

23 | Espaces vectoriels

Supposé qu'Euclide et ses prédécesseurs aient considéré le triangle comme une moitié de carré ou, mieux, d'un parallélogramme : ils auraient été immédiatement conduits au vecteur, c'est-à-dire à la structure de l'espace comme espace vectoriel.

Michel Serres, philosophe et historien des sciences (1930-2019)

Le concept de linéarité a déjà été introduit de manière informelle dans le Chapitre 12 consacré aux équations différentielles *linéaires*. De manière générale, nombreux sont les problèmes, que ce soit en mathématiques, physique, économie, vérifiant le principe suivant : « si u et v sont deux solutions, alors $\lambda u + v$ est également solution pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. »

Ce type de problème amène assez naturellement à introduire la notion d'espaces vectoriels. Le nom provient de l'ensemble le plus simple à visualiser, celui des vecteurs du plan ou de l'espace. Vous savez qu'il est possible d'additionner deux vecteurs mais aussi les multiplier par un réel λ . De la même manière, nous avons vu qu'il était possible d'additionner deux fonctions ou bien les multiplier par un réel et l'objet obtenu est encore une fonction. Même chose avec les polynômes, les matrices, les suites...

L'intérêt de l'étude des espaces vectoriels est de dégager les propriétés communes que partagent ces ensembles pourtant très différents. Nous obtiendrons ainsi des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, de l'espace, aux fonctions, aux polynômes, ...

Le structure d'espace vectoriel est un nouvel exemple fondamental de structure algébrique - après les groupes et les anneaux. Cependant, alors que vous n'aviez que peu de choses à savoir sur les groupes et les anneaux, vous en saurez bientôt beaucoup sur les espaces vectoriels, dont la théorie est appelée l'algèbre linéaire.

Dans ce cours, sans surprise, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ceci étant dit, tous les résultats présentés demeurent vrais sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

I – Structure d'espace vectoriel

1 – Définitions

Exemple 23.1 – On considère $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$. Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in E$ avec $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

calculer :

$x + y$

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

$\lambda \cdot x$

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}.$$

On constate que $x + y \in E$. On dit que $+$ est une loi de composition interne sur E . On constate que $\lambda \cdot x \in E$. On dit que $\cdot$ est une loi de composition externe sur E .

Définition 23.2 – Soit E un ensemble non vide.

On dit que la loi $+$ est une **loi de composition interne** sur E si : $\forall (x, y) \in E^2 \quad x + y \in E$.

On dit que la loi $\cdot$ est une **loi de composition externe** sur E si : $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot x \in E$.

Exemple 23.3 – Si on se place sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons défini une loi de composition interne $+$ et une loi de composition externe dans le Chapitre 17. En effet,

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, M + N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot M = \lambda M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Dire qu'un ensemble E est un espace vectoriel, c'est mettre une loi externe et interne sur E tel que ces deux lois vérifient un certain nombre de propriétés.

Définition 23.4 – On appelle $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel** ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou tout simplement espace vectoriel, tout triplet $(E, +, \cdot)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est noté 0_E ou 0 et appelé le vecteur nul de E . Autrement dit $+$ est une loi de composition interne sur E qui satisfait les propriétés suivantes :
 - pour tous $x, y \in E$: $x + y = y + x$,
 - pour tous $x, y, z \in E$: $x + (y + z) = (x + y) + z$,
 - pour tout $x \in E$: $x + 0_E = 0_E + x = x$,
 - pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ qui vérifie : $x + y = y + x = 0_E$, (y est appelé **opposé** de x et noté $-x$)
- La loi de composition externe $\cdot$ satisfait les propriétés suivantes :
 - pour tout $x \in E$: $1 \cdot x = x$,
 - pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda \cdot (x + y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y)$,
 - pour tous $x \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $(\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x)$,
 - pour tous $x \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$.

Le corps $\mathbb{K}$ est appelé **corps de base** pour E .

Remarque 23.5 –

- Lorsque E est un espace vectoriel, les éléments de E sont appelés les **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ les **scalaires**.
- La tradition veut qu'on ne mette pas de flèches sur les vecteurs d'un espace vectoriel quelconque. On continue cependant d'en mettre quand on fait de la géométrie classique dans le plan et dans l'espace.
- L'élément neutre 0_E (souvent noté simplement 0 mais à ne pas confondre avec zéro) est appelé vecteur nul, il est présent dans tout espace vectoriel.
- Le symbole $\cdot$ qui se trouve entre un scalaire et un vecteur est la plupart du temps omis, comme c'est le cas par exemple lorsqu'on multiplie une matrice A par un réel 2 : on écrit $2A$ et non $2 \cdot A$.

Proposition 23.6 – Règles de calcul dans un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E$.
2. Pour tout $x \in E$: $-x = (-1) \cdot x$, où $-x$ est l'opposé de x dans E .

Démonstration.

1. Trois étapes. Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Soit $x \in E$. Alors $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$.

De plus, tout vecteur de E possède un opposé, donc :

$$\begin{aligned} 0_E &= 0 \cdot x + (-0 \cdot x) = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-0 \cdot x) \\ &= 0 \cdot x + (0 \cdot x + (-0 \cdot x)) = 0 \cdot x + 0_E = 0 \cdot x \end{aligned}$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$.

De plus, tout vecteur de E possède un opposé, donc :

$$\begin{aligned} 0_E &= \lambda \cdot 0_E + (-\lambda \cdot 0_E) = (\lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E) + (-\lambda \cdot 0_E) \\ &= \lambda \cdot 0_E + (\lambda \cdot 0_E + (-\lambda \cdot 0_E)) = \lambda \cdot 0_E + 0_E = \lambda \cdot 0_E \end{aligned}$$

- Si $\lambda \cdot x = 0_E$ avec $\lambda \neq 0$: $x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{\lambda} \times \lambda\right) \cdot x = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E$.

2. Pour tout $x \in E$: $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 - 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0_E$, donc $-x = (-1) \cdot x$.

□

Exemple 23.7 – Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$:

- $(\mathbb{R}^2, +)$ est bien un groupe commutatif, comme déjà vu dans le chapitre 14.
- Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $\alpha \cdot x$ comme $(\alpha x_1, \alpha x_2) \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit bien d'une multiplication externe, qui vérifie les propriétés :

1. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot x &= ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) = \alpha \cdot x + \beta \cdot x\end{aligned}$$

2. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (x + y) &= \alpha (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y\end{aligned}$$

3. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = \alpha \cdot (\beta x_1, \beta x_2) = (\alpha \beta x_1, \alpha \beta x_2) = (\alpha \beta) \cdot x$$

4. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $1 \cdot x = (x_1, x_2) = x$.

Donc $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

De la même manière, on pourrait remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ dans tout ce qui a été fait ci-dessus. Ainsi, $(\mathbb{C}^2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, avec les lois $+$ et $\cdot$ définies de manière analogue à ce qui a été fait pour $\mathbb{R}^2$.

Exemple 23.8 – Pour tout corps $\mathbb{K}$, $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démonstration. Cela résulte directement de la définition des corps. Il suffit de considérer la multiplication $\times$ sur $\mathbb{K}$ comme un loi de composition EXTERNE. On obtient alors toutes les propriétés voulues sans aucun travail. $\square$

L'exemple 23.7 se généralise facilement via la notion d'espace vectoriel produit.

Théorème 23.9 – Espace vectoriel produit

Soient $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Le produit $E_1 \times \dots \times E_n$ est un groupe commutatif pour la loi $+$ définie pour tous $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ par :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

On le munit d'une loi externe $\cdot$ en posant pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$:

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n).$$

Le triplet $(E_1 \times \dots \times E_n, +, \cdot)$ est alors un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Ici : $0_{E_1 \times \dots \times E_n} = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

Démonstration. Le produit $(E_1 \times \dots \times E_n, +)$ est un groupe d'après le Théorème 14.28 sur les groupes produits. Nous nous contenterons de deux axiomes concernant la loi de composition externe. Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$:

$1 \cdot (x_1, \dots, x_n) = (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) = (x_1, \dots, x_n)$ et :

$$\begin{aligned}\lambda \cdot ((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) &= \lambda \cdot (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (\lambda \cdot (x_1 + y_1), \dots, \lambda \cdot (x_n + y_n)) \\ &= (\lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot y_1, \dots, \lambda \cdot x_n + \lambda \cdot y_n) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n) + (\lambda \cdot y_1, \dots, \lambda \cdot y_n) \\ &= \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) + \lambda \cdot (y_1, \dots, y_n)\end{aligned}$$

$\square$

En particulier, $\mathbb{K}^n = \overbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}^{n \text{ termes}}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous retrouvons ici le cas des vecteurs du plan avec $\mathbb{R}^2$ (cf exemple 23.7) et celui des vecteurs de l'espace avec $\mathbb{R}^3$.

Par exemple : $(1, 4, -3) + 2 \cdot (0, 2, 5) = (1, 8, 7)$.

2 – Espaces vectoriels de référence

Exemple 23.10 –

1. Les ensembles $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{K})$ avec les lois $+$ et $\cdot$ définies dans le Chapitre 17 sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Plus généralement, pour n et $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Par exemple, pour $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, l'élément neutre est la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'opposé de $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ est $-x = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$.

2. On a déjà vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
3. L'ensemble des polynômes $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
L'addition de polynômes et la multiplication par une constante ont été définis dans le Chapitre 19.
L'élément neutre est le polynôme nul $P = 0$.
L'opposé d'un polynôme $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ est le polynôme $-P = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \dots - a_1 x - a_0$.
4. L'ensemble des suites $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
L'élément neutre est la suite nulle.
L'opposé d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $-(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. L'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ (resp $(\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$) est un espace vectoriel.
L'élément neutre est la fonction nulle $f = 0$.
L'opposé d'une fonction f est la fonction $-f$ définie par $\forall x \in I, (-f)(x) = -f(x)$.

Exemple 23.11 – $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ N'EST PAS un espace vectoriel.

En effet, par exemple, pour $x = 3 \in \mathbb{N}$ et $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, $\lambda x = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$.

Remarque 23.12 – Nous avons vu que $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Puisque la multiplication d'un complexe par un nombre réel reste un nombre complexe, $\mathbb{C}^2$ est également un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (mais $\mathbb{R}^2$ n'est pas un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel!). Attention toutefois, ces deux structures sont bien différentes, comme nous le verrons plus tard.

Théorème 23.13 – Espaces vectoriels d'applications

Soient X un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'ensemble E^X est un groupe commutatif pour la loi $+$ définie pour tous $f, g \in E^X$ par :

$$\forall x \in X, (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

On le munit d'une loi externe $\cdot$ en posant pour tous $f \in E^X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\forall x \in X, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot (f(x))$. Le triplet $(E^X, +, \cdot)$ est alors un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Ici, 0_{E^X} est l'application nulle $x \mapsto 0_E$ de X dans E .

Démonstration. Le fait que $(E^X, +)$ soit un groupe a déjà été vu dans le Chapitre 14. Nous nous contenterons de deux axiomes sur les quatre pour la loi externe. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in E^X$. Alors $1 \cdot f = f$ car pour tout $x \in X$: $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot (f(x)) = f(x)$, et $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$ car pour tout $x \in X$:

$$(\lambda \cdot (f + g))(x) = \lambda \cdot ((f + g)(x)) = \lambda \cdot (f(x) + g(x)) = \lambda \cdot (f(x)) + \lambda \cdot (g(x)) = (\lambda \cdot f)(x) + (\lambda \cdot g)(x).$$

□

Ce théorème justifie en particulier que pour tout intervalle I , l'ensemble $\mathbb{R}^I$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, et que l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sont tous les deux des espaces vectoriels.

3 – Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition 23.14 – Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E ($n \geq 1$).

On dit qu'un vecteur u de E est une **combinaison linéaire** des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que

$$u = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Exemple 23.15 –

1. Le vecteur nul est une combinaison linéaire de n'importe quelle famille de vecteurs.
2. On se place dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. Soient u et v deux vecteurs de E . Alors, u , $-v$, $2u - 4v$ sont des combinaisons linéaires de u et v .
3. Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, le vecteur $(3, -2, 4)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$ car

$$(3, -2, 4) = 3 \cdot i - 2 \cdot j + 4 \cdot k.$$

4. On se place dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$. Alors le polynôme $2X^7 + 3X^4 - X^3 + X - 8$ est une combinaison linéaire des polynômes $X^7, X^6, X^5, X^4, X^3, X^2, X$, et 1 car

$$2X^7 + 3X^4 - X^3 + X - 8 = 2 \cdot X^7 + 0 \cdot X^6 + 0 \cdot X^5 + 3 \cdot X^4 + (-1) \cdot X^3 + 0 \cdot X^2 + 1 \cdot X + (-8) \cdot 1.$$

Exemple 23.16 – Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.

B est-elle une combinaison linéaire de A et I_2 ?

$$\begin{aligned} B \text{ est une combinaison linéaire de } A \text{ et } I_2 &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, B = \lambda A + \mu I_2 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu & 2\lambda \\ 3\lambda & 4\lambda + \mu \end{pmatrix} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda + \mu = 7 \\ 2\lambda = 10 \\ 3\lambda = 15 \\ 4\lambda + \mu = 22 \end{cases} \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = 5 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, A^2 est une combinaison linéaire de A et I_2 (et on a $A^2 = 5A + 2I_2$).

Exemple 23.17 – Dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on pose $u = (n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 u est-elle une combinaison linéaire de v et w ?

$$\begin{aligned} u \text{ est une combinaison linéaire de } v \text{ et } w &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, u = \lambda v + \mu w \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, n^2 = \lambda + \mu n \end{aligned}$$

S'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, tels que $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 = \lambda + \mu n$, alors en prenant $n = 0$, on a $\lambda = 0$, puis en prenant $n = 1$, on a $\mu = 1$. On a donc que $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 = n$, ce qui est faux (par exemple pour $n = 2$).

On arrive donc à une absurdité, il n'existe donc pas $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $u = \lambda v + \mu w$.

ATTENTION ! (Péché d'identification)

En général : $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k \not\Rightarrow \lambda_k = \mu_k \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Par exemple : $(1, 1) + 2(0, 1) + 2(1, 0) = (3, 3) = 2(1, 1) + (0, 1) + (1, 0)$.

**Méthode 23.18 – Pour vérifier que x est combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \dots, e_p)$**

1. On peut en trouver une à l'œil ou grâce à une astuce.
 2. Sinon, on procède par identification pour trouver les λ_i et on résout le système correspondant.
- Attention, il est possible de ne pas trouver de combinaison linéaire!

Exemple 23.19 – Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Montrer que $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs de la famille (e_1, e_2, e_3) .

x est combinaison linéaire de la famille (e_1, e_2, e_3) si et seulement si il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3.$$

Cette relation s'écrit : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Cela est équivalent au système :

$$(S) \quad \begin{cases} -\lambda_1 - 3\lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\lambda_1 - 3\lambda_2 = 1 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\lambda_1 - 3\lambda_2 = 1 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ -\lambda_3 = 2 \end{cases}. \quad \text{Le système est alors échelonné et on sait le résoudre :}$$

$$\lambda_3 = -2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 - 1 = -3, \quad \lambda_1 = -3\lambda_2 - 1 = 8.$$

On vérifie bien que $8e_1 - 3e_2 - 2e_3 = x$.

Exemple 23.20 – Dans $\mathbb{R}[X]$, montrer que $P(X) = 2X^2 - X + 3$ n'est pas une combinaison linéaire de $P_1(X) = (X-1)^2$ et de $P_2(X) = X$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$. Cette égalité s'écrit :

$$2X^2 - X + 3 = \lambda_1 (X-1)^2 + \lambda_2 X.$$

En évaluant en 0 et 1, cela nous donne alors : $3 = \lambda_1$ et $4 = \lambda_2$.

Or $3P_1(X) + 4P_2(X) = 3X^2 - 2X + 3$, ainsi $2X^2 - X + 3 = 3X^2 - 2X + 3$.

Absurde. Le polynôme P n'est donc pas combinaison linéaire de P_1 et de P_2 .

Définition 23.21 – On dit qu'une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par I est **presque nulle** si tous ses éléments sont nuls SAUF UN NOMBRE FINI D'ENTRE EUX.

Certains auteurs notent $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I , mais cette notation n'est pas au programme donc on ne l'emploiera pas ici. Ne la confondez pas en tout cas avec la notation $\mathbb{K}^I$ qui désigne l'ensemble de toutes les familles d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I .

On se contentera dans ce cours de « phrases » du type : « $\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle » ...

Définition 23.22 – Soient E un espace vectoriel et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On appelle combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$ tout vecteur de E de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille **PRESQUE NULLE** d'éléments de $\mathbb{K}$.

Exemple 23.23 – Plaçons nous dans le cadre du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Alors, une combinaison linéaire de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ où $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ est une fonction de la forme

$$f = \sum_{k=0}^n \lambda_k f_{\lambda_k} \quad \text{où } n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Nous pourrions maintenant parler des combinaisons linéaires d'un nombre **INFINI** de vecteurs, mais chacune de ces combinaisons linéaires reste fondamentalement une somme **FINIE**. Les vraies sommes infinies n'ont aucun sens sans une notion de passage à la limite adéquat.

Exemple 23.24 – $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$.



ATTENTION ! Pour un nombre **FINI** de vecteurs, pas besoin de familles **PRESQUE NULLES** de scalaires !

II – Sous-espaces vectoriels

1 – Définition et caractérisation

Dans toute cette partie, F désigne un sous-ensemble de E .

Définition 23.25 – Soit E un espace vectoriel. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F est un espace vectoriel et si $F \subset E$.

Exemple 23.26 – $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E .

Théorème 23.27

F est un sous-espace vectoriel de E (en abrégé : **s.e.v.**) si et seulement si F est une partie non vide de E telle que :

- $\forall (x, y) \in F^2 \quad x + y \in F$ (on dit que F est **stable pour l'addition**)
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in F \quad \lambda \cdot x \in F$ (on dit que F est **stable pour la multiplication par un scalaire**)

Démonstration.

- Supposons que F est un sous-espace vectoriel de E . Alors, F est un espace vectoriel donc il contient au moins un vecteur (le vecteur nul) et il est inclus dans E , donc F est une partie non vide de E .
De plus, puisque F est un espace vectoriel, il est stable par addition et multiplication par un scalaire. Le sens direct est donc démontré.
- Réciproquement, on suppose que F est une partie non vide de E , stable par addition et par multiplication par un scalaire. Soient $x, y \in E$. Alors, $(-1) \cdot y \in F$ (stabilité par multiplication par un scalaire). Or, $(-1) \cdot y = -y$ (Proposition 23.6), donc $-y \in F$. Ainsi, $x - y = x + -(y) \in F$ (stabilité par addition). En particulier, $0_E = x - x \in F$. Donc, $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$ (caractérisation des sous-groupes, Théorème 14.33) donc c'est en particulier un groupe.
Par ailleurs, $\cdot$ est une loi de composition externe sur F par stabilité par multiplication par un scalaire. Et cette loi vérifie bien, sur F , les axiomes de la définition d'un espace vectoriel, puisqu'elle les vérifie sur E et que $E \subset F$.
Ainsi, $(F, +, \cdot)$ est un bien un espace vectoriel, qui plus est inclus dans E . Donc, c'est bien un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$.

□

Remarque 23.28 – Une des manières que vous utiliserez en pratique pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel sera de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Corollaire 23.29

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $F \subset E$
- $F \neq \emptyset$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in F^2 \quad \lambda x + y \in F$

Démonstration.

- On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E . Alors, d'après le Théorème 23.27, F est une partie non vide de E donc les deux premiers points du Corollaire 23.29 sont vérifiés. Soient maintenant x et $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x \in E$ (stabilité par multiplication par un scalaire, Théorème 23.27) et donc $\lambda x + y \in E$ (stabilité par addition, Théorème 23.27).
- Réciproquement, si F vérifie les trois points du Corollaire 23.29, alors F est une partie non vide de E , stable par addition (en prenant $\lambda = 1$) et par multiplication par un scalaire (en prenant $y = 0_E$). Donc, F est un sous-espace vectoriel de E d'après le Théorème 23.27.

□

Remarque 23.30 – En général, pour montrer que F est non vide, on vérifie que 0_E appartient à F .

C'est **TOUJOURS** le résultat précédent qu'il faut utiliser pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel. Si on utilisait la **DÉFINITION** des sous-espaces vectoriels, on serait obligé de vérifier beaucoup d'axiomes dont la **CARACTÉRISATION** fait l'économie.

Par ailleurs, pour montrer qu'un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire est un espace vectoriel, il suffit souvent de montrer qu'il est sous-espace d'un autre espace vectoriel connu.

Exemple 23.31 – Considérons le système linéaire :

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de (S) sont les triplets $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant les deux équations du système. La résolution d'un tel système est bien connue : elle se fait par la méthode du pivot de Gauss. Montrons que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de ce système est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Par définition :

$$\mathcal{S} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

- On a clairement $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$.
- Le vecteur nul $(0, 0, 0)$ est solution de (S) donc $(0, 0, 0) \in \mathcal{S}$. Ainsi $\mathcal{S} \neq \emptyset$.
- Soit $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}$ et $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{S}$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda X + Y \in \mathcal{S}$, c'est à dire que $\lambda X + Y$ est solution du système.

On calcule $\lambda X + Y = (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, \lambda x_3 + y_3) := (z_1, z_2, z_3)$.

Puis, on vérifie que (z_1, z_2, z_3) est solution du système :

★ Montrons que (z_1, z_2, z_3) vérifie bien la première ligne du système :

$$\begin{aligned} z_1 + 2z_2 - z_3 &= \lambda x_1 + y_1 + 2(\lambda x_2 + y_2) - (\lambda x_3 + y_3) \\ &= \lambda(x_1 + 2x_2 - x_3) + y_1 + 2y_2 - y_3 \\ &= \lambda \times 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

★ De même, on montre que (z_1, z_2, z_3) vérifie bien la deuxième ligne du système :

$$\begin{aligned} -z_1 + z_2 + z_3 &= -(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) + (\lambda x_3 + y_3) \\ &= \lambda(-x_1 + x_2 + x_3) + (-y_1 + y_2 + y_3) \\ &= \lambda \times 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Nous venons donc de montrer que (z_1, z_2, z_3) est solution du système donc $(z_1, z_2, z_3) \in \mathcal{S}$ et donc $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2 – PLEIN d'exemples à connaître et savoir refaire

- **Méthode :** Soit $n \geq 1$. On se place dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.
Soit l'ensemble $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

- ▷ F est bien une partie de $\mathbb{R}^n$.
- ▷ Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$. Comme $0 + 0 + \dots + 0 = 0$, $0_{\mathbb{R}^n} \in F$.
- ▷ Soient $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F$, $v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors, d'après les définitions,

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u + v &= \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, \dots, \lambda x_n + y_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) + \dots + (\lambda x_n + y_n) &= (\lambda x_1 + \lambda x_2 + \dots + \lambda x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \\ &= \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \\ &= \lambda \cdot 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\lambda \cdot u + v \in F$.

F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

- On pose $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 1\}$. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
 F_2 est-il bien une partie de $\mathbb{R}^3$? Oui
 $0_{\mathbb{R}^3} \in F_2$? Non, car $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ et $0 + 2 \times 0 + 0 \neq 1$, donc $0_{\mathbb{R}^3} \notin F_2$.
 F_2 n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- On considère $F_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \tilde{P}(0) = \tilde{P}(1)\}$. Montrons que F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
 - $F_3 \subset \mathbb{R}[X]$.
 - Le vecteur nul de $\mathbb{R}[X]$ est le polynôme nul qu'on note θ . $\tilde{\theta}(0) = 0$ et $\tilde{\theta}(1) = 0$ donc $\tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}(1)$ et $\theta \in F_3$.
 - Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in F_3$. Montrons que $\lambda P + Q \in F_3$, c'est à dire que $\widetilde{\lambda P + Q}(0) = \widetilde{\lambda P + Q}(1)$.

$$\widetilde{\lambda P + Q}(0) = \lambda \tilde{P}(0) + \tilde{Q}(0) = \lambda \tilde{P}(1) + \tilde{Q}(1) = \widetilde{\lambda P + Q}(1).$$

Donc $\lambda P + Q \in F_3$ et F_3 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$.
 - $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$.
 - Le polynôme nul est de degré $-\infty$, donc inférieur à n . Donc il appartient à $\mathbb{K}_n[X]$.
 - On a déjà montré dans le cours sur les polynômes que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par addition et par multiplication externes (grâce aux relations sur le degré).

Donc $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$.

- Soit $F_4 = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_n = u_0\}$. Montrer que F_4 est un espace vectoriel. On notera donc qu'ici les vecteurs sont des suites.
 - $F_4 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 - Soit $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite nulle. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta_{n+2} + \theta_n = 0 + 0 = 0 = \theta_0$. Donc $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F_4$.
 - Soient u et v dans F_4 , $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $w = \lambda u + v$. Montrons que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F_4$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+2} + w_n &= (\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) + (\lambda u_n + v_n) \\ &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} + \lambda u_n + v_n \\ &= \lambda(u_{n+2} + u_n) + (v_{n+2} + v_n) \\ &= \lambda u_0 + v_0 \\ &= w_0. \end{aligned}$$

Donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F_4$. F_4 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ qui sont symétriques. C'est à dire $S_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M = {}^t M\}$. Montrons que S_n est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +, \cdot)$.
 - $S_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 - Si l'on note Z la matrice carrée nulle de taille $n \times n$, on a ${}^t Z = Z$ donc $Z \in S_n$.
 - Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $A, B \in S_n$. Montrons que $\lambda \cdot A + B \in S_n$.

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda A + B) &= {}^t(\lambda A) + {}^t B && \text{par propriété de la transposition} \\ &= \lambda({}^t A) + {}^t B && \text{par propriété de la transposition} \\ &= \lambda A + B && \text{car } {}^t A = A \text{ et } {}^t B = B \end{aligned}$$

Donc $\lambda A + B \in S_n$.

S_n est bien un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +, \cdot)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrons que $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^n(I)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$. (Ici, les vecteurs sont donc les applications de I dans $\mathbb{R}$.)

- $\mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{F}$.
- Soit θ la fonction nulle. θ est n fois dérivable et $\theta^{(n)} = \theta$. En particulier, θ est continue sur I donc $\theta^{(n)}$ est continue sur I . Finalement, $\theta \in \mathcal{C}^n(I)$.
- Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après le cours de dérivation, $\lambda \cdot f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , donc $\lambda \cdot f + g \in \mathcal{C}^n(I)$.

$\mathcal{C}^n(I)$ est bien un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

- Soit $F_5 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid f'' + 3f' + 4f = 0\}$ (0 est donc la fonction nulle). F_5 est donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 3y' + 4y = 0$.

Montrons que F_5 est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -ev $(\mathcal{C}^2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

- $F_5 \subset \mathbb{R}\text{-ev } (\mathcal{C}^2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

- ▷ Soit θ la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. θ est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\theta' = \theta$, $\theta'' = \theta$. Ainsi,
 $\theta'' + 3\theta' + 4\theta = 8\theta = \theta = 0$. Donc $\theta \in F_5$.
- ▷ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in F_5$. On pose $h = \lambda f + g$. Montrons que $h \in F_5$.
 h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et
 $h' = \lambda f' + g'$.
 $h'' = \lambda f'' + g''$. Donc,

$$h'' + 3h' + 4h = (\lambda f'' + g'') + 3(\lambda f' + g') + 4(\lambda f + g) = \lambda(f'' + 3f' + 4f) + (g'' + 3g' + 4g) = \lambda 0 + 0 = 0$$

Donc $h \in F_5$.

Donc F_5 est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -ev $(\mathcal{C}^2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

3 – Intersection de sous-espaces vectoriels

Certaines opérations sur les ensembles se comportent bien avec les espaces vectoriels. C'est le cas de l'intersection.

Proposition 23.32

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

- On sait que $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$, or $F \subset E$ et $G \subset E$ donc $F \cap G \subset E$.
- On sait que $0_E \in F$ et $0_E \in G$ donc $0_E \in F \cap G$. Ainsi $F \cap G \neq \emptyset$.
- Soit $(x, y) \in (F \cap G)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, comme $(x, y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x + y \in F$ car F est un s.e.v. On peut raisonner de la même façon pour G et donc $\lambda x + y \in G$. Ainsi $\lambda x + y \in G$.

On en conclut que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E . □

Remarque 23.33 – Le résultat reste vrai pour une intersection d'un nombre fini ou infini d'espaces vectoriels.

Exemple 23.34 –

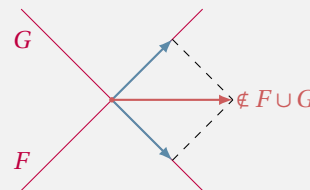
- Si on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ alors $F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z = 0\}$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- On se place dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$. On considère :
 $F = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \tilde{P} \text{ est paire}\}$ (Vérifier que c'est un bien un sous-espace vectoriel).
 $G = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \tilde{P}(42) = 0\}$ (Vérifier également que c'est un sous-espace vectoriel).
 Alors l'intersection $F \cap G = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \tilde{P} \text{ est paire et } \tilde{P}(42) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.



ATTENTION ! Le résultat précédent est faux pour l'union de deux s.e.v.

Exemple 23.35 –

En effet, $\{0\} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \{0\}$ sont deux s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ mais $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$. car il contient $(0, 1)$ et $(1, 0)$ mais pas leur somme $(1, 1)$.



4 – Sous-espaces affines

Les éléments d'un espace vectoriel E sont naturellement des vecteurs, mais dans le plan et dans l'espace, nous savons bien que nous pouvons identifier les points et les vecteurs via le choix d'un point de référence ou origine O . Une telle origine étant fixée, toute relation $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ nous autorise à identifier le point M et le vecteur $\vec{u}$.

Plus généralement, tout élément d'un espace vectoriel quelconque E peut être vu comme un point via le choix du vecteur nul $0 = 0_E$ comme origine. Si pour tous $A, B \in E$, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur $B - A$, alors pour tout $M \in E$, l'identification points-vecteurs s'écrit simplement :

$$M = \overrightarrow{OM} \quad .$$

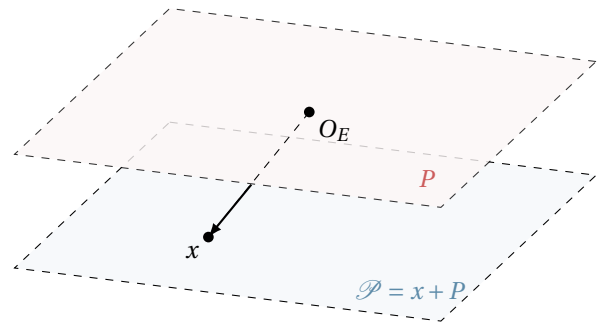
Point
Vecteur

Définition 23.36 – Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle **sous-espace affine** de E toute partie $\mathcal{F}$ de E de la forme $\mathcal{F} = x + F = \{f + x \mid f \in F\}$ où F est un sous-espace vectoriel de E et x est vecteur de E . Le sous-espace vectoriel F associé au sous-espace affine $\mathcal{F}$ est unique. On l'appelle la **direction** de $\mathcal{F}$ et ses éléments sont appelés les **vecteurs directeurs** de $\mathcal{F}$.

Nous noterons souvent les sous-espaces vectoriels avec des majuscules droites ($F, G, H, \dots$) et les sous-espaces affines avec des majuscules rondes ($\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots$).

Notons que tout sous-espace **VECTORIEL** F de E est un sous-espace **AFFINE** de E puisque $F = 0_E + F$. La réciproque est fautive en revanche car un sous-espace affine ne contient en général pas 0_E .

Montrons maintenant l'unicité de la direction de $\mathcal{F}$.



Démonstration. Soient F et F' deux sous-espaces vectoriels de E et $x, x' \in E$ pour lesquels $\mathcal{F} = x + F = x' + F'$. Pour montrer que $F = F'$, il nous suffit par symétrie de prouver l'inclusion $F \subset F'$. Soit $f \in F$. Comme $x = x + 0_E \in x + F = x' + F'$, on a $x = x' + f'_1$ pour un certain $f'_1 \in F'$. Or, $x + f \in x + F$ également, donc $x + f = x' + f'_2$ pour un certain $f'_2 \in F'$. On obtient donc $x' + f'_1 + f = x' + f'_2$, d'où $f = f'_2 - f'_1 \in F'$. D'où l'inclusion. $\square$

Cette notion d'espace affine offre un nouvel éclairage à un principe bien connu déjà rencontré dans plusieurs chapitres précédents :

$$\text{Solution générale de l'équation complète} = \text{Solution particulière} + \text{Solution générale de l'équation HOMOGÈNE}$$

Théorème 23.37 – Ensemble des solutions d'un système linéaire

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. Si le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$ est compatible, l'ensemble de ses solutions est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$. Sa direction n'est autre que l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé. En particulier, toute droite de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et tout plan de $\mathbb{R}^3$ en sont des sous-espaces affines.

Démonstration. Posons $\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{K}^p \mid AX = B\}$ et $S = \{X \in \mathbb{K}^p \mid AX = 0\}$. Le système étudié étant compatible, nous pouvons nous en donner une solution particulière X_{part} et d'après notre cours sur les systèmes linéaires : $\mathcal{S} = X_{\text{part}} + S$. Par ailleurs, nous avons déjà vu que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. $\square$

Exemple 23.38 – La droite de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ est un sous-espace affine de direction la droite vectorielle d'équation $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$.

Plus précisément, en notant $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}\}$ et $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}\}$, on a (par exemple) :

$$\mathcal{D} = (1, 1, 1) + D$$

Théorème 23.39

Soient I un intervalle et $a, b \in \mathcal{CC}(I, \mathbb{K})$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$.

Démonstration. Posons $\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) \mid y' + ay = b\}$ et $S = \{y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) \mid y' + ay = 0\}$. D'après notre cours sur les équations différentielles linéaires, nous pouvons nous donner une solution particulière y_{part} de l'équation complète $y' + a(x)y = b(x)$ et affirmer que $\mathcal{S} = y_{\text{part}} + S$. Par ailleurs, nous avons déjà vu que S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$. $\square$

Exemple 23.40 – L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = x$ est un sous-espace affine de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de direction $S_H = \{x \mapsto \lambda e^{-2x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + 2y = 0$ est $S_H = \{x \mapsto \lambda e^{-2x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Une solution particulière est donnée par $y_{\text{part}} : x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. Ainsi, en notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de cette équation différentielle, on a :

$$\mathcal{S} = y_{\text{part}} + S_H$$

Finissons par un dernier exemple illustrant ce principe.

Exemple 23.41 – L'ensemble $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid XP' + P = 2X\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ de direction le sous-espace vectoriel $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid XP' + P = 0\}$.

Démonstration. Il n'est pas dur de vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Remarquons par ailleurs que $X \in \mathcal{E}$ - solution particulière! Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P \in \mathcal{E} \iff XP' + P = 2X \iff X(P - X)' + (P - X) = 0 \iff P - X \in E \iff P \in X + E.$$

Conclusion : $\mathcal{E} = X + E$, ce qui confirme que $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ de direction E . □

De la même manière qu'il suffit de trouver **UNE** solution particulière pour déterminer **L'ENSEMBLE** des solutions de l'équation complète (connaissant l'ensemble des solutions de l'équation homogène), il suffit **D'UN** point d'un espace affine pour le caractériser entièrement (connaissant une direction).

Théorème 23.42 – Caractérisation des sous-espaces affines par leur direction et un point

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction F . Alors pour tout $A \in \mathcal{F}$: $\mathcal{F} = A + F$.

Démonstration. Par définition : $\mathcal{F} = x + F$ pour un certain $x \in E$, donc $A = x + f$ pour un certain $f \in F$, puis $\mathcal{F} = x + F = (A - f) + F = A + (F - f)$. Or F est un sous-espace vectoriel de E , donc $F - f \subset F = (F + f) - f \subset F - f$, donc $\mathcal{F} = A + (F - f) = A + F$. □

Théorème 23.43 – Intersection de sous-espaces affines

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de E . Pour tout $i \in I$, on note F_i la direction de $\mathcal{F}_i$.

On dit que les $\mathcal{F}_i$, i décrivant I , sont **concourants** ou **sécants** si $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \neq \emptyset$. Dans ce cas, $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est un sous-espace affine de E de direction $\bigcap_{i \in I} F_i$.

Démonstration. Posons $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ et $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ et supposons $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Un point A de $\mathcal{F}$ étant donné, nous avons vu plus haut que $\mathcal{F}_i = A + F_i$ pour tout $i \in I$. Il nous suffit dès lors de montrer que $\mathcal{F} = A + F$.

- Montrons que $\mathcal{F} \subset A + F$. Soit $M \in \mathcal{F}$. Pour tout $i \in I$: $M = A + f_i$ pour un certain $f_i \in F_i$, et ces f_i sont tous égaux, donc éléments de $\bigcap_{i \in I} F_i = F$. Comme voulu $M \in A + F$.
- Inversement $F \subset F_i$ pour tout $i \in I$, donc $A + F \subset A + F_i = \mathcal{F}_i$, donc $A + F \subset \mathcal{F}$. □



ATTENTION ! Alors qu'une intersection de sous-espaces vectoriels contient toujours le vecteur nul, une intersection de sous-espaces affines peut vraiment être vide, pensez par exemple au cas de deux droites parallèles non confondues.

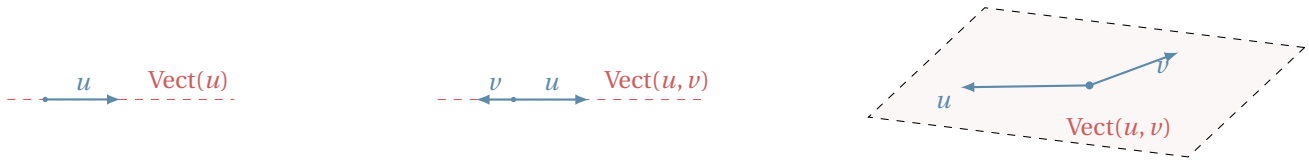
5 – Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition 23.44 – Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et X une partie de E .

- (i) L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant X est appelée le **sous-espace vectoriel** (de E) **engendré par** X et notée $\text{Vect}(X)$. À ce titre, $\text{Vect}(X)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X . En particulier, tout sous-espace vectoriel de E qui contient X contient aussi $\text{Vect}(X)$.
- (ii) Si $X = \{x_i \mid i \in I\}$, $\text{Vect}(X)$ est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_i)_{i \in I}$ et est noté $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Dans le cas d'une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$, on a donc

$$\begin{aligned}\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) &= \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \{u \in E \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, u = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\}\end{aligned}$$

Quelques figures illustrent bien la notion :



Démonstration.

- (i) En tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de E contenant X , $\text{Vect}(X)$ est lui-même un sous-espace vectoriel de E contenant X , et il est inclus par définition dans tous les sous-espaces vectoriels de E contenant X , ce qui montre que tout sous-espace vectoriel de E qui contient X contient en réalité $\text{Vect}(X)$ tout entier.
- (ii) Notons V l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_i)_{i \in I}$ et montrons que $V = \text{Vect}(X)$. Or $\text{Vect}(X)$ est stable par combinaison linéaire en tant que sous-espace vectoriel de E et contient X , donc contient toute combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$, autrement dit $V \subset \text{Vect}(X)$. Pour l'inclusion réciproque, d'après (i), il nous suffit de montrer que V est un sous-espace vectoriel de E contenant X .

Pour commencer $V \subset E$ et V contient à la fois 0_E et X car $0_E = \sum_{i \in I} 0 \cdot x_i$ et $x_j = 1 \cdot x_j + \sum_{i \neq j} 0 \cdot x_i$ pour tout $j \in I$. Ensuite, pour la stabilité par combinaison linéaire, soient $v, w \in V$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, disons $v = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ et $w = \sum_{i \in I} \mu_i x_i$ pour certaines familles presque nulles $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(\mu_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. La famille $(\alpha \lambda_i + \mu_i)_{i \in I}$ est aussi presque nulle et $\alpha v + w = \sum_{i \in I} (\alpha \lambda_i + \mu_i) x_i$, donc $\alpha v + w \in V$.

□

Exemple 23.45 – Soit $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Soient $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $x_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de E .

$$\text{Vect}(x_1, x_2) = \left\{ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$\text{Ainsi, } \text{Vect}(x_1, x_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 - 3\lambda_2 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$



Méthode 23.46 –

Pour montrer qu'un sous-espace vectoriel contient $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, il suffit de montrer qu'il contient $x_1, \dots, x_n$.

Exemple 23.47 – Soient les polynômes :

$$P_1 = 2X^2 + X, \quad P_2 = 2X^2 + 3, \quad Q_1 = 2X^2 + 2X - 3, \quad Q_2 = -2X^2 - 3X + 6$$

Montrer que $\text{Vect}(P_1, P_2) = \text{Vect}(Q_1, Q_2)$.

On remarque facilement que $Q_1 = 2P_1 - P_2$ et $Q_2 = -3P_1 + 2P_2$. Ainsi, Q_1 et Q_2 sont des combinaisons linéaires de P_1 et P_2 , c'est-à-dire que Q_1 et Q_2 sont dans $\text{Vect}(P_1, P_2)$.

$\text{Vect}(P_1, P_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ contenant Q_1 et Q_2 , d'où $\text{Vect}(Q_1, Q_2) \subset \text{Vect}(P_1, P_2)$.

Pour le sens réciproque, on peut remarquer que l'on cherche à inverser le système $\begin{cases} Q_1 = 2P_1 - P_2 \\ Q_2 = -3P_1 + 2P_2 \end{cases}$ Or, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, donc $P_1 = 2Q_1 + Q_2$ et $P_2 = 3Q_1 + 2Q_2$.
On en déduit que P_1 et P_2 sont dans $\text{Vect}(Q_1, Q_2)$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, donc $\text{Vect}(P_1, P_2) \subset \text{Vect}(Q_1, Q_2)$ et on a l'égalité par double inclusion.

Pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel, il suffit très souvent de l'écrire comme un Vect.

Exemple 23.48 –

1. Soit F l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x + y + t + z = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$ d'inconnues réelles x, y, z et t . Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ en prouvant qu'on peut l'écrire sous la forme $F = \text{Vect}(\dots)$.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} \boxed{1} \cdot x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{1} \cdot x + y + z + t = 0 \\ \boxed{1} \cdot y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = -2\lambda - 3\mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, (x, y, z, t) = (\lambda + 2\mu, -2\lambda - 3\mu, \lambda, \mu) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, (x, y, z, t) = (\lambda, -2\lambda, \lambda, 0) + (2\mu, -3\mu, 0, \mu) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, (x, y, z, t) = \lambda(1, -2, 1, 0) + \mu(2, -3, 0, 1) \\ &\iff (x, y, z, t) \in \text{Vect}(u, v) \end{aligned}$$

avec $u = (1, -2, 1, 0)$ et $v = (2, -3, 0, 1)$. Donc $F = \text{Vect}(u, v)$, en particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Remarque 23.49 – Cela s'applique à tout système linéaire **homogène**. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est toujours un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

2. Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \tilde{P}(1) = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ en l'écrivant sous la forme $G = \text{Vect}(\dots)$.

Soit P un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$.

On peut écrire P sous la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} P \in G &\iff \tilde{P}(1) = 0 \iff a + b + c + d = 0 \iff \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \begin{cases} a = -\lambda - \mu - \nu \\ b = \lambda \\ c = \mu \\ d = \nu \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, P = (-\lambda - \mu - \nu)X^3 + \lambda X^2 + \mu X + \nu \\ &\iff \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, P = \lambda(-X^3 + X^2) + \mu(-X^3 + X) + \nu(-X^3 + 1) \iff P \in \text{Vect}(-X^3 + X^2, -X^3 + X, -X^3 + 1) \end{aligned}$$

Donc $G = \text{Vect}(-X^3 + X^2, -X^3 + X, -X^3 + 1)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Autre méthode : Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned} P \in G &\iff \tilde{P}(1) = 0 \iff 1 \text{ est racine de } P \iff X - 1 \mid P \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_2[X], P = (X - 1)Q \iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, P = (X - 1)(aX^2 + bX + c) \\ &\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, P = aX^2(X - 1) + bX(X - 1) + c(X - 1) \\ &\iff P \in \text{Vect}(X^2(X - 1), X(X - 1), X - 1) \end{aligned}$$

Donc $G = \text{Vect}(X^2(X - 1), X(X - 1), X - 1)$.

Remarque 23.50 – Il n'y a donc **PAS** unicité des vecteurs engendrant un sous-espace vectoriel.

4. Soit $H = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, f''(t) + 2f'(t) + f(t) = 0\}$, c'est à dire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$.

L'équation caractéristique de cette équation différentielle est $r^2 + 2r + 1 = 0$ qui admet une unique solution double -1 . Donc les solutions de $y'' + 2y' + y = 0$ sont toutes les fonctions de la forme

$$f_{\lambda, \mu} : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda + \mu t)e^{-t} \end{matrix} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$\text{On pose } g_1 : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-t} \end{matrix} \text{ et } g_2 : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & te^{-t} \end{matrix}$$

Ainsi, les solutions de $y'' + 2y' + y = 0$ sont toutes les fonctions f qui peuvent s'écrire $f = \lambda g_1 + \mu g_2$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Donc $H = \text{Vect}(g_1, g_2)$.

Comme g_1 et g_2 ne sont pas colinéaires, H est un plan vectoriel.

En effet, il n'existe pas de réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, g_1(t) = \alpha g_2(t)$ ou $\forall t \in \mathbb{R}, g_2(t) = \alpha g_1(t)$.

Exemple 23.51 – Le plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - y + 3z = 2$ est le sous-espace affine de direction $\text{Vect}((1, 2, 0), (0, 3, 1))$ passant par $(0, -2, 0)$. En résumé : $\mathcal{P} = (0, -2, 0) + \text{Vect}((1, 2, 0), (0, 3, 1))$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{(x, 2x + 3z - 2, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} = \{(0, -2, 0) + x(1, 2, 0) + z(0, 3, 1) \mid x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= (0, -2, 0) + \text{Vect}((1, 2, 0), (0, 3, 1)). \end{aligned}$$

□

Exemple 23.52 – La droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\begin{cases} 5x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ est le sous-espace affine de direction $\text{Vect}((1, -2, 3))$ passant par $(0, 1, -1)$. En résumé : $\mathcal{D} = (0, 1, -1) + \text{Vect}((1, -2, 3))$.

Démonstration. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathcal{D} &\iff \begin{cases} 5x + y - z = 2 \\ 2x + y \end{cases} \\ &\iff y = 1 - 2x \text{ et } z = 3x - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Enfin : } \mathcal{D} = \{(x, 1 - 2x, 3x - 1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(0, 1, -1) + x(1, -2, 3) \mid x \in \mathbb{R}\} = (0, 1, -1) + \text{Vect}((1, -2, 3)).$$

□

Pour finir, il faut toujours être bien attentif, lorsque l'on utilise la notion de Vect , au corps de base, comme le montrent les exemples ci-dessous.

Exemple 23.53 – Si le corps de base est $\mathbb{R}$: $\text{Vect}(1) = \{a \times 1 \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ et $\text{Vect}(1, i) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$.
Si par contre le corps de base est $\mathbb{C}$: $\text{Vect}(1) = \{a \times 1 \mid a \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$.

6 – Somme de sous-espaces vectoriels

On considère E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition 23.54 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On note $F + G$ et on appelle **somme des sous-espaces vectoriels** F et G l'ensemble

$$F + G = \{f + g \mid f \in F, g \in G\}.$$

Proposition 23.55 – La somme est un sous-espace vectoriel

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

- ▷ Soit $u \in F + G$. Alors, $\exists f \in F, g \in G, u = f + g$. f et g sont des éléments de E donc $u = f + g \in E$. D'où $F + G \subset E$.
- ▷ $0_E \in F$ et $0_E \in G$. Donc $0_E + 0_E \in F + G$. Comme $0_E + 0_E = 0_E$, on a $0_E \in F + G$.

▷ Soient $u, v \in F + G$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\exists f_1, f_2 \in F$, $\exists g_1, g_2 \in G$ tels que $u = f_1 + g_1$ et $v = f_2 + g_2$.

$$\begin{aligned}\lambda u + v &= \lambda(f_1 + g_1) + (f_2 + g_2) \\ &= (\lambda f_1 + f_2) + (\lambda g_1 + g_2)\end{aligned}$$

$\lambda f_1 + f_2 \in F$ car F est un sous-espace vectoriel de E . $\lambda g_1 + g_2 \in G$ car G est un sous-espace vectoriel de E .
Donc $\lambda u + v \in F + G$. Finalement, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

□

Proposition 23.56 – Minimalité de la somme comme SEV contenant l'union

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant $F \cup G$.

C'est à dire que pour tout sous-espace vectoriel H de E contenant $F \cup G$, alors $F + G \subset H$.

Démonstration. Soit H un sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.

Soit $u \in F + G$. Alors $u = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. $F \subset H$ et $G \subset H$ donc $f, g \in H$. Comme H est un sous-espace vectoriel, $f + g \in H$. Ainsi, $F + G \subset H$.

□

Exemple 23.57 –

1. Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$, on considère les sous-espaces vectoriels F l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $G = \text{Vect}(\exp)$.

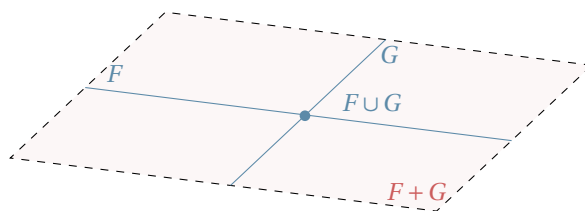
On pose $h: \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^4 - 2x + 7\exp(x) \end{matrix}$. Alors, $h \in F + G$ car h est la somme de la fonction $f: \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^4 - 2x \end{matrix}$ qui appartient à F et de la fonction $g: \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 7\exp(x) \end{matrix}$ qui appartient à G .

2. Les droites vectorielles $F = \text{Vect}((1, 0, 0))$ et $G = \text{Vect}((0, 1, 0))$ ont pour somme le plan d'équation $z = 0$.

$$\begin{aligned}F + G &= \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} + \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0, 0) + (0, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}.\end{aligned}$$



ATTENTION ! Ne confondez pas **SOMME** et **RÉUNION** ! La somme est un sous-espace vectoriel, mais pas la réunion en général.



Proposition 23.58 – Somme de SEV engendrés par des familles finies

Soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_p)$ deux familles de vecteurs de E .

On note $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $G = \text{Vect}(y_1, \dots, y_p)$. Alors,

$$F + G = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p).$$

Démonstration. On procède par double inclusion.

- ▷ Sens $\subset$: Soit $w \in F + G$. Alors il existe $u \in F$ et $v \in G$ tels que $u + v = w$. $u \in F$ donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$. De même $v \in G$ donc il existe $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que $v = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_p y_p$.

Alors $w = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_p y_p$.

Donc $w \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$ et $F + G \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$.

▷ Sens $\supset$: Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, x_i appartient à F donc à $F+G$. Les y_i sont également dans $F+G$. Donc, par la remarque 23.46, $F+G$ contient $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$.

Par double inclusion, $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) = F+G$

□

Proposition 23.59

Toute combinaison linéaire d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est un élément de $F+G$.

Démonstration.

Soit $u \in F$ et $v \in G$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda u \in F$ et $\mu v \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

Donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F+G$.

□

7 – Sous-espaces vectoriels en somme directe

La somme de sous-espaces vectoriels est un outil intéressant, mais elle souffre d'un défaut important, qui est le manque d'unicité des décompositions : si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors un vecteur de $F+G$ peut s'écrire de plusieurs façons comme somme d'un vecteur de F et d'un de G . C'est un souci si on a, par exemple, envie de définir des systèmes de coordonnées.

Question : Quelle condition doit-on rajouter pour que les décompositions dans $F+G$ soient uniques?

Définition 23.60 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont en **somme directe** lorsque tout vecteur de $F+G$ se décompose de manière unique en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . Cette condition peut aussi s'écrire :

$$\forall x, x' \in F, \forall y, y' \in G, \quad x + y = x' + y' \implies \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}.$$

Lorsque la somme de F et G est directe, on la note $F \oplus G$.

Le petit rond qu'on ajoute à la notation $F+G$ pour indiquer que la somme est directe ne fait pas de $F+G$ et $F \oplus G$ des ensembles différents, la notation $F \oplus G$ contient juste une **INFORMATION** d'unicité en plus.

Proposition 23.61 – Caractérisation 1 des sommes directes

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

F et G sont en somme directe si et seulement si pour tout $x \in F$ et tout $y \in G$: $x + y = 0_E \implies \begin{cases} x = 0_E \\ y = 0_E \end{cases}$.

Démonstration.

- Supposons que F et G sont en somme directe.

Soient $x \in F$ et $y \in G$ tels que $x + y = 0_E$. On peut décomposer 0_E en $0_E = 0_E + 0_E$ avec $0_E \in F$ et $0_E \in G$. Comme on a supposé que F et G sont en somme directe, la décomposition de 0_E est unique donc $x = 0_E$ et $y = 0_E$.

- Supposons que $\forall x \in F, \forall y \in G, x + y = 0_E \implies \begin{cases} x = 0_E \\ y = 0_E \end{cases}$.

Soient $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$ tels que $x + y = x' + y'$. Alors $(x - x') + (y - y') = 0_E$. De plus, $x - x' \in F$ et $y - y' \in G$. Ainsi, d'après l'hypothèse, $x - x' = 0_E$ et $y - y' = 0_E$. Finalement, $x = x'$ et $y = y'$.

□

Proposition 23.62 – Caractérisation 2 des sommes directes

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration.

- Supposons que F et G sont en somme directe. Nous allons montrer par double inclusion que $F \cap G = \{0_E\}$.

F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , donc ils contiennent tous les deux 0_E . Donc $\{0_E\} \subset F \cap G$.

Soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$ et $x \in G$. Montrons que $x = 0_E$.

On peut écrire $x = x + 0_E$ avec $x \in F$ et $0_E \in G$. On peut également écrire $x = 0_E + x$ avec $0_E \in F$ et $x \in G$. Comme F et G sont en somme directe, ces deux décompositions sont identiques, donc $x = 0_E$. Donc $F \cap G \subset \{0_E\}$.

- Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Montrons que F et G sont en somme directe.

Soient $x \in F$ et $y \in G$ tels que $x + y = 0$. Alors $x = -y$. Or $-y \in G$ (car c'est un s-EV), donc $x \in G$. D'où $x \in F \cap G$ et $x = 0$ puis $y = 0$. D'après la caractérisation 1, F et G sont donc en somme directe.

□

Exemple 23.63 –

- Dans $\mathbb{R}^3$, le plan $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et la droite $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ sont en somme directe.

Vous vérifierez seuls que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ – par exemple en les écrivant comme des Vect. Montrons que $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$. Pour tout $(x, y, z) \in F \cap G$: $x + y + z = 0$ et $x = y = z$, donc $x = y = z = 0$, i.e. $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

- Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, on pose F l'ensemble des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et $G = \{g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid g(0) = g'(0) = g''(0) = 0\}$.

On peut montrer (exercice!) que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Montrons que F et G sont en somme directe. Pour cela, on va montrer que $F \cap G = \{\theta\}$ où θ est la fonction nulle.

1. Il est facile de voir que $\theta \in F \cap G$. En effet, F et G étant tous deux des sous-espaces vectoriels de E , il contiennent θ . Donc $\{\theta\} \subset F \cap G$.

2. Soit $h \in F \cap G$. Alors $h \in F$ et $h \in G$.

h est une fonction polynômiale de degré 2, donc il existe a, b et c réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = ax^2 + bx + c$.

On a $h(0) = c$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 2ax + b$. Donc $h'(0) = b$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h''(x) = 2a$. Donc $h''(0) = 2a$.

Comme $h''(0) = h'(0) = h(0) = 0$, on a forcément $a = b = c = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \theta(x)$ donc $h = \theta$.

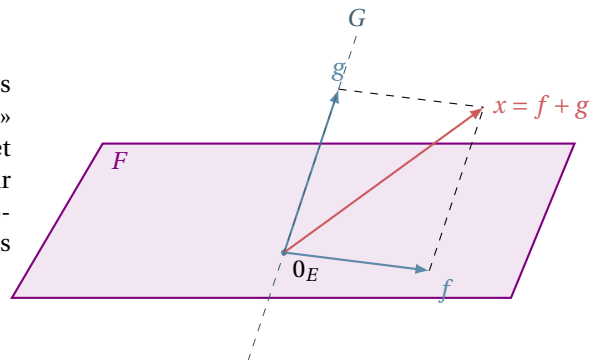
Finalement, $F \cap G \subset \{\theta\}$ et par double inclusion, $F \cap G = \{\theta\}$. Donc F et G sont en somme directe.

8 – Sous-espaces vectoriels supplémentaires

On cherche maintenant à rajouter une nouvelle condition aux sommes directes : Pouvoir décomposer **TOUTS** les vecteurs de E comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . Pour cela, on a besoin de la notion de supplémentaire.

Définition 23.64 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque tout élément x de E se décompose de manière unique comme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si leur somme couvre E et s'ils sont le plus possible « séparés » l'un de l'autre, i.e. si leur somme est la plus grande possible et leur intersection la plus petite possible. On a l'habitude, pour se représenter géométriquement deux tels sous-espaces vectoriels, de faire des figures valables dans $\mathbb{R}^3$ censées illustrer le cas général.



Proposition 23.65 – Caractérisation 1 des supplémentaires

Soient deux sous-espaces vectoriels F et G de E .

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F + G = E$ ET F et G sont en somme directe.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

Supposons que F et G sont supplémentaires dans E . Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , on sait que $F + G \subset E$.

Réciproquement, soit $x \in E$. Alors, $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Donc $x \in F + G$. D'où $E \subset F + G$ et $E = F + G$ par double inclusion.

Enfin, F et G sont bien en somme directe car tout élément de $F + G$ se décompose de manière unique comme d'un élément de F et d'un élément de G .

⇐ Supposons que $F + G = E$ et F et G sont en somme directe.

Soit $x \in E$. Alors $x \in F + G$. Comme F et G sont en somme directe, x se décompose de manière unique comme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Donc F et G sont supplémentaires dans E .

□

En combinant ce résultat avec la caractérisation 2 des sommes directes, on obtient

Proposition 23.66 – Caractérisation 2 des supplémentaires

Soient deux sous-espaces vectoriels F et G de E .

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F + G = E$ ET $F \cap G = \{0_E\}$.

Exemple 23.67 –

- L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Nous voulons montrer ceci : $\exists!(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K}), \quad M = S + A$.

Analyse : Soient $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Si $M = S + A$, alors $M^\top = S^\top + A^\top = S - A$, donc par demi-somme et

$$\text{demi-différence : } S = \frac{M + M^\top}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - M^\top}{2}.$$

Synthèse : Posons $S = \frac{M + M^\top}{2}$ et $A = \frac{M - M^\top}{2}$. Alors $M = S + A$ et S est symétrique et A antisymétrique car :

$$S^\top = \left(\frac{M + M^\top}{2} \right)^\top = \frac{M^\top + M}{2} = S \quad \text{et} \quad A^\top = \left(\frac{M - M^\top}{2} \right)^\top = \frac{M^\top - M}{2} = -A.$$

□

- On a aussi déjà vu que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Donc $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ paire}\}$ et $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ impaire}\}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Par exemple, la décomposition de $\exp$ est $\exp = \text{ch} + \text{sh}$.

- Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré n : $\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$ où $P\mathbb{K}[X] = \{PQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Il s'agit de montrer que : $\forall A \in \mathbb{K}[X], \exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X], A = PQ + R$. C'est exactement le théorème de la division euclidienne.
- **EXEMPLE TYPE, MÉTHODE A CONNAÎTRE**

Dans l'espace vectoriel $(\mathcal{C}^0([0, 1]), +, \cdot)$, on considère :

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1]) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$$

$$G = \{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1]) \mid f \text{ est constante sur } [0, 1] \}$$

Exercice à faire chez soi : Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0([0, 1])$.

Montrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^0([0, 1])$.

Il faut donc montrer que toute fonction φ continue sur $[0, 1]$ s'écrit de manière unique comme une somme $\varphi = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$, c'est à dire telles que g est constante et $\int_0^1 f = 0$.

Autrement dit, pour $\varphi \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, on cherche à montrer que l'équation $\varphi = f + g$ d'inconnue (f, g) avec $f \in F$ et $g \in G$ possède une unique solution.

Procédons par analyse-synthèse. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0([0, 1])$.

Analyse : On suppose que $\varphi = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

On a donc que $\int_0^1 f = 0$ et qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) = c$. Alors,

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = \int_0^1 (f(t) + g(t)) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 c dt = c.$$

Donc $c = \int_0^1 \varphi(t) dt$, d'où l'on déduit que g est la fonction constante égale à $\int_0^1 \varphi(t) dt$ et $f = \varphi - c$. C'est à dire que

$$f: \begin{array}{ll} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(t) dt \end{array} .$$

Il y a donc un unique couple solution candidat, le couple (f, g) obtenu ci-dessus.

Synthèse : On définit

$$f: \begin{array}{ll} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(t) dt \end{array} \quad g: \begin{array}{ll} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_0^1 \varphi(t) dt \end{array} .$$

Ces fonctions sont bien continues sur $[0, 1]$.

▷ g est bien une fonction constante, donc $g \in G$.

▷ On pose $c = \int_0^1 \varphi(t) dt$. Alors,

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (\varphi(t) - c) dt = \int_0^1 \varphi(t) dt - \int_0^1 c dt = c - c = 0$$

Donc $f \in F$.

▷ Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$f(x) + g(x) = \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(t) dt + \int_0^1 \varphi(t) dt = \varphi(x).$$

Donc $f + g = \varphi$.

Conclusion : φ s'écrit bien de manière unique $\varphi = f + g$ avec $f \in F$ et $G \in G$. Ce raisonnement est valable pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, donc F et G sont bien supplémentaires dans E .

Spoiler Alert – Dans le prochaine chapitre, nous disposerons d'un nouvel outil pour démontrer que deux espaces sont supplémentaires : la dimension ! La méthode exposée ci-dessus garde tout de même son intérêt, d'une part car elle est valable même quand les arguments de dimension ne fonctionnent pas (en dimension infinie notamment...), et d'autre part car en plus de démontrer l'existence et l'unicité de la décomposition, elle permet d'obtenir explicitement ladite décomposition.