

22 | Développements limités

The true and best way of learning any art, is not to see a great many examples done by another person, but to possess ones self first of the principles of it, and then to make them familiar, by exercising ones self in the practice. For it is practice alone, that makes a man perfect in any thing.

Brook Taylor (1685-1731), mathématicien.

Dans ce chapitre, nous allons voir comment approcher localement une fonction par des fonctions polynomiales. Cette approximation locale permet l'étude locale du graphe d'une fonction (tangentes et asymptotes en particulier). C'est aussi un outil pratique pour obtenir des équivalents et calculer des limites.

Dans ce chapitre D désigne une partie de $\mathbb{R}$ de la forme $D = I$ ou bien $D = I \setminus \{\alpha\}$ où I est un intervalle non vide et non réduit à un point et α est un point de I .

I – Rappels sur les $o(x^n)$ au voisinage de 0

- Dire que $f \underset{x \rightarrow 0}{=} a + o(1)$ est équivalent à dire que f admet a pour limite en 0.
- Si m et n sont deux entiers naturels tels que $m < n$, alors $x^n \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^m)$.
- Si n est un entier naturel et f et g sont deux fonctions définies au voisinage de 0 telles que $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$, alors on peut noter $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} g(x) + o(x^n)$.
- Soient m et n deux entiers naturels tels que $m \leq n$. Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} g(x) + o(x^n)$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} g(x) + o(x^m)$ (c'est-à-dire que si $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$, alors $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^m)$).
- Pour tous entiers naturels n et k et tout réel α , si $f(x) = g(x) + \alpha x^k \cdot o(x^n)$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} g(x) + o(x^{n+k})$.
- Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq p$, $o(x^n) + o(x^p) = o(x^n)$ et, en particulier, $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$.

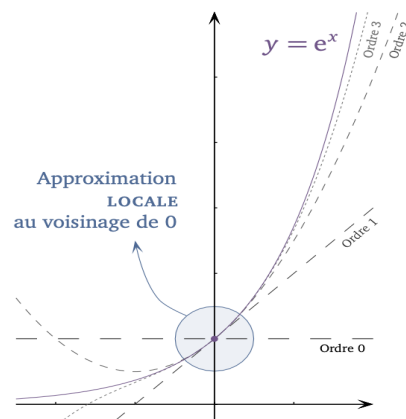
II – Développement limité d'une fonction réelle

1 – Définition

Nous cherchons dans ce chapitre à approximer les fonctions par des fonctions polynomiales au voisinage d'un point, généralement 0.

Nous allons par exemple montrer que : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Ce résultat signifie que la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction $x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.



Définition 22.1 – Soit f une fonction définie sur D , tel que D contient 0 ou a pour extrémité 0. Soit n un entier naturel. On dit que f **possède un développement limité (DL) à l'ordre n en 0** si, et seulement si, il existe des constantes $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in D, \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$

Remarque 22.2 –

- Quand on écrit un développement limité en 0, le degré maximal des monômes qui apparaît avant $o(x^n)$ est inférieur ou égal n . Une écriture comme

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 3x^2 + x^3 + x^4 + o(x^3)$$

n'est pas un développement limité. Puisque $x^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3)$, on peut écrire

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 3x^2 + x^3 + o(x^3)$$

et l'on a maintenant un développement limité à l'ordre 3.

- L'ordre d'un développement limité est l'exposant qui apparaît dans le $o(x^n)$. Par exemple, le développement limité

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 3x^2 + x^4 + o(x^6)$$

est un développement limité à l'ordre 6 et pas à l'ordre 4. L'égalité $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 3x^2 + x^4 + o(x^4)$ est vraie aussi, mais moins précise.

Définition 22.3 – Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur D tel que D contient a ou a pour extrémité a . On dit que f **admet un développement limité à l'ordre n en a** si et seulement si la fonction $h \mapsto f(a+h)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. Cela revient à dire qu'il existe des constantes réelles $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^n).$$

Cette dernière relation s'écrit encore, en posant $x = a + h$,

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

C'est cette dernière formule qui est à proprement parler un développement limité à l'ordre n en a de f .

Dans la deuxième formule, **il ne faut surtout pas développer** car ce sont les puissances de $(x-a)$ qui sont intéressantes à considérer lorsque l'on se situe au voisinage de a .

Plus n est grand, plus la quantité $(x-a)^n$ est petite au voisinage de a . Du coup, plus n est grand, plus l'approximation de f obtenue au voisinage de a est précise.

On peut ramener tout développement limité au voisinage de a à un développement limité au voisinage de 0. Précisément, si : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, alors après composition **À DROITE** par la fonction $x \mapsto x+a$: $f(x+a) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$.

Ensuite, si on dispose d'un développement limité de f à l'ordre n : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, on dispose aussi d'un développement de f à tout ordre $m \leq n$: $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_m(x-a)^m + o((x-a)^m)$. Cette opération d'oubli des termes de degré compris entre $m+1$ et n est appelée *troncature* à l'ordre m .

Exemple 22.4 –

1. Les polynômes réels admettent des développements limités à tous les ordres.

Par exemple, $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$ admet pour développement limité en 0 :

$$(1+x)^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 4x + 6x^2 + o(x^2)$$

développement limité à l'ordre 2 en 0

$$(1+x)^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 + o(x^7)$$

développement limité à l'ordre 7 en 0

2. La fonction $f:]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0.

$$x \mapsto x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1+x)$$

On a pour tout x non-nul au voisinage de 0,

$$\frac{x^3 \ln(1+x)}{x^3} = \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc $x^3 \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3)$ et on peut écrire :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + 2x^3 + o(x^3).$$

3. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ admettent des $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$ et donc

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad \text{avec} \quad \frac{x^{n+1}}{(1-x)x^n} = \frac{x}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0.$$

Ainsi la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 qui est

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n).$$

Comme $-x \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$, on peut appliquer cette formule en $-x$ pour obtenir par composition :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n).$$

2 – Premières propriétés

Proposition 22.5 – Unicité du développement limité

Si f est une fonction définie sur D qui admet deux développements limités à l'ordre n en 0

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n),$$

alors les coefficients des deux développements limités sont les mêmes : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = b_k$.

Démonstration. Démontrons cette proposition par l'absurde : supposons que les deux $(n+1)$ -uplets $(a_0, \dots, a_n)$ et $(b_0, \dots, b_n)$ sont différents. Notons p le plus petit indice de $\llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $a_p \neq b_p$. Par hypothèse,

$$\forall x \in D, \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n).$$

En faisant la différence de ces deux développements limités, on obtient, puisque les p premiers coefficients sont égaux,

$$\forall x \in D, \quad (a_p - b_p)x^p + \sum_{k=p+1}^n (a_k - b_k)x^k + o(x^n) - o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0$$

Or, une somme de deux $o(x^n)$ est un $o(x^n)$ et, en divisant le tout par x^p lorsque $x \neq 0$, on obtient

$$\forall x \in D \setminus \{0\}, \quad b_p = a_p + \sum_{k=p+1}^n (a_k - b_k)x^{k-p} + o(x^{n-p}).$$

Lorsqu'on prend la limite en 0, on obtient $a_p = b_p$ ce qui contredit la minimalité de p .

□

Définition 22.6 – Soit f une fonction admettant le développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n).$$

La fonction polynômiale $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ est la **partie régulière** du développement limité de f à l'ordre n en 0.

Remarque 22.7 – La partie régulière du développement limité d'une fonction à l'ordre n est de degré **au plus** égal à n . Il n'est pas obligatoire que le coefficient devant x^n soit non nul!



ATTENTION ! Deux fonctions admettant les mêmes développements limités à tous les ordres en un point peuvent être différentes au voisinage de ce point.

Par exemple, considérons la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $y = \frac{1}{x^2}$, puisque $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^{n/2} e^{-y} = 0$ par croissances comparées, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^{n/2} e^{-y} = 0$. Autrement dit, le développement limité de f à tout ordre n en 0 est

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n).$$

La fonction f admet les mêmes développements limités que la fonction nulle (en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$) et bien sûr f n'est pas la fonction nulle.

Un développement limité n'est donc qu'une propriété **LOCALE** : Une fonction possède un unique développement limité à l'ordre n en un point mais les développements limités à tous les ordres en un point d'une fonction ne suffisent pas pour la caractériser entièrement.

Théorème 22.8 – Lien développement limité/continuité/dérivabilité

Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.

- **Continuité** : f est continue en a si et seulement si f possède un $DL_0(a)$.
Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.
- **Dérivabilité** : f est dérivable en a si et seulement si f possède un $DL_1(a)$.
Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)$.

Dans un développement limité de f au voisinage de a , le coefficient d'ordre 0 est **TOUJOURS** $f(a)$ et le coefficient d'ordre 1 **TOUJOURS** $f'(a)$.

Démonstration.

- f est continue en $a \iff \begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe et vaut } f(a) \\ &\iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) \text{ existe et vaut } 0 \\ &\iff f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{=} o(1) \\ &\iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1) \end{aligned}$
- f est dérivable en $a \iff \begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et vaut } f'(a) \\ &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0 \\ &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)}{x-a} = 0 \\ &\iff \frac{f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)}{x-a} \underset{x \rightarrow a}{=} o(1) \\ &\iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a) \end{aligned}$

□

Théorème 22.9 – Lien développement limité/parité/impairité

On suppose que 0 appartient à D et que D est symétrique par rapport à 0. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f possède un développement limité au voisinage de 0.

- **Parité :** Si f est paire, les coefficients de rang impair de son développement limité sont nuls.
- **Imparité :** Si f est impaire, les coefficients de rang pair de son développement limité sont nuls.

Ainsi, au voisinage de 0, pour une fonction impaire, n'apparaissent réellement que les termes en $x, x^3, x^5, x^7, \dots$

Démonstration. Supposons que f est paire et écrivons son $DL_n(0)$: $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Composons ensuite à droite par $x \mapsto -x$:

$$f(x) = f(-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \dots + (-1)^n a_nx^n + o(x^n)$$

Par unicité des coefficients : $a_1 = -a_1$ donc $a_1 = 0$, puis $a_3 = -a_3$ donc $a_3 = 0$, etc.

La preuve dans le cas f impaire est similaire. □

3 – Intégration d'un développement limité**Théorème 22.10 – Intégration terme à terme d'un développement limité**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant 0. Si f possède un développement limité en 0 à l'ordre n ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

alors toute primitive F de f possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}).$$

Remarque 22.11 – Le résultat reste valable pour un développement limité en a avec

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^n), \quad F(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} F(a) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{h^{k+1}}{k+1} + o(h^{n+1}).$$

Démonstration. Soit F une primitive de f . On suppose que f possède un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n).$$

Considérons la fonction définie sur I par

$$\forall h \in I, \quad \varphi(x) = F(x) - F(0) - \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Montrons que $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{n+1})$. La fonction φ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n c_k x^k \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$$

ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{x^n} = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. La limite précédente assure qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I, |x| \leq \alpha \implies |\varphi'(x)| \leq \varepsilon |x|^n$.

Soit $x \in I$ tel que $|x| \leq \alpha$. Pour tout réel t compris entre 0 et x , on a $|\varphi'(t)| \leq \varepsilon |t|^n \leq \varepsilon |x|^n$.

On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à φ ce qui nous donne

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \varepsilon |x|^n |x - 0| = \varepsilon |x|^{n+1}.$$

Comme $\varphi(0) = 0$, on a donc $|\varphi(x)| \leq \varepsilon |x|^{n+1}$. On a démontré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x| \leq \alpha \implies |\varphi(x)| \leq \varepsilon |x|^{n+1},$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = 0$ ce qui signifie exactement que $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{n+1})$. □

Exemple 22.12 –

1. Développement limité à l'ordre 4 de $\cos$ en 0. En itérant l'intégration terme à terme, on a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 + o(1) \\ \sin(x) &= \sin(0) + x + o(x) = x + o(x) \\ -\cos(x) &= -\cos(0) + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = -1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ -\sin(x) &= -\sin(0) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = -x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \cos(x) &= \cos(0) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\end{aligned}$$

2. Obtention du développement limité à tout ordre en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et x au voisinage de 0, on sait que $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$ donc

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \ln(1+0) + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1}) \\ &= \sum_{k'=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k'-1}}{k'} x^{k'} + o(x^{n+1})\end{aligned}$$

et donc, en tronquant le développement limité précédent à l'ordre n :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n).$$

3. Obtention du développement limité à tout ordre en 0 de Arctan .

Comme $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, pour $n \in \mathbb{N}$ on peut utiliser le développement limité à l'ordre n de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en x^2 :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

Comme Arctan est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}(x) = \text{Arctan}(0) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

Or, $\text{Arctan}(0) = 0$, donc, on obtient le développement limité à l'ordre $2n+1$:

$$\text{Arctan}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$



ATTENTION ! La réciproque de ce théorème est fautive : si une fonction dérivable f admet un développement limité à l'ordre n en a , sa dérivée n'admet pas nécessairement un développement limité d'ordre $n-1$ en a .

4 – Formule de Taylor-Young

Théorème 22.13 – Formule de Taylor-Young

Soit I un intervalle, $a \in I$. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , alors f possède un développement limité en a à l'ordre n et

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

ou encore

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

En particulier, si $a = 0$, on obtient

Théorème 22.14 – Formule de Taylor-Young en 0

Soit I un intervalle contenant 0. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , alors f possède un développement limité en 0 à l'ordre n et

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Ce résultat est avant tout un théorème d'EXISTENCE de développements limités. Sur cette question, nous disposons à présent de deux équivalences et d'une IMPLICATION (seulement) :

Continuité	$\iff$	Existence d'un développement limité à l'ordre 0
Dérivabilité	$\iff$	Existence d'un développement limité à l'ordre 1
Classe $\mathcal{C}^n$	$\implies$	Existence d'un développement limité à l'ordre n

Démonstration. *Démonstration.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose H_n :

$$\text{« Si } f \in \mathcal{C}^n(I), \text{ alors } \forall x \in I, f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \text{ »}$$

Initialisation : Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur I , alors f est continue en a , donc $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.

Hérédité : Supposons H_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . Alors, f' est de classe $\mathcal{C}^n$, donc par hypothèse de récurrence,

$$\forall x \in I, \quad f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

On utilise le théorème d'intégration des développements limités, pour obtenir que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} \frac{1}{(k+1)} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

En remarquant que $\frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} \frac{1}{(k+1)} = \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}$, on effectue un décalage d'indice de 1 dans la somme :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}).$$

Donc H_{n+1} est vraie.

Par récurrence, on obtient le théorème de Taylor-Young.

□
□

Corollaire 22.15 – DL pour les fonctions de classe C^∞

Une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I possède un développement limité à tout ordre en tout point de I .

Exemple 22.16 – La fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Elle est égale à ses dérivées successives et en particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, \exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$. Elle admet ainsi un développement limité en 0 de tout ordre, donné à l'ordre n par :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Exemple 22.17 – La fonction cosinus est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \cos^{(2n)} = (-1)^n \cos \text{ et } \cos^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin$$

Ainsi, en appliquant la Formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre $2n$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = \cos(0) - \sin(0)x - \frac{\cos(0)}{2}x^2 + \frac{\sin(0)}{6}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n \sin(0)}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \frac{(-1)^n \cos(0)}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})$$

Comme $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$, on obtient le développement en 0 à l'ordre $2n$ de cosinus.

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n})$$

En procédant de même avec la fonction sinus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, le développement limité à l'ordre $2n+1$:

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$



ATTENTION ! L'existence d'un développement limité à un ordre $n \geq 2$ en 0 n'implique pas que f soit n fois dérivable en 0.

Par exemple la fonction définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admet $f(x) = x^2 + o(x^2)$ comme DL à l'ordre 2 en 0 car $\varepsilon(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

On peut montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 2x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Or le taux d'accroissement de f' en 0

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 2 + 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'a pas de limite lorsque x tend vers 0 donc f n'est pas deux fois dérivable en 0.

5 – Développement limités usuels

Les formules du tableau ci-dessous doivent être connues **PAR COEUR** sans délai et sans la moindre hésitation.

$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
$\text{Arctan } x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$\text{sh } x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\text{ch } x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

Exemple 22.18 – Notons que le développement limité de $(1+x)^\alpha$ permet d'obtenir des nombreux cas particuliers :

- Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

- Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

en composant par $x \mapsto -x^2$, cela donne :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

qui par primitivation donne finalement :

$$\arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

III – Opérations sur les développements limités

1 – Développement limité d'une somme

Proposition 22.19 – Développement limité d'une combinaison linéaire

Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en 0 et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction $f + \lambda g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

La partie régulière du DL à l'ordre n en 0 de $f + \lambda g$ est la somme des parties régulières des DL à l'ordre n en 0 de f et de λ fois celui de g .

Démonstration. Sous les hypothèses de la proposition, on écrit les DL à l'ordre n en 0 de f et g :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$$

En ajoutant ces deux égalités, on obtient

$$(f + g)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k + \underbrace{o(x^n) + o(x^n)}_{=o(x^n)}.$$

□

Exemple 22.20 – Retrouver les développements limités de ch et sh.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \text{ch}(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) + 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + o(x^n) \right) \end{aligned}$$

On remarque que les termes de rang impair s'annulent. En simplifiant, on obtient :

$$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

En partant de $\text{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, on obtient de même :

$$\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Exemple 22.21 – Donner un développement limité à l'ordre 6 en 0 de $\text{sh} - \sin$: Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \text{sh}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \\ -\sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \\ \text{sh}(x) - \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^6) \end{aligned}$$

Remarque 22.22 – Si f admet un DL à l'ordre n et si g admet un DL à l'ordre p , alors en faisant la somme des développements limités de f et g , on ne peut obtenir qu'un DL à l'ordre $\min(n, p)$ de $f + g$.

2 – Développement limité d'un produit

Proposition 22.23 – Développement limité d'un produit

Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en 0, alors la fonction $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

La partie régulière du DL à l'ordre n en 0 de $f \times g$ est obtenue en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des parties régulières des DL à l'ordre n en 0 de f et g .

Démonstration. Sous les hypothèses précédentes, on écrit les DL à l'ordre n en 0 de f et g :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

$$\text{et } g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$$

Alors

$$\begin{aligned} (f \times g)(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots + \left(\sum_{j=0}^n c_j d_{n-j} \right) x^n \\ &\quad + \underbrace{\text{termes de la forme } c_r x^r \text{ (avec } n+1 \leq r \leq 2n)}_{=o(x^n)} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k \underbrace{x^k o(x^n)}_{=o(x^{n+k})} + \sum_{k=0}^n b_k \underbrace{x^k o(x^n)}_{=o(x^{n+k})} + \underbrace{o(x^n) \times o(x^n)}_{=o(x^n)}}_{=o(x^n)} \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat annoncé. □

Exemple 22.24 – Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto e^x(1 + \sin(x))$: Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^x(1 + \sin(x)) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Remarque 22.25 – D'après la proposition précédente, il suffit de connaître un DL à l'ordre n en 0 de f et de g pour obtenir un DL à l'ordre n en 0 du produit $f \times g$. Mais ce n'est pas une condition nécessaire : il est parfois inutile de « pousser » les DL de f et g jusqu'à l'ordre n pour obtenir un DL à l'ordre n de $f \times g$, on peut parfois développer f et/ou g à un ordre plus petit (cf exemple suivant).

Exemple 22.26 – Développer à l'ordre 4 en 0 la fonction $x \mapsto (\cos(x) - 1) \ln(1 + x)$.

▷ Sans optimisation : on écrit les DL à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \cos(x) - 1$ et $x \mapsto \ln(1 + x)$.

Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) \quad \text{et} \quad \ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4).$$

On effectue le produit de ces deux DL en ne gardant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à 4, et on obtient

$$(\cos(x) - 1) \ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4).$$

Ce faisant, on constate que les termes $\frac{1}{4!}x^4$ du DL de $x \mapsto \cos(x) - 1$ et $\frac{1}{3}x^3$ et $\frac{1}{4}x^4$ du DL de $x \mapsto \ln(1 + x)$ n'ont été d'aucune utilité, car dans le produit, ils sont multipliés par des monômes de puissances suffisamment élevées pour n'engendrer que des termes négligeables devant x^4 .

- ▷ **En optimisant** : On se contente d'écrire un DL à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \cos(x) - 1$ et un DL à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$. Le produit

$$(\cos(x) - 1) \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \right) \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right)$$

va bien donner un calcul suffisamment précis pour obtenir un DL à l'ordre 4 valide pour ce produit :

- le $o(x^3)$ du premier facteur est multiplié «au minimum» par x et donne un $o(x^4)$;
- le $o(x^2)$ du deuxième facteur est multiplié «au minimum» par x^2 et donne un $o(x^4)$.

Ainsi, si on connaît les termes prépondérants des DL de f et g , on a aux ordres respectifs r et s :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_r x^r + o(x^r) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^p (a_p + a_{p+1} x + \dots + a_r x^{r-p} + o(x^{r-p})) \quad (\text{avec } a_p \neq 0)$$

$$\text{et } g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} b_q x^q + b_{q+1} x^{q+1} + \dots + b_s x^s + o(x^s) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^q (b_q + b_{q+1} x + \dots + b_s x^{s-q} + o(x^{s-q})) \quad (\text{avec } b_q \neq 0),$$

alors la précision maximale que l'on peut obtenir en développant le produit est limitée par les deux produits

$$a_p x^p o(x^s) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{s+p}) \quad \text{et} \quad b_q x^q o(x^r) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{r+q}).$$

En multipliant ces deux DL, on ne peut obtenir au mieux qu'un DL à l'ordre $\min(s+p, r+q)$.

Méthode 22.27 – optimisation du calcul du DL d'un produit

Soit n , p et q trois entiers naturels tels que $p \leq n$ et $q \leq n$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de 0.

- ▷ Si le premier terme du développement limité en 0 de f à un ordre supérieur ou égal à p commence par $a_p x^p$ avec $a_p \neq 0$,
- ▷ et si le premier terme du développement limité en 0 de g à un ordre supérieur ou égal à q commence par $b_q x^q$ avec $b_q \neq 0$,

alors, pour obtenir un développement limité en 0 du produit $f \times g$, il suffit d'écrire un DL de f en 0 à l'ordre $n-q$ et un DL de g en 0 à l'ordre $n-p$.

3 – Développement limité d'une fonction composée

Pour obtenir le développement limité d'une fonction composée $f \circ u$ à l'ordre n au voisinage de 0, lorsque $\lim_0 u = 0$, il suffit de connaître les DL de f et u à l'ordre n en 0. Le DL de $f \circ u$ s'obtient alors par substitution.

- ▷ On écrit le DL à l'ordre n en 0 de u . Puisque $\lim_0 u = 0$, son terme constant est nul. Pour une certaine fonction ε_u définie au voisinage de 0 telle que $\lim_0 \varepsilon_u = 0$, on a

$$u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + o(x^n).$$

- ▷ On écrit le DL à l'ordre n en 0 de f :

$$f(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} d_0 + d_1 h + d_2 h^2 + \dots + d_n h^n + o(h^n).$$

- ▷ Or

$$f(u(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} d_0 + d_1 u(x) + d_2 (u(x))^2 + \dots + d_n (u(x))^n + o([u(x)]^n)$$

Comme $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} c_1 x$, donc $u(x)^n \underset{x \rightarrow 0}{\sim} c_1^n x^n$ d'où l'on déduit $o([u(x)]^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$. Ainsi,

$$f(u(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} d_0 + d_1 u(x) + d_2 (u(x))^2 + \dots + d_n (u(x))^n + o(x^n)$$

et on obtient un DL en 0 à l'ordre n de $f \circ u$ en ne conservant dans le développement des termes $(u(x))^k$ (où $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$) que les monômes de degré inférieur ou égal à n .

Exemple 22.28 –

1. Calculons le DL à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction $f : x \mapsto e^{\sin(x)}$.

On pose $k(x) = \sin(x) - \sin(0) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ et on a

$$f(x) = e^{0+k(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{k(x)} = 1 + k(x) + \frac{k(x)^2}{2} + \frac{k(x)^3}{6} + \frac{k(x)^4}{24} + \frac{k(x)^5}{120} + o(k(x)^5)$$

Or ici $k(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $o(k(x)^5) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^5)$.

1	1	=	1				
1	$k(x)$	$\underset{x \rightarrow 0}{=}$	x	$-\frac{x^3}{6}$	$+\frac{x^5}{120}$	$+o(x^5)$	
1/2	$k^2(x)$	$\underset{x \rightarrow 0}{=}$	x^2	$-\frac{x^4}{3}$		$+o(x^5)$	
1/6	$k^3(x)$	$\underset{x \rightarrow 0}{=}$	x^3	$-\frac{x^5}{2}$		$+o(x^5)$	
1/24	$k^4(x)$	$\underset{x \rightarrow 0}{=}$		x^4		$+o(x^5)$	
1/120	$k^5(x)$	$\underset{x \rightarrow 0}{=}$			x^5	$+o(x^5)$	
$e^{\sin(x)}$ $\underset{x \rightarrow 0}{=}$ $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + o(x^5)$							

2. Calculer le DL à l'ordre 3 en 0 de $g : x \mapsto \exp(\exp(x))$.

On pose $k(x) = e^x - e^0 \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et on a

$$g(x) = \exp(k(x) + 1) = e \times \exp(0 + k(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} e + e k(x) + \frac{e k(x)^2}{2} + \frac{e k(x)^3}{6} + o(k(x)^3).$$

Or ici $k(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $o(k(x)^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3)$.

e	1	=	1				
e	$k(x)$	$\underset{x \rightarrow 0}{=}$	x	$+\frac{x^2}{2}$	$+\frac{x^3}{6}$	$+o(x^3)$	
e/2	$k(x)^2$	$\underset{x \rightarrow 0}{=}$	x^2	$+x^3$		$+o(x^3)$	
e/6	$k(x)^3$	$\underset{x \rightarrow 0}{=}$		x^3		$+o(x^3)$	
$\exp(\exp(x))$ $\underset{x \rightarrow 0}{=}$ $e + ex + ex^2 + \frac{5e}{6}x^3 + o(x^3)$							

À retenir : pour obtenir un DL à l'ordre n à partir d'une expression de la forme $\exp\left(C + a_1x + a_2x^2 + \dots + a^nx^n + o(x^n)\right)$, où $C \neq 0$, on utilise la propriété algébrique de l'exponentielle qui permet d'écrire l'expression précédente sous la forme $e^C \times \exp\left(a_1x + a_2x^2 + \dots + a^nx^n + o(x^n)\right)$.

3. Calculer le DL à l'ordre 3 en 0 de $h : x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

On pose $k(x) = e^x - e^0 \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et on a

$$h(x) = \ln(2 + k(x)) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{k(x)}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + \frac{k(x)}{2} - \frac{k(x)^2}{8} + \frac{k(x)^3}{24} + o(k(x)^3).$$

Or ici $k(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $o(k(x)^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3)$.

$\ln(2)$	1	$=$	1			
$1/2$	$k(x)$	$\underset{x \rightarrow 0}{=}$	x	$+\frac{x^2}{2}$	$+\frac{x^3}{6}$	$+o(x^3)$
$-1/8$	$k(x)^2$	$\underset{x \rightarrow 0}{=}$		x^2	$+x^3$	$+o(x^3)$
$1/24$	$k(x)^3$	$\underset{x \rightarrow 0}{=}$			x^3	$+o(x^3)$
	$\ln(1+e^x)$	$\underset{x \rightarrow 0}{=}$	$\ln(2)$	$+\frac{1}{2}x$	$+\frac{1}{8}x^2$	$+o(x^3)$

À retenir : pour obtenir un DL à l'ordre n à partir d'une expression de la forme $\ln\left(C + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)\right)$, où $C \neq 1$, on factorise par C à l'intérieur du logarithme pour se ramener à $\ln(C) + \ln\left(1 + \frac{a_1}{C}x + \dots + \frac{a_n}{C}x^n + o(x^n)\right)$.

4. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \ln(\cos(x))$.

Posons

$$k(x) = \cos(x) - \cos(0) = \cos(x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

Ici $k(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ donc $o(k(x)^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^4)$. Il suffit donc de développer le logarithme à l'ordre 2 au voisinage de $\cos(0) = 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(1 + k(x)) = k(x) - \frac{1}{2}k(x)^2 + o(k(x)^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4\right) + o(x^4) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

4 – Développement limité d'un quotient

Méthode 22.29 – Développement limité d'un pseudo-inverse



Pour déterminer un développement limité en 0 de $\frac{1}{1+f}$ lorsque $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, on compose un développement limité en 0 de $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ avec un développement limité en 0 de f .

Exemple 22.30 – Calculer le DL à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{1}{2-x}$.

Pour tout x au voisinage de 0, on a $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$. On pose donc $u(x) = \frac{x}{2}$ et on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} (1 + u(x) + u(x)^2 + u(x)^3 + o(u(x)^3)).$$

Or ici $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $o(u(x)^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3)$, donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

Exemple 22.31 – Calculer le DL à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1 - \sin(x)}$.

On pose $k(x) = \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. On a

$$f(x) = \frac{1}{1 - k(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + k(x) + k(x)^2 + k(x)^3 + o(k(x)^3).$$

Or ici $k(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $o(k(x)^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3)$, donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3$$

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{6} + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + o(x^3)$$

Méthode 22.32 – Existence d'un développement limité pour l'inverse

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 et ayant une limite finie ℓ non nulle en 0.

Si f a un développement limité à l'ordre n en 0, alors il en va de même pour $\frac{1}{f}$. On écrit que pour tout $x \in I$,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell} \times \frac{1}{1 - \frac{\ell - f(x)}{\ell}}$$

et la fonction $g : x \mapsto \frac{\ell - f(x)}{\ell}$ tend vers 0 en 0 et possède un DL à l'ordre n en 0.

Exemple 22.33 – Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x) + \exp(x)}$.

On pose $g(x) = \frac{2 - (\cos(x) + \exp(x))}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} g(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{2 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))}{2} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3) \end{aligned}$$

Ici $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} O(x)$, donc $o(g(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - g(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + g(x) + g(x)^2 + g(x)^3 + o(g(x)^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{5x^3}{48} + o(x^3) \end{aligned}$$

Proposition 22.34 – Existence d'un développement limité pour le quotient

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I contenant 0 et admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. Si g possède une limite finie non nulle en 0, alors $\frac{f}{g}$ admet un DL à l'ordre n en 0.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et d'appliquer les résultats précédents. □

Exemple 22.35 – Chercher le DL de $\tan$ à l'ordre 3 en 0 :

on a

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)}$$

On pose $k(x) = \cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$ et comme $k(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x^2)$, on a $O(k(x)^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x^6) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^5)$. Il suffit de remarquer que

$$\frac{1}{1 - k(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + k(x) + k^2(x) + k^3(x) + o(k^3(x)) = 1 + k(x) + k^2(x) + O(k^3(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + k(x) + k^2(x) + o(x^5).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)^2 + o(x^5) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4\right) + \left(\frac{1}{4}x^4\right) + o(x^5) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5) \end{aligned}$$

et donc

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right)$$

Et après simplification, on obtient :

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

Méthode 22.36 – Développement limité d'un quotient de fonctions de limites nulles

Si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, il se peut que $\frac{f}{g}$ admette tout de même un DL en a (il faut bien sûr que f ait également une limite nulle en 0) : il faut passer par la forme factorisée (par le coefficient prépondérant) des DL de f et g pour le savoir.

On écrit un DL de f et de g à des ordres respectifs n_1 et n_2 sous forme factorisée :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^{p_1} (a_{p_1} + a_{p_1+1}x + \dots + a_{n_1}x^{n_1-p_1} + o(x^{n_1-p_1})) \quad \text{avec } a_{p_1} \neq 0$$

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^{p_2} (b_{p_2} + b_{p_2+1}x + \dots + b_{n_2}x^{n_2-p_2} + o(x^{n_2-p_2})) \quad \text{avec } b_{p_2} \neq 0.$$

Ainsi,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} x^{p_1-p_2} \underbrace{\left(\frac{a_{p_1} + a_{p_1+1}x + \dots + a_{n_1}x^{n_1-p_1} + o(x^{n_1-p_1})}{b_{p_2} + b_{p_2+1}x + \dots + b_{n_2}x^{n_2-p_2} + o(x^{n_2-p_2})} \right)}_{=h(x)}$$

Comme a_{p_1} et b_{p_2} sont non nuls, d'après ce qui précède, h possède un DL en 0 d'ordre $m = \min(n_1 - p_1, n_2 - p_2)$ dont le terme constant n'est pas nul.

• Si l'exposant $p_1 - p_2$ devant la fraction est strictement négatif, alors $\frac{f}{g}$ n'a pas de limite finie en 0 donc ne possède pas de développement limité en 0. Si cet exposant est positif ou nul, en développant la fonction h à l'ordre m , on obtient un développement limité du quotient $\frac{f}{g}$ à l'ordre $n = m + p_1 - p_2$.

• Si l'on a le choix des valeurs de n_1 et n_2 (par exemple si f et g possèdent un DL à tout ordre en 0), il faut prévoir ces valeurs en fonction de l'ordre n auquel on désire développer la fonction $\frac{f}{g}$.



Exemple 22.37 – Calculons le DL en 0 de $x \mapsto \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 3 en 0. Pré-étude : Le numérateur commence par de l'ordre 2 et le dénominateur par de l'ordre 1. On va donc perdre un ordre en haut et en bas par simplification, mais on va en gagner un sur le dénominateur par optimisation de produits.
Pour x au voisinage de 0, on a :

$$e^x - 1 - x \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

donc

$$\frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)}$$

On s'intéresse au dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 + o\left(\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} + o(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{12} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \end{aligned}$$

IV – Applications des développements limités

1 – Propriétés locales d'une fonction possédant un développement limité

Proposition 22.38 – Développement limité et prolongement de fonction

Soit f une fonction définie sur D et $x_0 \in \mathbb{R}$ une extrémité de D qui n'appartient pas à D .

1. Si f possède un DL à l'ordre 0 en x_0 alors f possède une limite en x_0 . Plus précisément, si $f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + o(1)$, alors $\lim_{x_0} f = a_0$ et on peut prolonger f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = a_0$.
2. Si de plus, f possède un DL à l'ordre 1 en x_0 qui est $f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 h + o(h)$, alors le prolongement par conti-

nuité $\tilde{f}: D \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et $\tilde{f}'(x_0) = a_1$.

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ a_0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Exemple 22.39 – Soit $f: \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}.$$

Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0.

Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\tan(x) - \sin(x)}{\tan(x) \sin(x)} \\
 &= \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))}{(x + o(x))(x + o(x))} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}x + o(x)}{1 + o(1)} \\
 &= \frac{1}{2}(x + o(x))o(x) \\
 &= \frac{1}{2}x + o(x)
 \end{aligned}$$

f possède un développement limité à l'ordre 1 en 0, donc peut se prolonger par continuité en posant $f(0) = 0$ et ce prolongement est dérivable, avec $f'(0) = \frac{1}{2}$.

2 – Recherche d'équivalents et calcul de limites

Proposition 22.40 – Équivalence au premier terme non-nul

Si f admet un DL en x_0 de la forme

$$f(x_0 + h) = a_p h^p + a_{p+1} h^{p+1} + a_n h^n + o(h^n)$$

Avec $a_p \neq 0$, alors

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_p h^p \quad \text{et donc} \quad f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a_p (x - x_0)^p$$

Exemple 22.41 –

1. Chercher un équivalent en 0 de $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1$ et en déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1}{x^2}$

On a

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad \sqrt{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

donc

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$$

d'où

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

et donc

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{8}x^2.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1}{x^2} = \frac{1}{8}.$$

2. Déterminer un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $f : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x(x+1)}{1+x^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u = \frac{1}{x}$ et

$$g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right) = e^u - \frac{1+u}{1+u^2}$$

et

$$e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$$

$$\frac{1+u}{1+u^2} \underset{u \rightarrow 0}{=} (1+u)(1-u^2 + o(u^2)) = 1 + u - u^2 + o(u^2).$$

On a donc

$$g(u) = e^u - \frac{1+u}{1+u^2} = \frac{3}{2}u^2 + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u^2) \underset{0^+}{\sim} \frac{3}{2}u^2$$

et ainsi

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2x^2}.$$

3 – Recherche de tangente et position de la courbe par rapport à sa tangente

Si une fonction f possède un DL à l'ordre 1 au voisinage de x_0 , celui-ci détermine une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. Plus précisément, si

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h) \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \underset{x \rightarrow x_0}{o}(x - x_0)$$

alors une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en M_0 est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.

Si on a un DL de f en x_0 à un ordre supérieur, le premier terme non nul de degré supérieur ou égal à 2 donne la position de la tangente par rapport à $\mathcal{C}_f$. Plus précisément, si

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_n h^n + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^n) \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_n(x - x_0)^n + \underset{x \rightarrow x_0}{o}((x - x_0)^n)$$

avec $n \geq 2$ et $a_n \neq 0$, alors $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a_n(x - x_0)^n$ et donc $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0))$ est localement du signe de $a_n(x - x_0)^n$. Si n est pair, la courbe est au-dessus ou en-dessous de sa tangente suivant le signe de a_n . Si n est impair, la courbe traverse la tangente.

Exemple 22.42 – Déterminer la tangente en 0 de la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$ ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Tout d'abord $f(x) = \ln(2) + \ln(1 + x + \frac{1}{2}x^2)$. On pose $k(x) = x + \frac{1}{2}x^2$. Comme $k(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ on a $o(k(x)^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3)$ et l'on cherche un DL de $\ln$ à l'ordre 3 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + (x + \frac{1}{2}x^2) - \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}x^2)^2 + \frac{1}{3}(x + \frac{1}{2}x^2)^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(x^2 + x^3) + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

$y = \ln(2) + x$ et comme

$$f(x) - (\ln(2) + x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{6}x^3$$

cette différence est positive à gauche de 0 et négative à droite de 0 ce qui se traduit par le fait que la courbe est au dessus de sa tangente à gauche de 0 et en dessous à droite de 0.

4 – Recherche d'asymptote et position de la courbe par rapport à son asymptote

Pour trouver les asymptotes au graphe d'une fonction $f : x \mapsto f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, on pose $h = \frac{1}{x}$ pour se ramener à une variable h qu'on fait tendre vers 0.

Exemple 22.43 – Trouver les asymptotes à la courbe représentative de la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

et les placer par rapport à cette courbe.

Pour $x \neq 0$, on pose $h = \frac{1}{x}$ et $f(x) = \sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} + 1} = \frac{1}{|h|} \sqrt{1 + h + h^2}$. On note $F(h) = \frac{1}{|h|} \sqrt{1 + h + h^2}$.

▷ Quand x tend vers $+\infty$, h tend vers 0 et $h > 0$;

$$\begin{aligned} F(h) &= \frac{1}{h} \sqrt{1 + h + h^2} \\ &= \frac{1}{h} \left(1 + \frac{1}{2}(h + h^2) - \frac{1}{8}(h + h^2)^2 + o(h + h^2) \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(1 + \frac{1}{2}h + \frac{3}{8}h^2 + o(h^2) \right) \\ &= \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}h + o(h) \end{aligned}$$

On a donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe représentative de f présente en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ puisque

$$f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{8x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus comme cette différence est positive au voisinage de $+\infty$, on en déduit que la courbe est au dessus de son asymptote.

▷ Quand x tend vers $-\infty$, h tend vers 0 et $h < 0$, on a donc

$$f(x) = -\frac{1}{h} \sqrt{1 + h + h^2} \underset{x \rightarrow -\infty}{=} -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe représentative de f présente en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ puisque

$$f(x) - \left(-x - \frac{1}{2}\right) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -\frac{3}{8x} \underset{x \rightarrow -\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus comme cette différence est positive au voisinage de $-\infty$, on en déduit que la courbe est au dessus de son asymptote.

5 – Recherche d'extrema

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un élément de I qui n'en est pas une extrémité. On sait qu'une condition nécessaire pour que f ait un extremum local en x_0 est que $f'(x_0) = 0$. En un tel point où $f'(x_0) = 0$, pour savoir si $f(x_0)$ est bien un extremum de f , on écrit un DL de f en x_0 à un ordre suffisant pour pouvoir trouver un équivalent de $f(x_0 + h) - f(x_0)$ lorsque h tend vers 0.

Proposition 22.44

- ▷ Si $f(x_0 + h) - f(x_0) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_p h^p$ où p est un nombre pair, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f (maximum si $a_p < 0$ et minimum si $a_p > 0$).
- ▷ Si $f(x_0 + h) - f(x_0) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_q h^p$ où q est un nombre impair, alors $f(x_0)$ n'est pas un extremum local de f .

Exemple 22.45 – La fonction $f : x \mapsto 2 + (\sin(x) - \operatorname{sh}(x)) \operatorname{Arctan}(x)$ admet-elle un extremum en 0 ?

Pour tout x réel,

$$\sin(x) - \operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

$$\text{Donc } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + \left(-\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)(x + o(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

$$\text{Donc } f'(0) = 0 \text{ et } f(x) - f(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^4}{3}. f \text{ admet donc un maximum local en } 0$$

V – Exemples de développements asymptotiques

1 – Suites récurrentes

Dans l'exemple qui suit, les termes du développement asymptotique sont obtenus les uns après les autres du plus grand au plus petit selon un principe de « boucle ». À chaque fois qu'on vient d'obtenir un terme d'une certaine précision, on réinjecte le tout dans la relation de récurrence et on obtient ainsi un nouveau terme. On peut sur le papier obtenir de cette manière des précisions aussi fines que voulu, mais plus on avance, plus les réinjections sont calculatoires.

Exemple 22.46 – On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.

$$\text{Alors : } u_n = n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démonstration. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$: $\sqrt{x + n^2} \geq 0$ et $u_0 \geq 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors bien définie par une récurrence facile.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sqrt{u_{n-1} + (n-1)^2} \geq n-1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ par minoration.
- Montrons ensuite par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq n$.

Initialisation : Évidente.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $u_n \leq n$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2} \stackrel{\text{HDR}}{\leq} \sqrt{n^2 + n} \leq \sqrt{n^2 + 2n + 1} = n+1$.

- À ce stade, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n-1 \leq u_n \leq n$, donc $1 - \frac{1}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$ par encadrement, ou encore $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$. On a même obtenu mieux : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + O(1)$.
- Ensuite : $u_{n+1} - n = \sqrt{u_n + n^2} - n = n \left(\sqrt{1 + \frac{u_n}{n^2}} - 1 \right)$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2} = 0$, donc :

$$u_{n+1} - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \frac{u_n}{2n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}, \text{ et donc } u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \frac{1}{2} + o(1).$$

$$\text{Conclusion : } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (n-1) + \frac{1}{2} + o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \frac{1}{2} + o(1).$$

- On poursuit sur cette lancée avec un développement limité plus fin de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2} &= n \sqrt{1 + \frac{u_n}{n^2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (n-1) + \frac{1}{2} - \frac{3}{8(n-1)} + o\left(\frac{1}{n-1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

□

2 – Solutions d'équations définies implicitement

Exemple 22.47 – Pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation $e^{-\varepsilon x} = x$ d'inconnue x possède une et une seule solution x_ε dans $\mathbb{R}_+$. Alors :

$$x_\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} 1 - \varepsilon + \frac{3\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2).$$

Démonstration.

- Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $x \mapsto e^{-\varepsilon x} - x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ par somme, de valeur 1 en 0 et de limite $-\infty$ en $+\infty$. D'après le TVI strictement monotone, 0 possède un unique antécédent x_ε par cette fonction.
- Pour tout $\varepsilon > 0$: $x_\varepsilon \geq 0$, donc $0 \leq x_\varepsilon = e^{-\varepsilon x_\varepsilon} \leq 1$, donc en retour $e^{-\varepsilon} \leq x_\varepsilon \leq 1$. Ainsi, par encadrement : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = 1$, ou encore $x_\varepsilon = 1 + o(1)$.
- On poursuit : $x_\varepsilon = e^{-\varepsilon x_\varepsilon} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} e^{-\varepsilon + o(\varepsilon)} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} 1 - \varepsilon + o(\varepsilon)$.
- Enfin : $x_\varepsilon = e^{-\varepsilon x_\varepsilon} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} e^{-\varepsilon + \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} 1 + (-\varepsilon + \varepsilon^2) + \frac{1}{2}(-\varepsilon)^2 + o(\varepsilon^2) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} 1 - \varepsilon + \frac{3\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$.

□

Exemple 22.48 –

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan x = \sqrt{x}$ d'inconnue $x \in \left] n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2} \right[$ admet une unique solution x_n . En outre : $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

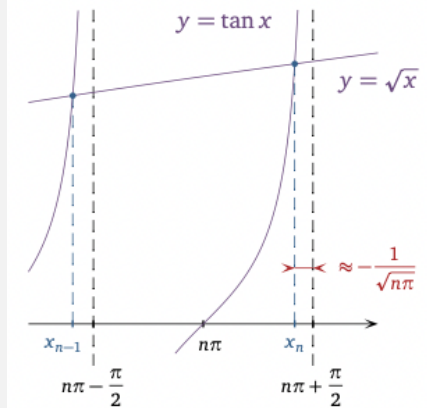
Démonstration

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto \tan x - \sqrt{x}$ est dérivable sur $\left] n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2} \right[$ de dérivée $x \mapsto 1 + \tan^2 x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ strictement positive, car pour tout $x \in \left] n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2} \right[$:

$$x > \frac{\pi}{2} > \frac{1}{4}, \quad \text{donc } 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0.$$

D'après le TVI strictement monotone, après un calcul de limites aux bornes, f s'annule une et une seule fois sur $\left] n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2} \right[$, disons en x_n .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n\pi - \frac{\pi}{2} \leq x_n \leq n\pi + \frac{\pi}{2}$, donc $1 - \frac{1}{2n} \leq \frac{x_n}{n\pi} \leq 1 + \frac{1}{2n}$, et enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$ par encadrement. Conclusion : $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$. En particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\tan(x_n - n\pi) = \tan x_n = \sqrt{x_n}$ avec $x_n - n\pi \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, donc par définition d'arctangente : $x_n - n\pi = \text{Arctan} \sqrt{x_n}$. Enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, donc $x_n - n\pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$. Conclusion : $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.
- Pour finir, rappelons que pour tout $x > 0$: $\text{Arctan } x + \text{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
Il en découle que : $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = \text{Arctan} \sqrt{x_n} - \frac{\pi}{2} = -\text{Arctan} \frac{1}{\sqrt{x_n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{x_n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$. Comme voulu :
$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$



3 – La formule de Stirling

La formule de Stirling est au programme de MPSI : il faut donc la connaître! La démonstration, quant à elle, n'est pas exigible.

Théorème 22.49 – Formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \ln \left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^n} \right)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln \left(\frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1)! e^{n+1}} \right) - \ln \left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^n} \right) = \ln \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2} \quad \text{après calcul.} \end{aligned}$$

En particulier, $u_{n+1} - u_n$ est positif à partir d'un certain rang, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang.

- D'après l'équivalent obtenu ci-dessus, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 12n^2(u_{n+1} - u_n) = 1$ donc à partir d'un certain rang $N \geq 2$, on a : $n^2(u_{n+1} - u_n) \leq 1$, i.e. $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n^2}$. Dès lors, pour tout $n \geq N$:

$$u_n - u_N = \sum_{k=N}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \leq \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=N}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} = \int_{N-1}^{n-1} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{N-1} - \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{N-1} \leq 1$$

Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée.

- Finalement, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge d'après le théorème de la limite monotone, donc $(e^{-u_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ aussi. Notons ℓ la limite de $(e^{-u_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-u_n} = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. Nous venons d'établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \ell$, i.e. que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \ell \sqrt{n}$.

Il reste à montrer que $\ell = \sqrt{2\pi}$.

- On introduit pour cela les intégrales de Wallis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \sin^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) (1 - \cos^2(t)) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \cos^2(t) dt = W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin^n(t) \cos(t) dt \\ &= W_n - \left[\frac{\sin^{n+1}(t)}{n+1} \cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t) \sin(t) dt = W_n - \frac{1}{n+2} W_{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

- On a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times W_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{1} \times W_1 = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

- Par ailleurs, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin(t) \in [0, 1]$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$. On en déduit, par croissance de l'intégrale, $W_{n+1} \leq W_n$. Et en particulier, $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$.

En divisant par $W_{n+2} > 0$, on obtient $\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$. En utilisant la relation de récurrence obtenue entre W_{n+2} et W_n , cela donne

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

Et donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ et en particulier, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{W_{2p+1}}{W_{2p}} = 1$

- Pour finir, remarquons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{W_{2p+1}}{W_{2p}} &= \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \times \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!} = \frac{(2^p p!)^4}{(2p+1)((2p)!)^2} \times \frac{2}{\pi} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{4p} \times p^2 \times \ell^4 \times \left(\frac{p}{e}\right)^{4p}}{\left(\frac{2p}{e}\right)^{4p} \times \ell^2 \times (2p) \times (2p+1)} \times \frac{2}{\pi} \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{4p} \times p^2 \times \ell^4 \times \left(\frac{p}{e}\right)^{4p}}{2^{4p} \left(\frac{p}{e}\right)^{4p} \times \ell^2 \times 4p^2} \times \frac{2}{\pi} \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell^2}{2\pi} \end{aligned}$$

Par unicité de la limite, $\frac{\ell^2}{2\pi} = 1$ i.e. $\ell = \sqrt{2\pi}$.

□

Remarque 22.50 – C'est Abraham de Moivre qui a initialement démontré la formule suivante :

$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

où C est une constante réelle (non nulle).

L'apport de Stirling fut d'attribuer la valeur $C = \sqrt{2\pi}$ à la constante et de donner un développement de $\ln(n!)$ à tout ordre. Pour la culture, on a le développement plus précis :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \frac{163879}{209018880n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right) \right]$$