

# 21 | Relations de comparaison

There's no sense in being precise when you don't even know what you're talking about.

John Von Neumann, 1903-1957

Dans ce chapitre,  $D$  est une partie de  $\mathbb{R}$  qui est de la forme  $D = I$  ou  $D = I \setminus \{\alpha\}$  avec  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points et  $\alpha \in I$ .

Si  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , on appellera voisinage de  $x_0$  et on notera  $V_{x_0}$  tout intervalle ouvert contenant  $x_0$ .

Par exemple, si  $x_0 \in \mathbb{R}$ , tout intervalle de la forme  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ , avec  $\varepsilon > 0$ , est un voisinage de  $x_0$ .

## I – Fonction dominée ou négligeable devant une autre fonction

### 1 – Négligeabilité

**Définition 21.1** – Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , et  $f, g$  deux fonctions définies sur un voisinage  $V_a$  de  $a$ . On dit que  $f$  est **négligeable devant**  $g$  au voisinage de  $a$  lorsqu'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $V_a$  telle que

$$\forall x \in V_a, \quad f(x) = g(x)\varepsilon(x) \quad \text{et que} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  ou  $f \underset{a}{=} o(g)$  et on lit «  $f$  est un petit  $o$  de  $g$  au voisinage de  $a$  ».

#### Remarque 21.2 –

- **ON PENSERA EN PRATIQUE LA NÉGLIGEABILITÉ DES FONCTIONS EN TERMES DE QUOTIENTS**, même si la définition à l'aide d'une fonction  $\varepsilon$  est un peu plus générale. Les preuves de ce chapitre sont d'ailleurs rédigées à l'aide de quotient par souci de clarté.
- Les petits  $o$  sont la formalisation définitive des « croissances comparées ». Certains infinis sont plus « grands » que d'autres, certains zéros sont plus « petits » que d'autres. Par exemple,  $x^2 \underset{+\infty}{=} o(x^4)$  (puisque  $\frac{x^2}{x^4} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ ) est une manière de dire que  $x^4$  est « immensément plus grand » que  $x^2$  en  $+\infty$ . À l'inverse, dire que  $x^4 \underset{0}{=} o(x^2)$ , c'est affirmer « l'infinie petitesse » de  $x^4$  par rapport à  $x^2$  lorsque  $x$  est petit.

#### Exemple 21.3 –

- $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$  car pour  $x$  non-nul,  $\frac{x^2}{x} = x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .
- $x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^2)$  car pour  $x$  non-nul,  $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .
- $\frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$  car pour  $x$  non nul,  $\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .
- $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  car pour  $x$  non nul,  $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .
- Pour  $x$  non-nul,  $x \sin(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^2)$  car  $\frac{x \sin(x)}{x^2} = \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .



**ATTENTION !** On désigne par le symbole  $o(g)$  n'importe quelle fonction  $f$  qui est négligeable devant  $g$ . C'est une notation ! Ainsi, si on a  $f \underset{a}{=} o(g)$  et  $h \underset{a}{=} o(h)$ , on ne peut pas en déduire que  $f = h$  !

**Remarque 21.4** – L'écriture  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(h(x))$  signifie que  $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$ .

**Exemple 21.5 –**

- On a  $\frac{1}{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ .

En effet,  $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} \times \frac{-1}{x+1}$ , et  $\frac{\frac{-1}{x(x+1)}}{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ .

- On a  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$  car pour  $x$  non-nul,  $\frac{e^x - 1 - x}{x} = \frac{e^x - 1}{x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$  (par la dérivabilité de  $\exp$  en 0) donc  $e^x - 1 - x \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$ .

- On a  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$  car pour  $x$  non-nul,  $\frac{\sin(x) - x}{x} = \frac{\sin(x)}{x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$  (par le cours de trigo) donc  $\sin(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$ .

**Remarque 21.6 –** L'affirmation  $\sin(x) = x + o(x)$  permet de donner un sens précis à l'affirmation «  $\sin(x) \approx x$  pour  $x$  proche de 0 » (que l'on utilise souvent en physique, pour approximer l'équation du pendule par exemple). Cette approximation n'a de sens que si l'on peut mesurer l'erreur commise. En l'occurrence, ici,  $\sin(x) \approx x$  à **UN**  $o(x)$  **PRÈS**. Un peu comme lorsque l'on dit que  $\pi \approx 3,14$  à  $10^{-2}$  près.

Imaginez justement qu'on vous dise : «  $\pi$  est égal à  $3,14012$  à  $10^{-2}$  près », vous répondrez naturellement : « Pourquoi pas seulement  $3,14$  puisqu'on raisonne à  $10^{-2}$  près ? » Et vous aurez raison, raisonner à  $10^{-2}$  près, c'est négliger tout ce qui est plus petit que  $10^{-2}$ . Ainsi l'approximation  $\pi \approx 3,14$  à  $10^{-2}$  près est aussi précise que l'approximation  $\pi \approx 3,141592$  à  $10^{-2}$  près, quand bien même on écrit deux décimales correctes dans un cas et six dans l'autre.

Il se passe la même chose avec les petits  $o$ . Le terme  $x^2$  est inutile dans la relation :  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x)$  parce que  $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$ , nous pouvons donc le supprimer :  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ . Cette nouvelle proposition n'est ni plus ni moins précise que la précédente mais elle est plus lisible et plus économe.

Tout petit  $o$  est un **NIVEAU DE PRÉCISION**, un **SEUIL DE VISIBILITÉ**.  
De vous-mêmes, À CHAQUE INSTANT, faites le ménage et supprimez tout ce qui est inutile.

## 2 – Opérations sur les petits $o$

Les résultats de ce paragraphe sont importants, mais les exemples qui les suivent sont beaucoup plus utiles et éclairants que les énoncés théoriques.

### Théorème 21.7 – Les petit $o$ absorbent les constantes multiplicatives

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Si  $f \underset{a}{=} o(g)$  alors :  $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$  et  $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$ .

*Démonstration.* Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , alors :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\lambda g(x)} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\lambda f(x)}{g(x)} = 0$ . □

**Exemple 21.8 –** On verra (exemple 21.16) que  $e^{1/x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ . Alors,

$$2e^{1/x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 2 + \frac{2}{x} + 2o\left(\frac{1}{x}\right) = 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

### Théorème 21.9 – La somme de deux petits $o$ est un petit $o$

Si  $f \underset{a}{=} o(h)$  et  $g \underset{a}{=} o(h)$ , alors  $f + g \underset{a}{=} o(h)$ .

*Démonstration.* Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$  alors par somme :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x)}{h(x)} = 0$ . □

**Exemple 21.10** – On a vu que  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$  et  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ , alors

$$e^x + \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (1 + x + o(x)) + (x + o(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + \underbrace{o(x) + o(x)}_{x \rightarrow 0} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + o(x).$$

### Théorème 21.11 – Un petit $o$ d'un petit $o$ est un petit $o$

La relation « être négligeable » est transitive.

Si  $f \underset{a}{=} o(g)$  et  $g \underset{a}{=} o(h)$  alors  $f \underset{a}{=} o(h)$ .

*Démonstration.* Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$ , alors par produit :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$ . □

**Exemple 21.12** – On verra (exemple 21.16) que  $e^{1/x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ , alors comme  $\frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$ ,

$$e^{1/x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

### Théorème 21.13 – Avec le produit, tout va bien

Si  $f \underset{a}{=} o(g)$  et  $h \underset{a}{=} o(k)$ , alors  $fh \underset{a}{=} o(gk)$ .

De plus, si  $f \underset{a}{=} o(g)$ , alors  $fh \underset{a}{=} o(gh)$ .

**Exemple 21.14** – On a vu que  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$  et  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ , alors

$$\begin{aligned} e^x \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} (1 + x + o(x)) \times (x + o(x)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + x^2 + \underbrace{2xo(x) + o(x) \times o(x)}_{3o(x^2)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + \underbrace{x^2 + o(x^2)}_{o(x) + o(o(x))} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x). \end{aligned}$$

### Théorème 21.15 – Changement de variable pour les petit $o$

Si  $f(y) \underset{y \rightarrow b}{=} o(g(y))$  et  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ , alors  $f(h(x)) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(h(x)))$ .

**Exemple 21.16** – Montrons que  $e^{\frac{1}{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$  et que  $e^{\frac{1}{x^2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .

On a vu que  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ . Comme  $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , on peut en déduire que

$$e^{\frac{1}{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

De plus,  $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , donc par composition  $e^{\frac{1}{x^2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

### 3 – Domination

**Définition 21.17** – On dit que  $f$  est **dominée par**  $g$  au voisinage de  $a$  lorsqu'il existe une constante  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\forall x \in V_a, \quad |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

On note alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$  ou  $f \underset{a}{=} O(g)$  et on lit «  $f$  est un grand  $O$  de  $g$  au voisinage de  $a$  ».

On retiendra en particulier que :  $O(1)$  = « une fonction bornée au voisinage de  $a$  ».

Dans le cas où  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  - sauf éventuellement en  $a$  avec dans ce cas  $f(a) = 0$  - il est équivalent d'exiger que la fonction  $\frac{f}{g}$  soit bornée au voisinage de  $a$ .

**Exemple 21.18** –

- $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(1)$  car pour tout  $x$  non nul,  $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ .

- $\frac{\sin(x)}{x - \sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Pour  $x > 1$ , on a  $x - \sqrt{x} > 0$ , et  $x - \sqrt{x} < x$ . D'où

$$\frac{\sin(x)}{x - \sqrt{x}} \leq \frac{1}{x - \sqrt{x}} \leq \frac{1}{x}$$

- $x \cos(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x)$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x \cos(x)| = |x| \cdot |\cos(x)| \leq |\cos(x)|$ .

- $\lfloor e^x \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(e^x)$ .

Pour tout  $X \in \mathbb{R}$ ,  $\lfloor X \rfloor \leq X$ . En particulier, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lfloor e^x \rfloor \leq e^x$ .

**Théorème 21.19 – Lien grand  $O$ /petit  $o$**

Si  $f \underset{a}{=} o(g)$  alors  $f \underset{a}{=} O(g)$ .

*Démonstration.* Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  alors la fonction  $\frac{f}{g}$  est bien bornée au voisinage de  $a$ . □



**ATTENTION !** La domination n'implique pas la négligeabilité, c'est le contraire qui est vrai !  
Par exemple,  $2x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x^2)$ , mais  $2x^2 \not\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^2)$ .

**Exemple 21.20** –

- Puisque  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$  alors  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + O(x)$ .

Ce résultat est plus fin que le simple fait de dire  $e^x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$  mais plus grossier que  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ .

- Puisque  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$  alors  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)$ .

Ce résultat est plus fin que le simple fait de dire  $\sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  mais plus grossier que  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ .

Enfin, les théorèmes du paragraphe « Opérations sur les petits  $o$  » sont tous vrais avec des grands  $O$  à la place des petits  $o$ .

## 4 – Comparaison des fonctions de référence

A l'aide des croissances comparées, on obtient les comparaisons suivantes.

### Théorème 21.21 – Croissances comparées

Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  trois réels **strictement positifs**.

$$(\ln(x))^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta) \quad x^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\gamma x}) \quad (|\ln(x)|)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

### Proposition 21.22 – Comparaisons des puissances

Si  $m$  et  $n$  sont deux réels tels que  $m < n$ , alors

$$x^m \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^n) \quad \text{et} \quad x^n \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^m)$$

### Exemple 21.23 –

$$3x^5 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3) \quad 157x^3 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^5) \quad \frac{1}{x^{1/4}} \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right) \quad \frac{23}{x^3} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

## II – Fonctions équivalentes

### 1 – Définitions et exemples

**Définition 21.24** – Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un voisinage  $V_a$  de  $a$ . On dit que  $f$  et  $g$  sont **équivalentes au voisinage de  $a$**  lorsqu'il existe une fonction  $\varphi$  définie sur  $V_a$  telle que

$$\forall x \in V_a, \quad f(x) = g(x)\varphi(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1.$$

On écrit alors :  $f \underset{a}{\sim} g$  ou  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et on lit «  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$  ».

Comme dans le cas des petits  $o$ , **ON PENSERA EN PRATIQUE L'ÉQUIVALENCE EN TERMES DE QUOTIENTS** même si la définition à l'aide de la fonction  $\varphi$  est un peu plus générale. Les preuves sont d'ailleurs à nouveau rédigées à l'aide de quotient pour plus de clarté.

### Exemple 21.25 –

- $x^2 + x + 5 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} = 1$ .
- $x + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x = 1$ .
- $\frac{1}{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ . En effet,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$
- On a  $\ln(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x$ . En effet, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \frac{\ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

## 2 – Propriétés des équivalents

### Proposition 21.26 – Propriétés de la relation $\sim$

Soient  $f, g, h$  des fonctions définies sur  $D$  et  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  un point ou une extrémité de  $D$ .

1. **Symétrie** : Si  $f \sim_a g$ , alors  $g \sim_a f$ . On peut donc dire que  $f$  et  $g$  sont équivalents.
2. **Transitivité** : Si  $f \sim_a g$  et  $g \sim_a h$ , alors  $f \sim_a h$ .

*Démonstration.* Si  $f \sim_a g$ , alors  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$  donc  $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{1} = 1$ . D'où  $g \sim_a f$ .

Si  $f \sim_a g$  et  $g \sim_a h$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = 1$ , donc par produit,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} = 1 \times 1 = 1$  donc  $f \sim_a h$ .  $\square$

### Proposition 21.27 – Liens entre les différentes relations

Soient  $f, g, h$  des fonctions définies sur  $D$  et  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  un point ou une extrémité de  $D$ .

1. Si  $f \sim_a g$ , alors  $f = O(g)$ .
2.  $f \sim_a g \iff f - g = o(f) \iff f - g = o(g)$ .
3.  $f = o(g) \iff f + g \sim_a g$ .

*Démonstration.* 1. Si  $f \sim_a g$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  donc en particulier,  $\frac{f}{g}$  est bornée au voisinage de  $a$ .

$$2. f \sim_a g \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f - g}{g} = 0 \iff f - g = o(g)$$

$$3. f = o(g) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x)}{g(x)} = 1 \iff f + g \sim_a g$$

$\square$

La dernière équivalence est très utile pour trouver des équivalents de sommes.

### Exemple 21.28 – Donner des équivalents de :

1.  $\ln(x) + 2x$  au voisinage de  $+\infty$   
On a  $\ln(x) + 2x \underset{+\infty}{\sim} 2x$  car  $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(2x)$ .
2.  $\ln(x) + 2x$  au voisinage de 0  
On a  $\ln(x) + 2x \underset{0}{\sim} \ln(x)$  car  $2x \underset{0}{=} o(\ln(x))$ .
3.  $e^x + x^2$  au voisinage de  $+\infty$   
On a  $e^x + x^2 \underset{+\infty}{\sim} e^x$  car  $x^2 \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ .
4.  $e^x + x^2$  au voisinage de 0  
On a  $e^x + x^2 \underset{0}{\sim} e^x$  car  $x^2 \underset{0}{=} o(e^x)$ . En effet,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x} = 0$ .

### Proposition 21.29 – Équivalents et signe de la fonction

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , et  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un voisinage  $V_a$  de  $a$ .

- Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et si  $f$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  alors  $g$  non plus.
- Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et si  $f$  est positive au voisinage de  $a$ , alors  $g$  l'est également.

**Exemple 21.30** – La fonction  $f$  définie pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$  est positive pour  $x$  assez grand car elle est

équivalente à  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  au voisinage de  $+\infty$ .

### Proposition 21.31 – Produit et quotient d'équivalents

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f_1, f_2, g_1$  et  $g_2$  des fonctions définies sur un voisinage  $V_a$  de  $a$ .

- Si  $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f_2(x)$  et  $g_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x)$  alors  $(f_1 g_1)(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (f_2 g_2)(x)$ .
- Si de plus  $g_2$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  alors  $\frac{f_1}{g_1}(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{f_2}{g_2}(x)$ .



**ATTENTION !** Si les équivalents se comportent bien avec le produit, ils ne sont **PAS COMPATIBLES AVEC LA SOMME !**

**Exemple 21.32** – On gardera en tête le contre-exemple suivant. On définit les fonctions  $f, g, h$  et  $k$  sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 + x, g(x) = x^2, h(x) = k(x) = -x^2$ .

On a alors  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$  et  $h(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} k(x)$  mais  $f(x) + h(x) = x \not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x) + k(x) = 0$ .

### Proposition 21.33 – Équivalents et passage à la puissance

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , et  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un voisinage  $V_a$  de  $a$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  alors  $f^\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g^\alpha(x)$  dès que les puissances sont bien définies.

**Remarque 21.34** – Ce résultat est en particulier vrai pour toutes les fonctions si  $\alpha \in \mathbb{N}^*$  et pour toutes les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  si  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .

**Exemple 21.35** – Déterminons au voisinage de  $+\infty$  un équivalent de  $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + x}}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$ .

On a, d'une part,  $x^3 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3$  et donc par passage à la puissance  $\sqrt{x^3 + x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x^3}$ .

On a, d'autre part,  $x^2 + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$  et par passage à la puissance  $\sqrt[3]{x^2 + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{x^2}$ .

Ainsi par passage au quotient  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{5}{6}}$  or  $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$  et  $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$  donc  $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{\frac{5}{6}}$ . En conclusion,  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{\frac{5}{6}}$ .

### Proposition 21.36 – Équivalents et limites

Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , et  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un voisinage  $V_a$  de  $a$ .

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell$ .
- Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existe, alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe et ces deux limites sont égales.

**Exemple 21.37** – Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x) = x^2 - x - \sqrt{x}$ .

On a  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .



**ATTENTION !** Si les fonctions  $f$  et  $g$  tendent vers la même limite finie  $\ell$  non nulle alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  (car les deux fonctions sont équivalentes à  $\ell$  au voisinage de  $a$ ). En revanche, si  $\ell \in \{-\infty, 0, +\infty\}$ , on ne **PEUT RIEN CONCLURE !**

**Exemple 21.38** – On peut penser au contre-exemple  $f(x) = x$  et  $g(x) = x^2$  ou encore  $f(x) = \frac{1}{x}$  et  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ , au voisinage de  $+\infty$ .

### 3 – Obtention d'équivalents classiques

#### Proposition 21.39 – Équivalents des polynômes

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(a_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  une famille de réels avec  $a_n$  non-nul.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynomiale. Alors, en notant  $k$  le plus petit entier tel que  $a_k$  soit non-nul, on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} a_n x^n \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_k x^k \quad f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n$$

*Démonstration.* Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_k x^k$ .

Soit  $x \neq 0$ . Alors  $\frac{f(x)}{a_n x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_k}{a_n x^{n-k}}$ . Donc  $\frac{f(x)}{a_n x^n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$  et  $\frac{f(x)}{a_n x^n} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1$ .

On a aussi  $\frac{f(x)}{a_k x^k} = \frac{a_n x^{n-k}}{a_k} + \dots + \frac{a_{k+1} x}{a_k} + 1$ . D'où  $\frac{f(x)}{a_k x^k} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ . □

#### Exemple 21.40 –

- $2x^3 - 5x^2 + 2x - 3 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x^3$ .
- $x^5 - 2x^3 + 4x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 4x^2$ .
- $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3 \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} 2x^4$ .

#### Proposition 21.41 – Équivalent en un point de dérivabilité

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ . Si  $f$  est dérivable en  $a$  et si  $f'(a) \neq 0$ , alors

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a).$$

*Démonstration.* On suppose que  $f$  est dérivable en  $a$  et que  $f'(a) \neq 0$ . Alors,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)(x - a)} = 1,$$

ce qui prouve bien que  $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$ . □

**Équivalents classiques :** Grâce à cette dernière proposition, on obtient les équivalents classiques

$$\begin{array}{lll} \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \\ e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x & \end{array}$$

$\alpha$  étant une constante réelle **indépendante de  $x$** .

Un autre équivalent classique qui n'est pas une conséquence de cette proposition :

$$1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Cet équivalent découle de la limite classique  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ . On le retrouvera plus tard grâce au développement limité à l'ordre 2 de  $\cos$ .



## Équivalent par encadrement

### Proposition 21.42

Soient  $f, g$  et  $h$  trois fonctions définies sur  $D$  et  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  un point ou une extrémité de  $D$ .  
Si  $f \leq g \leq h$  au voisinage de  $a$  et si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ , alors  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$ .

*Démonstration.* Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$  alors il existe  $u_0$  définie sur  $D$  qui converge vers 1 en  $a$  telle qu'au voisinage de  $a$ , on ait  $f u_0 = h$ . On a donc, en se plaçant sur  $V$  un voisinage de  $a$  où  $u_0$  est strictement positive, pour tout  $x \in V$ .

$$f(x) \leq g(x) \leq f(x) u_0(x), \quad \frac{1}{u_0(x)} g(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

Ainsi,  $f$  et  $g$  ont les mêmes points d'annulation sur  $V$ .

On pose  $u$  qui vaut 1 là où  $f$  s'annule et qui coïncide avec  $u_0$  en dehors. On a  $f(x) \leq g(x) \leq f(x) u(x)$  pour  $x \in V$ .

On définit la fonction  $w$  sur  $D$  par  $w : D \rightarrow \mathbb{R}$   

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) = 0, \text{ auquel cas } g(x) = 0 \\ \frac{g(x)}{f(x)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout  $x$  au voisinage de  $a$ , on a  $g(x) = f(x) w(x)$  et

$$1 \leq |w(x)| \leq |u(x)|.$$

Par théorème des gendarmes, on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow a} w(x) = 1$  donc  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$  □

### Proposition 21.43 – Théorème des gendarmes pour les équivalents

Soient  $f, g, h$  et  $k$  quatre fonctions définies sur  $D$  et  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  un point ou une extrémité de  $D$ .  
Si  $f \leq g \leq h$  au voisinage de  $a$  et si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} k(x)$  et  $h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} k(x)$ , alors  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} k(x)$ .

*Démonstration.* Preuve similaire à celle de la proposition 21.42. □

**Exemple 21.44** – Donner un équivalent en  $+\infty$  de  $x + \sin(x)$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$x - 1 \leq x + \sin(x) \leq x + 1,$$

et  $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x - 1$ , donc d'après le théorème précédent,  $x + \sin(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ .

## Équivalent d'un logarithme

### Méthode 21.45 – Obtention d'un équivalent d'un logarithme

Soit  $u$  une fonction strictement positive définie sur  $D$ . Soit  $a$  un point ou une extrémité de  $D$ .

▷ Si  $u$  possède une limite finie  $\ell$  strictement positive et différente de 1, alors  $\ln(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(\ell)$ .  
(D'après la composition des limites)

▷ Si  $u$  tend vers 1 en  $a$  alors  $\ln(u(x)) = \ln(1 + \underbrace{u(x) - 1}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} 0}) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x) - 1$  (Calcul à refaire systématiquement)

▷ Si  $u$  tend vers 0 ou  $+\infty$  : on cherche un équivalent  $v(x)$  de  $u(x)$  en  $a$ , puis on effectue le calcul suivant :

$$\frac{\ln(v(x))}{\ln(u(x))} - 1 = \frac{\ln(v(x)) - \ln(u(x))}{\ln(u(x))} = \frac{\ln\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right)}{\ln(u(x))} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

puisque le dénominateur tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  et que le numérateur tend vers 0 (car  $\frac{v(x)}{u(x)}$  tend vers 1) quand  $x$  tend vers  $a$ . On en déduit que  $\ln(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(v(x))$ .



**Exemple 21.46** – Déterminer un équivalent en  $+\infty$  de  $x \mapsto \ln\left(x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ .

Remarquons que l'expression est bien définie si  $x > \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$  et  $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ , donc  $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ .

D'où  $x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ .

Pour tout  $x$  au voisinage de  $+\infty$ ,

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} - 1 = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln\left(x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\ln\left(x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} = \frac{\ln\left(\frac{\frac{1}{x}}{x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right)}{\ln\left(x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}.$$

D'après l'équivalent obtenu avant,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)} = 1$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\frac{1}{x}}{x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right) = 0$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\infty$ .

Finalement,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} - 1 = 0$ , donc  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ .

### III – Relations de comparaison pour les suites

Les relations  $o$ ,  $O$  et  $\sim$  que nous venons de voir pour les fonctions peuvent aussi être utilisées pour les suites, avec des définitions similaires. C'est l'objet de cette section. Les preuves étant similaires aux précédentes, nous les éluderons.

#### 1 – Domination et négligeabilité

##### Définition et exemples

**Définition 21.47** – Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites à valeurs réelles ou complexes. On dit que :

- la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **dominée** par la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall n \geq n_0$ ,  $|u_n| \leq M|v_n|$ , ou encore, si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne s'annule pas au delà du rang  $n_1$ , tel que  $\forall n \geq n_1$ ,  $\left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M$ . On note alors  $u_n = O(v_n)$ , on lit «  $u_n$  est un grand  $O$  de  $v_n$  ».
- la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **négligeable** devant la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers 0 et un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que  $\forall n \geq n_0$ ,  $u_n = v_n \varepsilon_n$ . On note alors  $u_n = o(v_n)$ , on lit «  $u_n$  est un petit  $o$  de  $v_n$  ».

Si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne s'annule pas au-delà du rang  $n_1$ , cela revient au même de dire que  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_1}$  converge vers 0.

**Exemple 21.48** –

- On a  $n^{3/2} \cos(1/n) = O(n^{3/2})$  car pour tout  $n \geq 1$ ,  $\left|\frac{n^{3/2} \cos(1/n)}{n^{3/2}}\right| = |\cos(1/n)| \leq 1$ .
- On a  $n^{3/2} \cos(1/n) = o(n^2)$  car pour tout  $n \geq 1$ ,  $\frac{n^{3/2} \cos(1/n)}{n^2} = \frac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}} = 0$  puisque  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

## Suites de référence

### Proposition 21.49 – Comparaisons de référence

1. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |v_n| = +\infty$ , alors  $u_n = o(v_n)$ .
2. Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Si  $\alpha < \beta$  alors  $n^\alpha = o(n^\beta)$ .
3. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Si  $0 < a < b$ , alors  $a^n = o(b^n)$ .
4. Pour tous réels  $\alpha > 0, \beta > 0$  et  $a > 1$ ,

$$(\ln n)^\alpha = o(n^\beta), \quad n^\beta = o(a^n) \quad \text{et} \quad a^n = o(n!).$$

5. Pour tous réels  $\alpha > 0, \beta > 0$  et  $a \in ]0, 1[$ ,

$$\frac{1}{n!} = o(a^n), \quad a^n = o\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^\beta} = o\left(\frac{1}{(\ln n)^\alpha}\right).$$

*Démonstration.* Tout cela découle des résultats classiques des croissances comparées. □

### Exemple 21.50 –

$$(-1)^n = o(n), \quad n^2 = o(n^4), \quad \frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (\ln(n))^3 = o(n), \quad n^3 = o(e^n)$$

## Propriétés des $o$ et $O$

### Proposition 21.51

Les règles de calcul avec les suites sont les mêmes qu'avec les fonctions. Voir Propositions du paragraphe « Opérations sur les petit  $o$  ».

### Exemple 21.52 –

- $\ln(n) = o(n)$  donc  $\ln(n) = O(n)$ . Comme  $n \sin(1/n) = O(n)$ , on peut écrire :  $n \sin(1/n) + \ln(n) = O(n)$ .
- $n \sin(1/n) = O(n)$  et  $\ln(n) = o(n)$  donc  $n \ln(n) \sin(1/n) = o(n^2)$ .

### Proposition 21.53 – Composition par une suite

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $D$  et  $a$  un point ou une extrémité de  $D$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $D$  qui tend vers  $a$ .

1. Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ , alors  $f(u_n) = o(g(u_n))$ .
2. Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ , alors  $f(u_n) = O(g(u_n))$ .

## 2 – Suites équivalentes

### Définition et propriétés

**Définition 21.54** – Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites à valeurs réelles ou complexes.

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **équivalente** à  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers 1 et un rang  $n_0$  tels que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n = v_n a_n$ . On note alors  $u_n \sim v_n$ , on lit «  $u_n$  est équivalente à  $v_n$  ».

Si la suite  $(v_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang  $n_1$ , cela revient au même de dire que la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_1}$  converge vers 1.

**Exemple 21.55 –**

On a  $n + \ln(n) \sim n$  car pour tout  $n \geq 1$ ,  $\frac{n + \ln(n)}{n} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

**Proposition 21.56 – Lien entre  $\sim$  et  $o$** 

Sous les hypothèses de la définition précédente,  $u_n \sim v_n$  si, et seulement si,  $u_n - v_n = o(v_n)$ .

**Exemple 21.57 –**  $\ln(n) = o(n)$  donc  $n + \ln(n) \sim n$ .

**Remarque 21.58 –** L'écriture  $u_n = v_n + o(w_n)$  signifie que  $u_n - v_n = o(w_n)$ .

**Proposition 21.59 – Propriétés de la relation  $\sim$** 

Les règles de calcul avec les suites sont les mêmes qu'avec les fonctions. Voir Propositions du paragraphe « Propriétés des équivalents ».



**ATTENTION !** On retiendra notamment que les équivalents se comportent bien vis à vis du produit, du quotient et de la puissance **MAIS PAS VIS À VIS DE LA SOMME OU DE LA COMPOSITION!**

1. Si  $u_n \sim v_n$  et  $w_n \sim x_n$ , on **N'A PAS** nécessairement  $u_n + w_n \sim v_n + x_n$ .
2. Si  $u_n \sim v_n$ , on **N'A PAS TOUJOURS**  $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$  ou  $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$ .

**Proposition 21.60 – Propriétés transmises par  $\sim$** 

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites équivalentes.

1. Si la suite  $(v_n)$  est strictement positive (respectivement négative) au delà d'un certain rang, alors  $(u_n)$  est strictement positive (resp. négative) au delà d'un certain rang.
2. Si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a une limite dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a une limite et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

**Proposition 21.61 – Composition par une suite**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $D$  et  $a$  un point ou une extrémité de  $E$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $D$  qui tend vers  $a$ . Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ , alors  $f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} g(u_n)$ .

**Exemple 21.62 –** Déterminer un équivalent de  $\text{Arctan}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{\pi}{4}$ .

$\text{Arctan}$  est dérivable en 1 et  $\text{Arctan}'(1) = \frac{1}{2} \neq 0$ . Donc

$$\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{4} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2}(x - 1)$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1$ , on a par changement de variable :

$$\text{Arctan}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{\pi}{4} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n^2} - 1\right) \quad \text{d'où} \quad \text{Arctan}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{\pi}{4} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

## Équivalents classiques

### Proposition 21.63 – Équivalence à sa limite

Soit  $\ell$  un réel **non-nul**.  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  si et seulement si  $u_n \sim \ell$ .

### Proposition 21.64 – Équivalence des suites polynômiales

Si  $P : x \mapsto a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0$  est une fonction polynomiale dont le coefficient  $a_p$  est non nul, alors

$$P(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_0 \sim a_p n^p$$

### Proposition 21.65 – Équivalents classiques

Soit  $(u_n)$  une suite convergeant vers 0 et ne s'annulant pas au delà d'un certain rang.

Alors chacune des suites suivantes est bien définie au delà d'un certain rang, et pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

- |                              |                                           |                             |
|------------------------------|-------------------------------------------|-----------------------------|
| 1. $\sin(u_n) \sim u_n$ .    | 2. $1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$ . | 3. $\tan(u_n) \sim u_n$ .   |
| 4. $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ . | 5. $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ | 6. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ . |

*Démonstration.* On utilise les équivalents de fonctions usuelles en 0 et la composition par une suite de limite nulle. □

**Exemple 21.66** – Déterminer la limite de la suite de terme général  $\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n(n+1)}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n(n+1)} = \exp\left(n(n+1) \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\right).$$

$\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ , donc  $\ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \sim \frac{2}{n^2}$ . On a alors

$$n(n+1) \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \sim \frac{2n(n+1)}{n^2} \sim \frac{2n^2}{n^2} = 2.$$

Donc  $n(n+1) \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)$  converge vers 2, donc  $\exp\left(n(n+1) \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\right)$  converge vers  $e^2$ .



**ATTENTION !** ON N'ÉCRIT JAMAIS  $u_n \sim 0$  !!

## IV – Exemples et applications

### 1 – Série harmonique et constante d'Euler

#### Théorème 21.67 – Développement asymptotique de la série harmonique et constante d'Euler

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$  pour un certain réel  $\gamma$  appelé la constante d'Euler :  $\gamma \approx 0,577$ .

En particulier :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$ , et même :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$ .

**Démonstration.** Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$  et  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ .

Rappelons à toutes fins utiles que pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$  :  $\ln(1+x) \leq x$  ★. Nous allons montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes.

- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante et la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  décroissante car pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \stackrel{\star}{\geq} 0$$

$$\text{et } v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+1} + \ln\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right) \stackrel{\star}{\leq} 0.$$

- Enfin :  $v_n - u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

En particulier, d'après le théorème des suites adjacentes, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente. En notant  $\gamma$  sa limite, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \gamma = 0$ , i.e  $u_n = \gamma + o(1)$  ce qui donne exactement le résultat annoncé.  $\square$

## 2 – Études de sommes par encadrement d'intégrales

Nous verrons, dans le chapitre sur la construction de l'intégrale, que toute intégrale peut être approchée par des sommes par construction de l'intégrale. Expliquons simplement que les sommes en question représentent dans ce cadre des « aires sous la courbe » de fonctions en escalier. L'idée de base de ce paragraphe, c'est qu'on peut aussi faire l'inverse et approximer certaines sommes par des intégrales.

### Théorème 21.68 – Comparaison somme-intégrale

Soit  $f \in \mathcal{C}([1, +\infty[, \mathbb{R})$  une fonction positive décroissante.

Pour un certain  $\ell \in \mathbb{R}$  :

$$\sum_{k=1}^n f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^n f(t) dt + \ell + o(1)$$

**Démonstration.** Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t) dt$ . Montrons que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ainsi définie est décroissante et minorée, ce qui, avec le théorème de convergence monotone, nous donnera le résultat annoncé.

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(t) dt - \sum_{k=1}^n f(k) + \int_1^n f(t) dt = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t) dt = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t)) dt$$

Or,  $f$  est décroissante sur  $[1, +\infty[$  donc en particulier sur  $[n, n+1]$ . Ainsi, pour tout  $t \in [n, n+1]$ , on a  $f(n+1) \leq f(t)$  i.e  $f(n+1) - f(t) \leq 0$ . Par décroissance de l'intégrale, on a donc  $\int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t)) dt \leq 0$ , i.e  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .

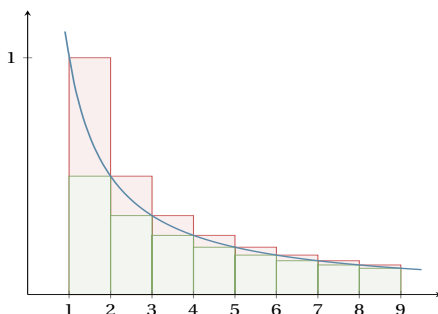
Donc,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.

- De plus, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , et pour tout  $t \in [k, k+1]$ , on a, par décroissance de  $f$ ,  $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$  donc, par croissance de l'intégrale,  $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$  puis par croissance du signe  $\sum$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

On en déduit, par relation de Chasles et changement d'indice,  $\sum_{k=1}^n f(k) - f(1) \leq \int_1^n f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) - f(n)$ .

Et donc,  $f(n) \leq u_n \leq f(1)$ . En particulier,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est minorée par 0, car  $f$  est positive.  $\square$



En particulier, dans le cas de la fonction inverse, on retrouve le développement asymptotique de la série harmonique :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

### 3 – Suites d'intégrales et fonctions définies par une intégrale

Comme nous le savons déjà, il suffit parfois d'un simple encadrement pour trouver un équivalent d'intégrale.

**Exemple 21.69** –  $\int_x^{x+1} e^t \ln t \, dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x (e-1) \ln x$

*Démonstration.* Pour tout  $x > 0$  :  $\ln x \int_x^{x+1} e^t \, dt \leq \int_x^{x+1} e^t \ln t \, dt \leq \ln(x+1) \int_x^{x+1} e^t \, dt$ , donc :

$$(e^{x+1} - e^x) \ln x \leq \int_x^{x+1} e^t \ln t \, dt \leq (e^{x+1} - e^x) \ln(x+1)$$

puis :  $1 \leq \frac{1}{e^x(e-1) \ln x} \int_x^{x+1} e^t \ln t \, dt \leq \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$  – d'où le résultat par encadrement.  $\square$

Souvent hélas, encadrer ne suffit pas, voici donc une idée parmi d'autres. Une intégration par parties transforme toujours une intégrale en une somme de deux termes - un « crochet » et une autre intégrale - et quand on s'y prend bien, cette décomposition peut fournir un début de développement asymptotique pour l'intégrale de départ.

#### Théorème 21.70 – Un exemple de développement asymptotique par IPP

Soit  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ . Alors,  $\int_0^1 t^n f(t) \, dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ . En particulier, si  $f(1) \neq 0$  :  $\int_0^1 t^n f(t) \, dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}$ .

*Démonstration.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : 
$$\begin{aligned} \int_0^1 t^n f(t) \, dt &\stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} f(t) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) \, dt \\ &= \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) \, dt. \end{aligned}$$

Or  $f'$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ , donc bornée d'après le théorème des bornes atteintes. Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\left| \int_0^1 t^{n+1} f'(t) \, dt \right| \leq \|f'\|_\infty \int_0^1 t^{n+1} \, dt = \frac{\|f'\|_\infty}{n+2}, \quad \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) \, dt = 0 \text{ par encadrement.}$$

Conclusion :  $\int_0^1 t^n f(t) \, dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{f(1)}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .  $\square$

**Exemple 21.71** –  $\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \, dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

*Démonstration.* Tâchons si possible d'adapter la preuve du théorème précédent au contexte de cette nouvelle intégrale. Pour commencer, pour tout  $x > 0$  :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \, dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ -\frac{e^{-xt}}{x} \times \frac{1}{1+t^2} \right]_0^1 - \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{2te^{-xt}}{(1+t^2)^2} \, dt = \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{2x} - \frac{2}{x} \int_0^1 \frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2} \, dt,$$

or :  $\left| \int_0^1 \frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2} \, dt \right| = \int_0^1 \frac{te^{-xt}}{(1+t^2)^2} \, dt \leq \int_0^1 e^{-xt} \, dt = \frac{1-e^{-x}}{x} \leq \frac{1}{x}$ , donc en effet :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \, dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{2x} - \frac{2}{x} \times O\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

$\square$