S = P + Q + R$ donc $\text{Vect}(P, Q, R, S) = \text{Vect}(P, Q, R)$. D'autre part, les vecteurs non nuls P, Q et R sont de degrés tous distincts donc forment une famille libre. Ainsi, (P, Q, R) est une base de $\text{Vect}(P, Q, R)$ donc $\dim(\text{Vect}(P, Q, R)) = 3$ et donc $\dim(\text{Vect}(P, Q, R, S)) = 3$ et finalement $\text{rg}(P, Q, R, S) = 3$.