

24 | Dimensions des espaces vectoriels

I call our world Flatland, not because we call it so, but to make its nature clearer to you, my happy readers, who are privileged to live in Space.

Edwin Abbot Abbot, professeur et théologien, dans *Flatland : A romance of many dimensions*, satire mathématique qui conte les aventures d'un Carré dont le monde plat est mis en cause par la découverte de l'intrusion d'une Sphère.

I – Familles de vecteurs

1 – Parties et familles génératrices

Définition 24.1 – Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et X une partie de E . On dit que la partie X est **génératrice** de E ou **engendre** E si tout élément de E est combinaison linéaire d'éléments de X , i.e si $E = \text{Vect}(X)$.

Si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, cela se traduit par

$$\forall x \in E, \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$$

Exemple 24.2 –

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, donc la famille $((1, 0), (0, 1))$ engendre $\mathbb{R}^2$. De même, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, donc $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ engendre $\mathbb{R}^3$.

Plus généralement, posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ engendre $\mathbb{K}^n$ car pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$: $(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ car pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, notons E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de position de (i, j) , égal à 1. La famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est alors génératrice

de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ car pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$.

- La famille $(1, i)$ engendre le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais (1) suffit à engendrer le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.
- $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$ et $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, on considère $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 24.3 –

1. Le caractère générateur ou non d'une famille ne dépend pas de l'ordre de ses vecteurs.
2. Une famille quelconque $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E n'est pas nécessairement génératrice de E . En revanche, elle est une famille génératrice de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Lemme 24.4 – Croissance des sous-espaces engendrés

Soient n et p deux entiers naturels non nul. Soit $(v_1, \dots, v_{n+p})$ une famille de vecteurs de E .

On a $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \subset \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n+p})$.

Démonstration.

□

Proposition 24.5

Toute famille contenant une famille génératrice de E est génératrice de E .

Démonstration.

□

Trouver une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel, c'est l'écrire comme un Vect.

Exemple 24.6 –

- L'ensemble $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $((1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1))$.

- L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid 2P(X+1) = XP'\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par $X^2 - 4X + 3$.

2 – Parties et familles libres ou liées

Définition 24.7 – Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n \in E$. On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre ou que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont **linéairement indépendants** si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \right)$$

ou encore, si et seulement si, aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Quitte à remplacer λ_i par $\lambda_i - \mu_i$ dans la définition de la liberté, on peut aussi dire que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \mu_i \right)$, ce qui n'est finalement rien de plus qu'un **PRINCIPE D'IDENTIFICATION**. En résumé :

FAMILLE GÉNÉRATRICE	=	EXISTENCE pour TOUT vecteur d'une décomposition comme combinaison linéaire
FAMILLE LIBRE	=	UNICITÉ des coefficients dans les combinaisons linéaires, donc possibilité de pratiquer des IDENTIFICATIONS

Définition 24.8 – Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n \in E$. On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est **liée** ou que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont linéairement dépendants si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ n'est **PAS** libre. Cela revient à dire que l'un au moins des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est combinaison linéaire des autres.

Pour deux vecteurs $x, y \in E$, on dit que x et y sont **colinéaires** si la famille (x, y) est liée, i.e. si x ou y est un multiple de l'autre.

Exemple 24.9 –

- Tout ensemble de vecteurs qui contient le vecteur nul est lié.
- La famille $(1, i)$ est libre dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$ - principe d' IDENTIFICATION DES PARTIES RÉELLES ET IMAGINAIRES
- mais liée dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons : $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre dans $\mathbb{K}^n$ - principe d' IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS D'UNE FAMILLE DE SCALAIRES.
- Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, notons E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de position de (i, j) , égal à 1. La famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est alors libre dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ - principe d' IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS D'UNE MATRICE .
- La famille $((2, 1), (-1, 3), (0, 2))$ est liée dans $\mathbb{R}^2$.
- La famille $(X^2 - X + 1, X^2 + X - 2, X^2 - 2X + 3)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

- La famille $(\sin, \cos)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- Montrer que 2 suites géométriques de raisons non-nulles distinctes forment une famille libre de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Définition 24.10 – Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

- **Partie/famille libre** : On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ ou l'ensemble $\{x_i \mid i \in I\}$ est **libre** ou que les vecteurs x_i , i décrivant I , sont linéairement indépendants si :

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle, } \left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0 \right).$$

- **Partie/famille liée** : On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ ou l'ensemble $\{x_i \mid i \in I\}$ est **lié(e)** ou que les vecteurs x_i , i décrivant I , sont linéairement dépendants si $(x_i)_{i \in I}$ n'est **PAS** libre. Cela revient à dire que **L'UN AU MOINS** d'entre eux est combinaison linéaire des autres.

L'expression « presque nulle » nous ramène toujours à un nombre **FINI** de vecteurs utiles, donc la liberté d'une famille **INFINIE** de vecteurs est équivalente à la liberté de toutes ses sous-familles **FINIES**. Pour montrer qu'une famille $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs est libre, il suffit même de montrer que la famille $(x_0, \dots, x_n)$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 24.11 – La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$ - principe d' **IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS**.

Exemple 24.12 – Pour $a \in \mathbb{R}$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_a(x) = |x - a|$. La famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre d'éléments de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Démonstration.

□

Proposition 24.13

1. Toute famille extraite d'une famille libre est libre.
2. Toute famille contenant une famille liée est liée.

Démonstration.

□

Proposition 24.14 – Liberté de certaines familles polynomiales

Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés tous distincts est libre.

Démonstration.

□

Exemple 24.15 – La famille $(X^2 - 1, 1, 4X^3 + X + 2)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés tous distincts donc c'est une famille libre.

3 – Bases

Définition 24.16 – Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{B}$ est une **base** de E si $\mathcal{B}$ est à la fois libre et génératrice de E , i.e. si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathcal{B}$ **D'UNE ET D'UNE SEULE MANIÈRE**.

Dans ce cas, pour tout $x \in E$, l'unique famille presque nulle $(x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ pour laquelle $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ est appelée la **famille des coordonnées** de x dans $\mathcal{B}$.

Convention de la base vide : Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E réduit au singleton $\{0_E\}$ possède-t-il une base? Oui, la famille vide! - autrement dit l'unique famille de vecteurs de E indexée par l'ensemble vide. Par convention des sommes vides, 0_E est en effet combinaison linéaire de la famille vide, et ce d'une et une seule manière. Ce point de vue peut paraître curieux, mais il rend de nombreuses preuves plus digestes.

La définition suivante est une synthèse des exemples précédents :

Définition 24.17 – **Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**

- **Familles de scalaires** : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si on pose : $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée sa **base canonique**.
- **Polynômes** : La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ appelée sa **base canonique** et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée sa **base canonique**.
- **Matrices** : Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, si on note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont tous nuls sauf celui de position de (i, j) , égal à 1, la famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée sa **base canonique**.

Que signifie « canonique »? Réponse : « la plus naturelle ». De fait, les bases exhibées ci-dessus sont les plus naturelles, les plus simples, les plus faciles d'emploi auxquelles on peut penser dans $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, les coordonnées de $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base canonique sont... ce vecteur lui-même!
- Pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, la famille des coordonnées de P dans la base canonique est $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$... i.e. P lui-même si on veut bien se souvenir qu'un polynôme n'est qu'une suite presque nulle de scalaires.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille des coordonnées de A dans la base canonique est $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$... i.e. A elle-même.

Exemple 24.18 –

- La famille $((1, 1), (1, -2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

- La famille $(X^2 + X, X^2 + 1, X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

En pratique, pour trouver une base d'un espace vectoriel, on en cherche d'abord une famille génératrice en l'écrivant comme un Vect, puis on essaie de montrer que la famille ainsi obtenue est libre.

Exemple 24.19 –

- L'ensemble F des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour lesquelles $M^\top = M + \text{tr}(M)I_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

- ★ Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts. On note $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange de $x_1, \dots, x_n$. La famille $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et les coordonnées d'un polynôme P dans cette base sont $(P(x_1), \dots, P(x_n))$.

- ★ Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, la famille $(1, X - \lambda, (X - \lambda)^2, \dots, (X - \lambda)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont $\left(P(\lambda), P'(\lambda), \frac{P''(\lambda)}{2}, \dots, \frac{P^{(n)}(\lambda)}{n!}\right)$.

- La famille $(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x})$ est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel F des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Théorème 24.20 – Caractérisation des matrices inversibles au moyen de leurs lignes/colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est inversible.
- (ii) La famille des colonnes de A est une base de $\mathbb{K}^n$.
- (iii) La famille des lignes de A est une base de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration.

□

II – Espaces vectoriels de dimension finie

La notion de dimension fait aujourd'hui partie des meubles en littérature, au cinéma et au-delà. Tout le monde sait qu'une droite ou une même courbe est de dimension 1, qu'un plan ou même une surface est de dimension 2 et que nous vivons dans un espace à trois dimensions. Il n'est pourtant pas aisé de donner un sens rigoureux à ces idées courantes, mais c'est précisément notre but dans ce paragraphe - proposer une définition axiomatique de la dimension et en faire la théorie.

1 – Définition et propriétés fondamentales.

Proposition 24.21 – Stabilité des familles libres ou génératrices

1. Une famille génératrice reste génératrice si on lui enlève un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille (notamment un vecteur nul).
2. Une famille libre reste libre si on lui ajoute un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Démonstration.

□

Définition 24.22 – On dit qu'un espace vectoriel E est **de dimension finie** si, et seulement si, il existe une famille finie de vecteurs de E qui soit génératrice de E . Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Exemple 24.23 –

Définition 24.24 – On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de E est **contenue** dans une famille $\mathcal{G}$ de E si tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ apparaissent dans $\mathcal{G}$ au moins autant de fois que dans $\mathcal{F}$.

Exemple 24.25 – $(1, i, i)$ est contenue dans $(i, 1, 3 - 2i, i)$ mais pas dans $(1, 1, i)$.

Théorème 24.26 – Base comprise entre une famille libre et une famille génératrice

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs.

Si $(x_1, \dots, x_n)$ engendre E et si la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1, \dots, n\}$, alors il existe une partie J de $\{1, \dots, n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j \in J}$ est une base de E .

Démonstration.

□

On en déduit plusieurs conséquences fondamentales :

Théorème 24.27 – Théorème de la base extraite

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute famille génératrice finie $\mathcal{G}$ de E contient une base de E .

Démonstration.

□

Corollaire 24.28 – Existence de base en dimension finie

Tout espace vectoriel de dimension finie contient au moins une base.

Théorème 24.29 – Théorème de la base incomplète

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base en lui adjoignant des vecteurs bien choisis d'une famille génératrice de E .

Démonstration.

□

2 – Dimension d'un espace vectoriel

Intuitivement, on a bien envie de définir la dimension d'un espace vectoriel comme le nombre de vecteurs qu'on trouve dans ses bases, mais... qui nous dit que toutes les bases ont le même nombre de vecteurs? Pourquoi un espace vectoriel ne pourrait-il pas être à la fois de dimension 2 et de dimension 3?

En principe, la notion de *cardinal* concerne les ensembles et les ensembles seulement, mais par abus de langage, une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de n objets est souvent appelée une famille de *cardinal* n , c'est très commode.

Proposition 24.30 – Cardinaux relatifs des familles libres ou génératrices

Dans un espace vectoriel E de dimension finie,

- ▷ le cardinal de toute famille libre est inférieur ou égal au cardinal de toute famille génératrice de E ;
- ▷ une famille libre qui a autant d'éléments qu'une famille génératrice est une base.

Lemme 24.31

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux familles finies de vecteurs de E . Si $\mathcal{G}$ est génératrice de E et si tout vecteur de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est génératrice de E .

Démonstration du lemme.

□

Démonstration de la proposition.

□

Théorème 24.32

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Les bases de E sont toutes finies de même cardinal. Ce cardinal unique est appelé la **dimension** de E et notée $\dim E$.

Si $\dim E = 1$, on dit que E est une droite (vectorielle), et si $\dim E = 2$, que E est un plan (vectoriel).

Démonstration.

□

Exemple 24.33 (À CONNAÎTRE) – D'après les bases canoniques déjà vues,

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ -espace de dimension 2.
3. $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.
4. $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n + 1$ sur $\mathbb{K}$.
5. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension np (en particulier, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2).

Théorème 24.34 – Cardinal d’une famille libre ou génératrice en dimension finie

Si E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, alors :

1. toute famille libre a au plus n éléments;
2. toute famille libre à n éléments est une base;
3. toute famille génératrice de E a au moins n éléments;
4. toute famille génératrice de E à n éléments est une base.

Démonstration.

□

Théorème 24.35 – Caractérisation des bases en dimension finie

Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, ou bien si et seulement si elle est génératrice.

Démonstration.

□



ATTENTION ! Ce théorème ne dit pas que : base = famille génératrice = famille libre en dimension finie ! Il dit seulement que c'est vrai pour les familles qui ont exactement autant de vecteurs que la dimension de l'espace ambiant.

Exemple 24.36 – La famille $((0, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 24.37 – Bases de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P_0, P_1, \dots, P_n$ sont $n + 1$ polynômes non nuls de degrés tous distincts dans $\mathbb{K}_n[X]$, alors la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration.

□

Remarque 24.38 – Lorsque $\deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$, on dit que la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est échelonnée en degrés.

3 – Sous-espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 24.39 – Dimension des sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie, et

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

De plus si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Démonstration.

□

**Méthode 24.40 –**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. F et G des sous-espaces vectoriels de E . Pour prouver que $F = G$, il suffit de prouver que

$$F \subset G \text{ et } \dim(F) = \dim(G)$$

Exemple 24.41 – $\text{Vect}(1, 1 + X, 1 + X + X^2) = \mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 24.42 – Dimension d'un espace vectoriel produit

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et : $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Le résultat se généralise au cas d'un nombre fini quelconque d'espaces vectoriels.

Démonstration.

□

III – Somme de deux sous-espaces vectoriels et dimension

1 – Sommes directes

Nous avons vu dans le chapitre précédent que pour deux familles de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E , on a :

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) + \text{Vect}(y_1, \dots, y_p) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$$

On en déduit en particulier le résultat suivant :

Proposition 24.43 – Famille génératrice d'une somme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace-vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On suppose que F et G sont de dimension finie. Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille génératrice de F et soit $(g_1, \dots, g_n)$ une famille génératrice de G . Alors $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_n)$ est une famille génératrice de $F + G$.

Proposition 24.44 – Base d'une somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E qui sont en somme directe.

On suppose que F et G sont de dimension finie. Si $(f_1, \dots, f_p)$ est une base de F et $(g_1, \dots, g_n)$ est une base de G , alors la famille $\mathcal{H} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_n)$ est une base de $F \oplus G$, dite base adaptée à la somme directe $F \oplus G$.

Démonstration.

□

Proposition 24.45 – Supplémentaires par scission de base

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et k et n deux entiers tels que $1 \leq k < n$. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E . On note $H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $G = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$.

- ▷ Si $\mathcal{F}$ est libre, alors H et G sont en somme directe.
- ▷ Si $\mathcal{F}$ est une base de E , alors H et G sont supplémentaires dans E .

Démonstration.

□

2 – Supplémentaires en dimension finie

Théorème 24.46 – Caractérisation des supplémentaires en dimension finie

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont supplémentaires.
2. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
3. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F + G = E$.

Démonstration.

□

Théorème 24.47 – Existence de supplémentaires en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E .

Il existe alors dans E un sous-espace vectoriel G tel que F et G soient supplémentaires.

Démonstration.

□



ATTENTION ! Il n'y a pas unicité du supplémentaire d'un sous-espace vectoriel!

Exemple 24.48 – Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y + z = 0\}$ et $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$.
Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 24.49 – $\text{Vect}(X, X^3)$ est un supplémentaire de $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X+1) = P(1-X)\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Théorème 24.50 – Formule de Grassmann

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration.

□

IV – Rang d’une famille de vecteurs

Définition 24.51 –

Soit E un espace vectoriel (de dimension finie ou non) et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

On appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille et on le note $\text{rg}(\mathcal{F})$.

Autrement dit

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)).$$

Remarque 24.52 – Le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ de E est bien de dimension finie car $\mathcal{F}$ en est une famille génératrice.

Proposition 24.53 – Rang et caractère libre/génératrice

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d’un espace vectoriel E .

1. $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq p$.
2. $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$ si, et seulement si, la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.
3. Si E est de dimension finie n , alors $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq n$.
4. Si E est de dimension finie n , alors $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = n$ si, et seulement si, $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E .

Démonstration.

□

Corollaire 24.54 – Caractérisation des bases par le rang

Soient E un espace vectoriel de dimension finie égale à n et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E . La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si, et seulement si, $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$.

Démonstration. En dimension finie n , une famille de n vecteurs est une base si, et seulement si, elle est libre. Il suffit d'appliquer la proposition précédente. $\square$

Exemple 24.55 – On considère les polynômes suivants de $\mathbb{R}[X]$:

$$P = X + 2 \quad Q = X^2 + 2X \quad R = X^3 + 2X^2 \quad \text{et} \quad S = X^3 + 3X^2 + 3X + 2.$$

Déterminer le rang de la famille (P, Q, R, S) .