

23 | Espaces vectoriels

Supposé qu'Euclide et ses prédécesseurs aient considéré le triangle comme une moitié de carré ou, mieux, d'un parallélogramme : ils auraient été immédiatement conduits au vecteur, c'est-à-dire à la structure de l'espace comme espace vectoriel.

Michel Serres, philosophe et historien des sciences (1930-2019)

Le concept de linéarité a déjà été introduit de manière informelle dans le Chapitre 12 consacré aux équations différentielles *linéaires*. De manière générale, nombreux sont les problèmes, que ce soit en mathématiques, physique, économie, vérifiant le principe suivant : « si u et v sont deux solutions, alors $\lambda u + v$ est également solution pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. »

Ce type de problème amène assez naturellement à introduire la notion d'espaces vectoriels. Le nom provient de l'ensemble le plus simple à visualiser, celui des vecteurs du plan ou de l'espace. Vous savez qu'il est possible d'additionner deux vecteurs mais aussi les multiplier par un réel λ . De la même manière, nous avons vu qu'il était possible d'additionner deux fonctions ou bien les multiplier par un réel et l'objet obtenu est encore une fonction. Même chose avec les polynômes, les matrices, les suites...

L'intérêt de l'étude des espaces vectoriels est de dégager les propriétés communes que partagent ces ensembles pourtant très différents. Nous obtiendrons ainsi des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, de l'espace, aux fonctions, aux polynômes, ...

Le structure d'espace vectoriel est un nouvel exemple fondamental de structure algébrique - après les groupes et les anneaux. Cependant, alors que vous n'aviez que peu de choses à savoir sur les groupes et les anneaux, vous en saurez bientôt beaucoup sur les espaces vectoriels, dont la théorie est appelée l'algèbre linéaire.

Dans ce cours, sans surprise, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ceci étant dit, tous les résultats présentés demeurent vrais sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

I – Structure d'espace vectoriel

1 – Définitions

Exemple 23.1 – On considère $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$. Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in E$ avec $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

calculer :

$$x + y$$

$$\lambda \cdot x$$

On constate que $x + y \in E$. On dit que $+$ est une loi de composition interne sur E . On constate que $\lambda \cdot x \in E$. On dit que $\cdot$ est une loi de composition externe sur E .

Définition 23.2 – Soit E un ensemble non vide.

On dit que la loi $+$ est une **loi de composition interne** sur E si : $\forall (x, y) \in E^2 \quad x + y \in E$.

On dit que la loi $\cdot$ est une **loi de composition externe** sur E si : $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot x \in E$.

Exemple 23.3 – Si on se place sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons défini une loi de composition interne $+$ et une loi de composition externe dans le Chapitre 17. En effet,

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, M + N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot M = \lambda M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Dire qu'un ensemble E est un espace vectoriel, c'est mettre une loi externe et interne sur E tel que ces deux lois vérifient un certain nombre de propriétés.

Définition 23.4 – On appelle $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel** ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou tout simplement espace vectoriel, tout triplet $(E, +, \cdot)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est noté 0_E ou 0 et appelé le vecteur nul de E . Autrement dit $+$ est une loi de composition interne sur E qui satisfait les propriétés suivantes :
 - pour tous $x, y \in E$: $x + y = y + x$,
 - pour tous $x, y, z \in E$: $x + (y + z) = (x + y) + z$,
 - pour tout $x \in E$: $x + 0_E = 0_E + x = x$,
 - pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ qui vérifie : $x + y = y + x = 0_E$, (y est appelé **opposé** de x et noté $-x$)
- La loi de composition externe $\cdot$ satisfait les propriétés suivantes :
 - pour tout $x \in E$: $1 \cdot x = x$,
 - pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda \cdot (x + y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y)$,
 - pour tous $x \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $(\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x)$,
 - pour tous $x \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$.

Le corps $\mathbb{K}$ est appelé **corps de base** pour E .

Remarque 23.5 –

- Lorsque E est un espace vectoriel, les éléments de E sont appelés les **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ les **scalaires**.
- La tradition veut qu'on ne mette pas de flèches sur les vecteurs d'un espace vectoriel quelconque. On continue cependant d'en mettre quand on fait de la géométrie classique dans le plan et dans l'espace.
- L'élément neutre 0_E (souvent noté simplement 0 mais à ne pas confondre avec zéro) est appelé vecteur nul, il est présent dans tout espace vectoriel.
- Le symbole $\cdot$ qui se trouve entre un scalaire et un vecteur est la plupart du temps omis, comme c'est le cas par exemple lorsqu'on multiplie une matrice A par un réel 2 : on écrit $2A$ et non $2 \cdot A$.

Proposition 23.6 – Règles de calcul dans un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E$.
2. Pour tout $x \in E$: $-x = (-1) \cdot x$, où $-x$ est l'opposé de x dans E .

Démonstration.

□

Exemple 23.7 – Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$:

- $(\mathbb{R}^2, +)$ est bien un groupe commutatif, comme déjà vu dans le chapitre 14.
- Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $\alpha \cdot x$ comme $(\alpha x_1, \alpha x_2) \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit bien d'une multiplication externe, qui vérifie les propriétés :

1. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot x &= ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) = \alpha \cdot x + \beta \cdot x\end{aligned}$$

2. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (x + y) &= \alpha (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y\end{aligned}$$

3. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = \alpha \cdot (\beta x_1, \beta x_2) = (\alpha \beta x_1, \alpha \beta x_2) = (\alpha \beta) \cdot x$$

4. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $1 \cdot x = (x_1, x_2) = x$.

Donc $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

De la même manière, on pourrait remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ dans tout ce qui a été fait ci-dessus. Ainsi, $(\mathbb{C}^2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, avec les lois $+$ et $\cdot$ définies de manière analogue à ce qui a été fait pour $\mathbb{R}^2$.

Exemple 23.8 – Pour tout corps $\mathbb{K}$, $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démonstration.

□

L'exemple 23.7 se généralise facilement via la notion d'espace vectoriel produit.

Théorème 23.9 – Espace vectoriel produit

Soient $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Le produit $E_1 \times \dots \times E_n$ est un groupe commutatif pour la loi $+$ définie pour tous $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ par :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

On le munit d'une loi externe $\cdot$ en posant pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$:

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n).$$

Le triplet $(E_1 \times \dots \times E_n, +, \cdot)$ est alors un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Ici : $0_{E_1 \times \dots \times E_n} = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

Démonstration.

□

En particulier, $\mathbb{K}^n = \overbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}^{n \text{ termes}}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous retrouvons ici le cas des vecteurs du plan avec $\mathbb{R}^2$ (cf exemple 23.7) et celui des vecteurs de l'espace avec $\mathbb{R}^3$.

Par exemple : $(1, 4, -3) + 2 \cdot (0, 2, 5) = (1, 8, 7)$.

2 – Espaces vectoriels de référence

Exemple 23.10 –

1. Les ensembles $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{K})$ avec les lois $+$ et $\cdot$ définies dans le Chapitre 17 sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Plus généralement, pour n et $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Par exemple, pour $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, l'élément neutre est $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et l'opposé de $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$.

2. On a déjà vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
3. L'ensemble des polynômes $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
L'addition de polynômes et la multiplication par une constante ont été définies dans le Chapitre 19.
L'élément neutre est 0 .
L'opposé d'un polynôme $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ est $-P$.
4. L'ensemble des suites $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
L'élément neutre est $(0_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
L'opposé d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. L'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ (resp $(\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$) est un espace vectoriel.
L'élément neutre est 0_I .
L'opposé d'une fonction f est $-f$.

Exemple 23.11 – $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ N'EST PAS un espace vectoriel.

Remarque 23.12 – Nous avons vu que $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Puisque la multiplication d'un complexe par un nombre réel reste un nombre complexe, $\mathbb{C}^2$ est également un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (mais $\mathbb{R}^2$ n'est pas un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel!). Attention toutefois, ces deux structures sont bien différentes, comme nous le verrons plus tard.

Théorème 23.13 – Espaces vectoriels d'applications

Soient X un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'ensemble E^X est un groupe commutatif pour la loi $+$ définie pour tous $f, g \in E^X$ par :

$$\forall x \in X, (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

On le munit d'une loi externe $\cdot$ en posant pour tous $f \in E^X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\forall x \in X, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot (f(x))$. Le triplet $(E^X, +, \cdot)$ est alors un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Ici, 0_{E^X} est l'application nulle $x \mapsto 0_E$ de X dans E .

Démonstration.

□

Ce théorème justifie en particulier que pour tout intervalle I , l'ensemble $\mathbb{R}^I$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, et que l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sont tous les deux des espaces vectoriels.

3 – Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition 23.14 – Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E ($n \geq 1$). On dit qu'un vecteur u de E est une **combinaison linéaire** des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que

$$u = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Exemple 23.15 –

1. Le vecteur nul est une combinaison linéaire de n'importe quelle famille de vecteurs.
2. On se place dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. Soient u et v deux vecteurs de E . Alors, u , $-v$, $2u - 4v$ sont des combinaisons linéaires de u et v .
3. Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, le vecteur $(3, -2, 4)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$ car

$$(3, -2, 4) = 3 \cdot i - 2 \cdot j + 4 \cdot k.$$

4. On se place dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$. Alors le polynôme $2X^7 + 3X^4 - X^3 + X - 8$ est une combinaison linéaire des polynômes $X^7, X^6, X^5, X^4, X^3, X^2, X$, et 1 car

$$2X^7 + 3X^4 - X^3 + X - 8 = 2 \cdot X^7 + 0 \cdot X^6 + 0 \cdot X^5 + 3 \cdot X^4 + (-1) \cdot X^3 + 0 \cdot X^2 + 1 \cdot X + (-8) \cdot 1.$$

Exemple 23.16 – Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.

B est-elle une combinaison linéaire de A et I_2 ?

Exemple 23.17 – Dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on pose $u = (n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (n)_{n \in \mathbb{N}}$. u est-elle une combinaison linéaire de v et w ?


ATTENTION ! (Péché d'identification)

En général : $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k \not\Rightarrow \lambda_k = \mu_k \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$

Par exemple : $(1, 1) + 2(0, 1) + 2(1, 0) = (3, 3) = 2(1, 1) + (0, 1) + (1, 0).$


Méthode 23.18 – Pour vérifier que x est combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \dots, e_p)$

1. On peut en trouver une à l'œil ou grâce à une astuce.
2. Sinon, on procède par identification pour trouver les λ_i et on résout le système correspondant. Attention, il est possible de ne pas trouver de combinaison linéaire!

Exemple 23.19 – Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Montrer que $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs de la famille (e_1, e_2, e_3) .

Exemple 23.20 – Dans $\mathbb{R}[X]$, montrer que $P(X) = 2X^2 - X + 3$ n'est pas une combinaison linéaire de $P_1(X) = (X-1)^2$ et de $P_2(X) = X$.

Définition 23.21 – On dit qu'une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par I est **presque nulle** si tous ses éléments sont nuls SAUF UN NOMBRE FINI D'ENTRE EUX.

Certains auteurs notent $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I , mais cette notation n'est pas au programme donc on ne l'emploiera pas ici. Ne la confondez pas en tout cas avec la notation $\mathbb{K}^I$ qui désigne l'ensemble de toutes les familles d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I .

On se contentera dans ce cours de « phrases » du type : « $\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle » ...

Définition 23.22 – Soient E un espace vectoriel et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On appelle combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$ tout vecteur de E de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille **PRESQUE NULLE** d'éléments de $\mathbb{K}$.

Exemple 23.23 – Plaçons nous dans le cadre du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Alors, une combinaison linéaire de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ où $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ est une fonction de la forme

$$f = \sum_{k=0}^n \lambda_k f_{\lambda_k} \quad \text{où } n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Nous pourrions maintenant parler des combinaisons linéaires d'un nombre **INFINI** de vecteurs, mais chacune de ces combinaisons linéaires reste fondamentalement une somme **FINIE**. Les vraies sommes infinies n'ont aucun sens sans une notion de passage à la limite adéquat.

Exemple 23.24 – $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$.



ATTENTION ! Pour un nombre **FINI** de vecteurs, pas besoin de familles **PRESQUE NULLES** de scalaires !

II – Sous-espaces vectoriels

1 – Définition et caractérisation

Dans toute cette partie, F désigne un sous-ensemble de E .

Définition 23.25 – Soit E un espace vectoriel. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F est un espace vectoriel et si $F \subset E$.

Exemple 23.26 – $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E .

Théorème 23.27

F est un sous-espace vectoriel de E (en abrégé : **s.e.v.**) si et seulement si F est une partie non vide de E telle que :

- $\forall (x, y) \in F^2 \quad x + y \in F$ (on dit que F est **stable pour l'addition**)
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in F \quad \lambda \cdot x \in F$ (on dit que F est **stable pour la multiplication par un scalaire**)

Démonstration.

□

Remarque 23.28 – Une des manières que vous utiliserez en pratique pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel sera de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Corollaire 23.29

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $F \subset E$
- $F \neq \emptyset$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in F^2 \quad \lambda x + y \in F$

Démonstration.

□

Remarque 23.30 – En général, pour montrer que F est non vide, on vérifie que 0_E appartient à F .

C'est **TOUJOURS** le résultat précédent qu'il faut utiliser pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel. Si on utilisait la **DÉFINITION** des sous-espaces vectoriels, on serait obligé de vérifier beaucoup d'axiomes dont la **CARACTÉRISATION** fait l'économie.

Par ailleurs, pour montrer qu'un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire est un espace vectoriel, il suffit souvent de montrer qu'il est sous-espace d'un autre espace vectoriel connu.

Exemple 23.31 – Considérons le système linéaire :

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de (S) sont les triplets $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant les deux équations du système. La résolution d'un tel système est bien connue : elle se fait par la méthode du pivot de Gauss. Montrons que l'ensemble des solutions S de ce système est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2 – PLEIN d'exemples à connaître et savoir refaire

- **Méthode :** Soit $n \geq 1$. On se place dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.
Soit l'ensemble $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- On pose $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 1\}$. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
- On considère $F_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \tilde{P}(0) = \tilde{P}(1)\}$. Montrons que F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$.

- Soit $F_4 = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_n = u_0\}$. Montrer que F_4 est un espace vectoriel. On notera donc qu'ici les vecteurs sont des suites.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ qui sont symétriques. C'est à dire $S_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M = {}^t M\}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrons que $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^n(I)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$. (Ici, les vecteurs sont donc les applications de I dans $\mathbb{R}$.)
- Soit $F_5 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid f'' + 3f' + 4f = 0\}$ (0 est donc la fonction nulle). F_5 est donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 3y' + 4y = 0$.
Montrons que F_5 est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -ev $(\mathcal{C}^2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

3 – Intersection de sous-espaces vectoriels

Certaines opérations sur les ensembles se comportent bien avec les espaces vectoriels. C'est le cas de l'intersection.

Proposition 23.32

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

□

Remarque 23.33 – Le résultat reste vrai pour une intersection d'un nombre fini ou infini d'espaces vectoriel.

Exemple 23.34 –

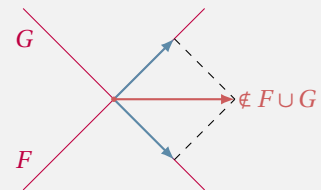
1. Si on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ alors $F \cap G =$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. On se place dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$. On considère :
 $F = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \tilde{P} \text{ est paire}\}$ (Vérifier que c'est un bien un sous-espace vectoriel).
 $G = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \tilde{P}(42) = 0\}$ (Vérifier également que c'est un sous-espace vectoriel).
Alors l'intersection $F \cap G = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \tilde{P} \text{ est paire et } \tilde{P}(42) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.



ATTENTION ! Le résultat précédent est faux pour l'union de deux s.e.v.

Exemple 23.35 –

En effet, $\{0\} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \{0\}$ sont deux s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ mais $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$. car il contient $(0, 1)$ et $(1, 0)$ mais pas leur somme $(1, 1)$.



4 – Sous-espaces affines

Les éléments d'un espace vectoriel E sont naturellement des vecteurs, mais dans le plan et dans l'espace, nous savons bien que nous pouvons identifier les points et les vecteurs via le choix d'un point de référence ou origine O . Une telle origine étant fixée, toute relation $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ nous autorise à identifier le point M et le vecteur $\vec{u}$.

Plus généralement, tout élément d'un espace vectoriel quelconque E peut être vu comme un point via le choix du vecteur nul $O = 0_E$ comme origine. Si pour tous $A, B \in E$, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur $B - A$, alors pour tout $M \in E$, l'identification points-vecteurs s'écrit simplement :

$$M = \overrightarrow{OM} \quad .$$

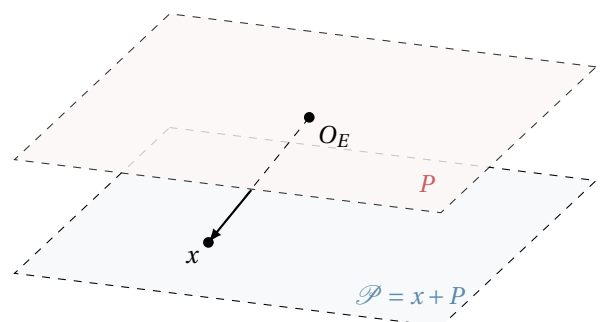
Point Vecteur

Définition 23.36 – Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle **sous-espace affine** de E toute partie $\mathcal{F}$ de E de la forme $\mathcal{F} = x + F = \{f + x \mid f \in F\}$ où F est un sous-espace vectoriel de E et x est vecteur de E . Le sous-espace vectoriel F associé au sous-espace affine $\mathcal{F}$ est unique. On l'appelle la **direction** de $\mathcal{F}$ et ses éléments sont appelés les **vecteurs directeurs** de $\mathcal{F}$.

Nous noterons souvent les sous-espaces vectoriels avec des majuscules droites ($F, G, H, \dots$) et les sous-espaces affines avec des majuscules rondes ($\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots$).

Notons que tout sous-espace **VECTORIEL** F de E est un sous-espace **AFFINE** de E puisque $F = 0_E + F$. La réciproque est fautive en revanche car un sous-espace affine ne contient en général pas 0_E .

Montrons maintenant l'unicité de la direction de $\mathcal{F}$.



Démonstration.

□

Cette notion d'espace affine offre un nouvel éclairage à un principe bien connu déjà rencontré dans plusieurs chapitres précédents :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Solution générale} & = & \text{Solution particulière} & + & \text{Solution générale} \\ \text{de l'équation complète} & & & & \text{de l'équation HOMOGÈNE} \end{array}$$

Théorème 23.37 – Ensemble des solutions d'un système linéaire

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. Si le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$ est compatible, l'ensemble de ses solutions est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$. Sa direction n'est autre que l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé. En particulier, toute droite de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et tout plan de $\mathbb{R}^3$ en sont des sous-espaces affines.

Démonstration.

□

Exemple 23.38 – La droite de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ est un sous-espace affine de direction la droite vectorielle d'équation $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$

Théorème 23.39

Soient I un intervalle et $a, b \in \mathcal{CC}(I, \mathbb{K})$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$.

Démonstration.

□

Exemple 23.40 – L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = x$ est un sous-espace affine de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de direction $S_H = \{x \mapsto \lambda e^{-2x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Finissons par un dernier exemple illustrant ce principe.

Exemple 23.41 – L'ensemble $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid XP' + P = 2X\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ de direction le sous-espace vectoriel $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid XP' + P = 0\}$.

Démonstration.

□

De la même manière qu'il suffit de trouver **UNE** solution particulière pour déterminer **L'ENSEMBLE** des solutions de l'équation complète (connaissant l'ensemble des solutions de l'équation homogène), il suffit **D'UN** point d'un espace affine pour le caractériser entièrement (connaissant une direction).

Théorème 23.42 – Caractérisation des sous-espaces affines par leur direction et un point

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction F . Alors pour tout $A \in \mathcal{F}$: $\mathcal{F} = A + F$.

Démonstration.

□

Théorème 23.43 – Intersection de sous-espaces affines

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de E . Pour tout $i \in I$, on note F_i la direction de $\mathcal{F}_i$.

On dit que les $\mathcal{F}_i$, i décrivant I , sont **concourants** ou **sécants** si $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \neq \emptyset$. Dans ce cas, $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est un sous-espace affine de E de direction $\bigcap_{i \in I} F_i$.

Démonstration.

□



ATTENTION ! Alors qu'une intersection de sous-espaces vectoriels contient toujours le vecteur nul, une intersection de sous-espaces affines peut vraiment être vide, pensez par exemple au cas de deux droites parallèles non confondues.

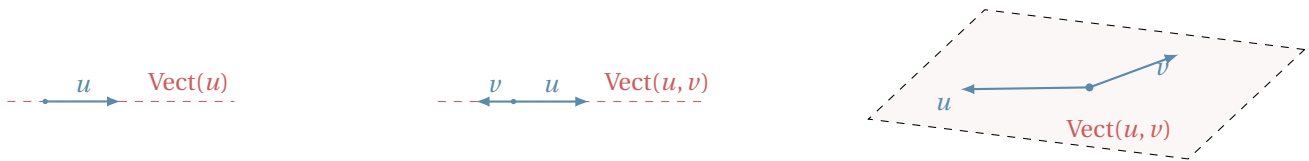
5 – Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition 23.44 – Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et X une partie de E .

- (i) L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant X est appelée le **sous-espace vectoriel** (de E) **engendré par** X et notée $\text{Vect}(X)$. À ce titre, $\text{Vect}(X)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X . En particulier, tout sous-espace vectoriel de E qui contient X contient aussi $\text{Vect}(X)$.
- (ii) Si $X = \{x_i \mid i \in I\}$, $\text{Vect}(X)$ est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_i)_{i \in I}$ et est noté $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Dans le cas d'une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$, on a donc

$$\begin{aligned}\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) &= \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \{u \in E \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, u = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\}\end{aligned}$$

Quelques figures illustrent bien la notion :



Démonstration.

□

Exemple 23.45 – Soit $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Soient $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $x_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de E .

**Méthode 23.46 –**

Pour montrer qu'un sous-espace vectoriel contient $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, il suffit de montrer qu'il contient $x_1, \dots, x_n$.

Exemple 23.47 – Soient les polynômes :

$$P_1 = 2X^2 + X, \quad P_2 = 2X^2 + 3, \quad Q_1 = 2X^2 + 2X - 3, \quad Q_2 = -2X^2 - 3X + 6$$

Montrer que $\text{Vect}(P_1, P_2) = \text{Vect}(Q_1, Q_2)$.

Pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel, il suffit très souvent de l'écrire comme un Vect.

Exemple 23.48 –

1. Soit F l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x + y + t + z = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$ d'inconnues réelles x, y, z et t . Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ en prouvant qu'on peut l'écrire sous la forme $F = \text{Vect}(\dots)$.

Remarque 23.49 – Cela s'applique à tout système linéaire **homogène**. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est toujours un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

2. Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \tilde{P}(1) = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ en l'écrivant sous la forme $G = \text{Vect}(\dots)$.

3. Autre méthode : Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

Remarque 23.50 – Il n'y a donc **PAS** unicité des vecteurs engendrant un sous-espace vectoriel.

4. Soit $H = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, f''(t) + 2f'(t) + f(t) = 0\}$, c'est à dire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$.

Exemple 23.51 – Le plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - y + 3z = 2$ est le sous-espace affine de direction $\text{Vect}((1, 2, 0), (0, 3, 1))$ passant par $(0, -2, 0)$. En résumé : $\mathcal{P} = (0, -2, 0) + \text{Vect}((1, 2, 0), (0, 3, 1))$.

Démonstration.

□

Exemple 23.52 – La droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\begin{cases} 5x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ est le sous-espace affine de direction $\text{Vect}((1, -2, 3))$ passant par $(0, 1, -1)$. En résumé : $\mathcal{D} = (0, 1, -1) + \text{Vect}((1, -2, 3))$.

Démonstration.

□

Pour finir, il faut toujours être bien attentif, lorsque l'on utilise la notion de Vect , au corps de base, comme le montrent les exemples ci-dessous.

Exemple 23.53 – Si le corps de base est $\mathbb{R}$: $\text{Vect}(1) = \{a \times 1 \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ et $\text{Vect}(1, i) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$.
Si par contre le corps de base est $\mathbb{C}$: $\text{Vect}(1) = \{a \times 1 \mid a \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$.

6 – Somme de sous-espaces vectoriels

On considère E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition 23.54 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On note $F + G$ et on appelle **somme des sous-espaces vectoriels** F et G l'ensemble

$$F + G = \{f + g \mid f \in F, g \in G\}.$$

Proposition 23.55 – La somme est un sous-espace vectoriel

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

□

Proposition 23.56 – Minimalité de la somme comme SEV contenant l'union

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant $F \cup G$.

C'est à dire que pour tout sous-espace vectoriel H de E contenant $F \cup G$, alors $F + G \subset H$.

Démonstration. Soit H un sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.

Soit $u \in F + G$. Alors $u = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. $F \subset H$ et $G \subset H$ donc $f, g \in H$. Comme H est un sous-espace vectoriel, $f + g \in H$. Ainsi, $F + G \subset H$. □

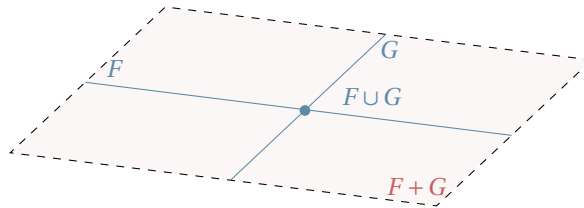
Exemple 23.57 –

1. Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$, on considère les sous-espaces vectoriels F l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $G = \text{Vect}(\exp)$.

2. Les droites vectorielles $F = \text{Vect}((1, 0, 0))$ et $G = \text{Vect}((0, 1, 0))$ ont pour somme le plan d'équation $z = 0$.



ATTENTION ! Ne confondez pas **SOMME** et **RÉUNION** ! La somme est un sous-espace vectoriel, mais pas la réunion en général.



Proposition 23.58 – Somme de SEV engendrés par des familles finies

Soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_p)$ deux familles de vecteurs de E .

On note $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $G = \text{Vect}(y_1, \dots, y_p)$. Alors,

$$F + G = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p).$$

Démonstration. On procède par double inclusion.

Proposition 23.59

Toute combinaison linéaire d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est un élément de $F + G$.

Démonstration.

Soit $u \in F$ et $v \in G$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda u \in F$ et $\mu v \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

Donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F + G$. □

7 – Sous-espaces vectoriels en somme directe

La somme de sous-espaces vectoriels est un outil intéressant, mais elle souffre d'un défaut important, qui est le manque d'unicité des décompositions : si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors un vecteur de $F + G$ peut s'écrire de plusieurs façons comme somme d'un vecteur de F et d'un de G . C'est un souci si on a, par exemple, envie de définir des systèmes de coordonnées.

Question : Quelle condition doit-on rajouter pour que les décompositions dans $F + G$ soient uniques ?

Définition 23.60 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont en **somme directe** lorsque tout vecteur de $F + G$ se décompose de manière unique en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . Cette condition peut aussi s'écrire :

$$\forall x, x' \in F, \forall y, y' \in G, \quad x + y = x' + y' \implies \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}.$$

Lorsque la somme de F et G est directe, on la note $F \oplus G$.

Le petit rond qu'on ajoute à la notation $F + G$ pour indiquer que la somme est directe ne fait pas de $F + G$ et $F \oplus G$ des ensembles différents, la notation $F \oplus G$ contient juste une **INFORMATION** d'unicité en plus.

Proposition 23.61 – Caractérisation 1 des sommes directes

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

F et G sont en somme directe si et seulement si pour tout $x \in F$ et tout $y \in G$: $x + y = 0_E \implies \begin{cases} x = 0_E \\ y = 0_E \end{cases}$.

Démonstration.

□

Proposition 23.62 – Caractérisation 2 des sommes directes

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration.

□

Exemple 23.63 –

- Dans $\mathbb{R}^3$, le plan $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et la droite $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ sont en somme directe.

- Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, on pose F l'ensemble des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et $G = \{g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid g(0) = g'(0) = g''(0) = 0\}$.

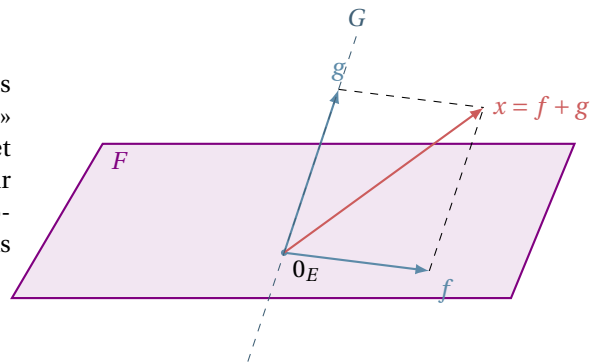
On peut montrer (exercice!) que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Montrons que F et G sont en somme directe. Pour cela, on va montrer que $F \cap G = \{\theta\}$ où θ est la fonction nulle.

8 – Sous-espaces vectoriels supplémentaires

On cherche maintenant à rajouter une nouvelle condition aux sommes directes : Pouvoir décomposer **TOUS** les vecteurs de E comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . Pour cela, on a besoin de la notion de supplémentaire.

Définition 23.64 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque tout élément x de E se décompose de manière unique comme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si leur somme couvre E et s'ils sont le plus possible « séparés » l'un de l'autre, i.e. si leur somme est la plus grande possible et leur intersection la plus petite possible. On a l'habitude, pour se représenter géométriquement deux tels sous-espaces vectoriels, de faire des figures valables dans $\mathbb{R}^3$ censées illustrer le cas général.



Proposition 23.65 – Caractérisation 1 des supplémentaires

Soient deux sous-espaces vectoriels F et G de E .

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F + G = E$ **ET** F et G sont en somme directe.

Démonstration.

□

En combinant ce résultat avec la caractérisation 2 des sommes directes, on obtient

Proposition 23.66 – Caractérisation 2 des supplémentaires

Soient deux sous-espaces vectoriels F et G de E .

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F + G = E$ ET $F \cap G = \{0_E\}$.

Exemple 23.67 –

- L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.

□

- On a aussi déjà vu que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Donc $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ paire}\}$ et $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ impaire}\}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Par exemple, la décomposition de $\exp$ est $\exp = \text{ch} + \text{sh}$.

- Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré n : $\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$ où $P\mathbb{K}[X] = \{PQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

- **EXEMPLE TYPE, MÉTHODE A CONNAITRE**

Dans l'espace vectoriel $(\mathcal{C}^0([0, 1]), +, \cdot)$, on considère :

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1]) \mid \int_0^1 f(t) \, dt = 0 \right\}$$

$$G = \{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1]) \mid f \text{ est constante sur } [0, 1] \}$$

Exercice à faire chez soi : Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0([0, 1])$.

Montrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^0([0, 1])$.

Spoiler Alert – Dans le prochain chapitre, nous disposerons d'un nouvel outil pour démontrer que deux espaces sont supplémentaires : la dimension ! La méthode exposée ci-dessus garde tout de même son intérêt, d'une part car elle est valable même quand les arguments de dimension ne fonctionnent pas (en dimension infinie notamment...), et d'autre part car en plus de démontrer l'existence et l'unicité de la décomposition, elle permet d'obtenir explicitement ladite décomposition.