

20 | Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles

Archimedes will be remembered when Aeschylus is forgotten, because languages die and mathematical ideas do not. 'Immortality' may be a silly word, but probably a mathematician has the best chance of whatever it may mean.

Godfrey H. Hardy, 1877-1947

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Certaines preuves, très proches de celles du chapitre « Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ », sont volontairement omises.

I – PGCD, PPCM

1 – PGCD de deux polynômes

Définition 20.1 – Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes dont l'un au moins est non nul. On appelle **plus grand commun diviseur** (ou **PGCD**) de A et B tout diviseur commun de A et B de degré maximal. On convient par ailleurs que 0 est le seul PGCD de 0 et 0 et on pose $0 \wedge 0 = 0$.

Ceci n'est pour le moment qu'une définition et il se pourrait bien que A et B n'aient pas de PGCD, mais de fait, ils en ont toujours un.

Proposition 20.2 – Existence du PGCD

Soient A et B deux polynômes, dont l'un au moins est non nul. Alors, A et B possèdent au moins un PGCD.

Démonstration. Quitte à échanger le rôle de A et B , on peut supposer $A \neq 0$. Notons E l'ensemble des degrés des diviseurs communs non nuls de A et B , i.e

$$E = \{\deg(P) \text{ avec } P \in \mathbb{K}[X], P \mid A \text{ et } P \mid B\}$$

E contient 0 car A et B sont divisibles par 1 - et il est majoré par $\deg(A)$. Partie non vide majorée de $\mathbb{N}$, cet ensemble possède un plus grand élément d , degré d'un certain polynôme D qui est notre PGCD. $\square$

Exemple 20.3 – Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, les PGCD de A et 0 sont exactement les associés de A , i.e les polynômes de la forme αA avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Démonstration. Si $A \neq 0$, les diviseurs communs de A et 0 sont exactement les diviseurs de A . Par ailleurs, les diviseurs de A de degré maximal sont exactement les polynômes associés à A . $\square$

Théorème 20.4 – Idée fondamentale de l'algorithme d'Euclide

Pour tous A, B et $P \in \mathbb{K}[X]$, $A + BP$ et B ont les mêmes diviseurs communs que A et B , et donc aussi les mêmes PGCD.

Démonstration. Tout diviseur commun de A et B divise aussi $A + BP$ et B . Inversement, tout diviseur commun de $A + BP$ et B divise aussi $A = (A + BP) - BP$ et B . $\square$

En particulier, pour tous $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$, en notant R le reste de la division euclidienne de A par B , B et R ont les mêmes diviseurs communs que A et B .

Théorème 20.5 – « Pseudo-unité » du PGCD de deux polynômes

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On note D un PGCD de A et B .

- Les PGCD de A et B sont exactement les associés de D . En particulier, si A ou B est non nul, un seul des PGCD de A et B est unitaire, on l'appelle **LE PGCD de A et B** , et on le note $A \wedge B$.
- De plus, les diviseurs communs de A et B sont exactement les diviseurs de $A \wedge B$.

Démonstration. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On peut supposer $\deg(B) \leq \deg(A)$ sans perte de généralité.

On définit une suite de polynômes $R_0, R_1, R_2, \dots$ de la manière suivante. Au départ, on pose $R_0 = A$ et $R_1 = B$.

Ensuite, pour $k \in \mathbb{N}$, **TANT QUE** $R_{k+1} \neq 0$, on note R_{k+2} le reste de la division euclidienne de R_k par R_{k+1} , ce qui implique en particulier que $\deg(R_{k+2}) < \deg(R_{k+1})$.

À l'issue de cette construction : $\deg(R_0) \geq \deg(R_1) > \deg(R_2) > \dots$, et comme il n'existe qu'un nombre **FINI** d'entiers naturels entre 0 et $\deg(R_0)$, on obtient forcément $\deg(R_N) = -\infty$ pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$, i.e. $R_N = 0$ - l'algorithme se termine.

Or, en vertu de l'idée fondamentale de l'algorithme d'Euclide, $A = R_0$ et $B = R_1$ ont les mêmes diviseurs communs et les mêmes PGCD que R_1 et R_2 , puis que R_2 et $R_3, \dots$ et enfin que R_{N-1} et $R_N = 0$. Les PGCD de R_{N-1} et 0 étant exactement les associés de R_{N-1} , les diviseurs communs de A et B sont ainsi exactement les diviseurs de R_{N-1} et leurs PGCD sont exactement les associés de R_{N-1} . Ainsi, D et R_{N-1} sont associés. Pour conclure, les associés de deux polynômes associés coïncident, ce qui démontre le résultat annoncé. $\square$

L'algorithme d'Euclide calcule rapidement le PGCD de deux polynômes A et B pour lesquels $0 \leq \deg(B) \leq \deg(A)$. D'après ce qui précède :

$A \wedge B$ est le **DERNIER RESTE NON NUL**, rendu unitaire,
de la suite des restes successifs $R_0, R_1, R_2, \dots$

Exemple 20.6 –

- $(X+1)^3 \wedge (X+1)^2(X+2) = (X+1)^2$

Démonstration. Suivons sagement l'algorithme d'Euclide, même si on pourrait obtenir ce PGCD par d'autres moyens. Posons $R_0 = (X+1)^3$ et $R_1 = (X+1)^2(X+2)$.

Alors, R_2 est le reste de la division euclidienne de R_0 par R_1 . La division euclidienne de R_0 par R_1 s'écrit :

$$R_0 = \underbrace{1}_{\text{quotient}} \cdot R_1 + \underbrace{(-X^2 - 2X - 1)}_{\text{reste}}$$

Ainsi, $R_2 = -X^2 - 2X - 1$. Ensuite, R_3 est le reste de la division euclidienne de R_1 par R_2 . On a :

$$R_1 = \underbrace{(-X - 2)}_{\text{quotient}} \cdot R_2 + \underbrace{0}_{\text{reste}}$$

Donc, $R_3 = 0$. Le PGCD de A et B étant le dernier reste non nul, **RENDU UNITAIRE**, on a :

$$A \wedge B = (-1) \cdot R_2 = (X^2 + 2X + 1) = (X+1)^2$$

 $\square$

- $(2X^4 + 9X^3 + 12X^2 + 10X + 3) \wedge (2X^4 + X^3 - 2X^2 + 3X + 2) = X + \frac{1}{2}$

Démonstration. On effectue la suite de division euclidienne de R_k par R_{k+1} jusqu'à obtenir un reste nul.

$$\begin{aligned} \underbrace{2X^4 + 9X^3 + 12X^2 + 10X + 3}_{R_0} &= 1 \cdot \underbrace{(2X^4 + X^3 - 2X^2 + 3X + 2)}_{R_1} + \underbrace{(8X^3 + 14X^2 + 7X + 1)}_{R_2} \\ \underbrace{2X^4 + X^3 - 2X^2 + 3X + 2}_{R_1} &= \left(\frac{1}{4}X - \frac{5}{16}\right) \cdot \underbrace{(8X^3 + 14X^2 + 7X + 1)}_{R_2} + \underbrace{\left(\frac{5}{8}X^2 + \frac{79}{16}X + \frac{37}{16}\right)}_{R_3} \\ \underbrace{8X^3 + 14X^2 + 7X + 1}_{R_2} &= \left(\frac{64}{5}X - \frac{1968}{25}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{5}{8}X^2 + \frac{79}{16}X + \frac{37}{16}\right)}_{R_3} + \underbrace{\left(\frac{9152}{25}X + \frac{4576}{25}\right)}_{R_4} \\ \underbrace{\frac{5}{9}X^2 + \frac{79}{16}X + \frac{37}{16}}_{R_3} &= \left(\frac{125}{7326}X + \frac{925}{73216}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{9152}{25}X + \frac{4576}{25}\right)}_{R_4} + \underbrace{0}_{R_5} \end{aligned}$$

Le PGCD est le dernier reste non nul, **RENDU UNITAIRE**, donc

$$(2X^4 + 9X^3 + 12X^2 + 10X + 3) \wedge (2X^4 + X^3 - 2X^2 + 3X + 2) = \frac{25}{9152} \cdot \left(\frac{9152}{25} X + \frac{4576}{25} \right) = X + \frac{1}{2}$$

□

Théorème 20.7 – Relations de Bézout pour deux polynômes

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Il existe des polynômes $U, V \in \mathbb{K}[X]$ pour lesquels $A \wedge B = AU + BV$. Une telle relation est appelée **UNE relation de Bézout de A et B**.

Démonstration. On l'a vu précédemment, on peut toujours se ramener au cas où $\deg(B) \leq \deg(A)$.

On reprend dans cette preuve les restes successifs de l'algorithme d'Euclide en posant $R_0 = A$ et $R_1 = B$ et en notant pour tout $k \in \mathbb{N}$, tant que $R_{k+1} \neq 0$, R_{k+2} le reste de la division euclidienne de R_k par R_{k+1} . Le quotient de cette division euclidienne sera quant à lui noté Q_{k+2} : $R_{k+2} = R_k - Q_{k+2}R_{k+1}$. La suite ainsi construite est finie de rang final N pour lequel $R_N = 0$.

On définit deux nouvelles suites $(U_k)_{0 \leq k \leq N}$ et $(V_k)_{0 \leq k \leq N}$ par : $(U_0, V_0) = (1, 0)$, $(U_1, V_1) = (0, 1)$ et pour tout $k \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket$: $(U_{k+2}, V_{k+2}) = (U_k - Q_{k+2}U_{k+1}, V_k - Q_{k+2}V_{k+1})$.

Il n'est alors pas dur de montrer par récurrence double que pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$: $R_k = AU_k + BV_k$. En particulier : $A \wedge B = R_{N-1} = AU_{N-1} + BV_{N-1}$. □

Le principe de l'algorithme d'Euclide étendu est le même qu'au chapitre « Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ ». Cherchons par exemple le PGCD de $A = 6X^4 + 8X^3 - 7X^2 - 5X - 2$ et $B = 6X^3 - 4X^2 - X - 1$ ainsi qu'une relation de Bézout associée.

k	Q_k	$R_k = AU_k + BV_k$	U_k	V_k
0		$6X^4 + 8X^3 - 7X^2 - 5X - 2$	1	0
1		$6X^3 - 4X^2 - X - 1$	0	1
2	$X + 2$	$2X^2 - 2X$	1	$-X - 2$
3	$3X + 1$	$X - 1$	$-3X - 1$	$3X^2 + 7X + 3$

À chaque étape :

$$R_k = AU_k + BV_k.$$

Relation de Bézout :

$$A \wedge B = X - 1 = -(3X + 1) \times A + (3X^2 + 7X + 3) \times B.$$

Théorème 20.8 – Propriétés du PGCD de deux polynômes

Soient $A, B, C, K \in \mathbb{K}[X]$.

1. **Associativité** : $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$.
2. **Factorisation par un diviseur commun** : $(AK) \wedge (BK)$ et $K(A \wedge B)$ sont associés.

Exemple 20.9 – $2X(X+1)^2(X+2)^3 \wedge X(X+2)^4(X^2+1)$ et $X(X+2)^3(2(X+1)^2 \wedge (X^2+1))$ sont associés.

2 – PGCD d'une famille finie de polynômes

La définition suivante, est également un théorème, dont nous ne détaillerons pas la preuve ici.

Définition-Propriété 20.10 – Soient $A_1, \dots, A_r \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes dont l'un au moins est non nul. On appelle **plus grand commun diviseur** (ou **PGCD**) de $A_1, \dots, A_r$ tout diviseur commun de $A_1, \dots, A_r$ de degré maximal.

Les PGCD de $A_1, \dots, A_r$ sont associés. Un seul d'entre eux est unitaire, on l'appelle **LE** PGCD de $A_1, \dots, A_r$ et on le note $A_1 \wedge \dots \wedge A_r$.

On pose par ailleurs pour tout $r \geq 2$: $\underbrace{0 \wedge \dots \wedge 0}_{r \text{ fois}} = 0$.

Théorème 20.11 – Reprise des résultats précédents dans le cas d'une famille finie de polynômes

Soient $A_1, \dots, A_r \in \mathbb{K}[X]$.

- Les diviseurs communs de $A_1, \dots, A_r$ sont exactement les diviseurs de $A_1 \wedge \dots \wedge A_r$.
- Pour tout $K \in \mathbb{K}[X]$, $(A_1 K) \wedge \dots \wedge (A_r K)$ et $K(A_1 \wedge \dots \wedge A_r)$ sont associés.
- Il existe des polynômes $U_1, \dots, U_r \in \mathbb{K}[X]$ pour lesquels $A_1 \wedge \dots \wedge A_r = A_1 U_1 + \dots + A_r U_r$. Une telle relation est appelée **UNE relation de Bézout** de $A_1, \dots, A_r$.

3 – Polynômes premiers entre eux

Définition 20.12 – Soient $A, B, A_1, \dots, A_r \in \mathbb{K}[X]$.

- On dit que A et B sont **premiers entre eux** si 1 est leur seul diviseur commun unitaire, i.e. si $A \wedge B = 1$.
- On dit que $A_1, \dots, A_r$ sont **premiers entre eux dans leur ensemble** si 1 est leur seul diviseur commun unitaire, i.e. si $A_1 \wedge \dots \wedge A_r = 1$.
- On dit que $A_1, \dots, A_r$ sont premiers entre eux deux à deux si A_i et A_j sont premiers entre eux pour tous $i, j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ distincts.



ATTENTION ! Premiers entre eux **DEUX À DEUX** $\implies$ Premiers entre eux **DANS LEUR ENSEMBLE**
mais **LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE !**

Exemple 20.13 – $X(X+1)$, $X(X+2)$ et $(X+1)(X+2)$ sont premiers entre eux dans leur ensemble **MAIS** :

$$X(X+1) \wedge X(X+2) = X \neq 1, \quad X(X+2) \wedge (X+1)(X+2) = X+2 \neq 1 \quad \text{et} \quad (X+1)(X+2) \wedge X(X+1) = X+1 \neq 1$$

Théorème 20.14 – Théorèmes de Bézout et Gauss, conséquences

Soient $A, B, C, P, A_1, \dots, A_r \in \mathbb{K}[X]$.

- **Théorème de Bézout** : Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $A \wedge B = 1$ (ii) Il existe deux polynômes $U, V \in \mathbb{K}[X]$ pour lesquels $AU + BV = 1$.
- **Théorème de Gauss** : Si $A \mid BC$ avec $A \wedge B = 1$, alors $A \mid C$.
- **Lemme d'Euclide** : Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ **IRRÉDUCTIBLE** : $P \mid AB \iff P \mid A$ ou $P \mid B$.
- **Produits de polynômes** :
— Si chacun des polynômes $A_1, \dots, A_r$ est premiers avec P , leur produit $A_1 \dots A_r$ l'est aussi.
— Si $A_1, \dots, A_r$ divisent P et sont premiers entre eux **DEUX À DEUX**, alors leur produit $A_1 \dots A_r$ divise P .

4 – PPCM de deux polynômes

À nouveau, la définition suivante est aussi un théorème, dont nous ne détaillons pas la preuve.

Définition-Propriété 20.15 – Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls. On appelle **plus petit commun multiple** (ou **PPCM**) de A et B tout multiple commun non nul de A et B de degré minimal.

- **Existence de « pseudo-unicité »** : A et B possèdent un unique PPCM unitaire appelé **LE** PPCM de A et B et noté $A \vee B$. Les autres PPCM sont les associés de $A \vee B$.
- **Multiples communs et multiples du PPCM** : Les multiples communs de A et B sont exactement les multiples de $A \vee B$: $A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = (A \vee B)\mathbb{K}[X]$.
- **Lien avec le PGCD** : Les polynômes AB et $(A \wedge B)(A \vee B)$ sont associés.

Quand on connaît la factorisation irréductible de deux polynômes A et B , on peut déterminer $A \vee B$ sans utiliser l'algorithme de Bézout. Le principe est le même que dans $\mathbb{Z}$.

Exemple 20.16 – $3X^2(X+1) \vee X^4(X+2)^2 = X^4(X+1)(X+2)^2$.

II – Fractions rationnelles

1 – Définitions et premières propriétés

Définition 20.17 – Une **fraction rationnelle** à coefficients dans $\mathbb{K}$ d'indéterminée X est une expression de la forme $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et Q est non-nul. On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble de ces fractions rationnelles.

Les opérations classiques (addition, multiplication par une constante, multiplication) dans $\mathbb{K}[X]$ s'effectuent « naturellement » en combinant les règles de calcul sur les fractions et les polynômes.

Notons également que tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est assimilé à la fraction rationnelle $\frac{P}{1}$.

Exemple 20.18 –

$$\begin{aligned} \frac{X}{2X^2+1} - X \times \frac{3X^2-X}{2+X} &= \frac{X}{2X^2+1} - \frac{3X^3-X^2}{2+X} \\ &= \frac{X(3X^3-X^2) - (3X^3-X^2)(2X^2+1)}{(2+X)(2X^2+1)} \\ &= \frac{3X^4 - X^3 - 6X^5 + 4X^4 - 3X^3 + X^2}{4X^2+2+2X^3+X} \\ &= \frac{-6X^5+7X^4-4X^3+X^2}{2X^3+4X^2+X+2} \end{aligned}$$

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps (car les éléments non-nuls ont tous un inverse).

Tout comme les polynômes, les fractions rationnelles sont des objets purement formels. En particulier ce ne sont pas des fonctions, et X ne désigne pas un réel ou un complexe, mais l'indéterminée.

Remarque 20.19 – En réalité, la « bonne » manière de construire $\mathbb{K}(X)$ serait d'utiliser un procédé similaire à ce qui avait été fait dans le devoir maison sur la construction de $\mathbb{Q}$. La différence étant que l'on partirait, non pas cette fois de l'anneau $\mathbb{Z}$, mais de l'anneau $\mathbb{K}[X]$. $\mathbb{K}(X)$ correspond donc en fait à l'ensemble des classes d'équivalence dans $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ pour la relation d'équivalence

$$(A, B) \sim (C, D) \iff AD = BC$$

Définition 20.20 – Une **fraction rationnelle** $\frac{P}{Q}$ est dite **sous forme irréductible** lorsque P et Q n'ont aucun facteur irréductible en commun et que Q est unitaire.

Exemple 20.21 –

$F = \frac{X^2+2X}{2X^3-2X}$ n'est pas sous forme irréductible, mais est égale à $\frac{\frac{1}{2}(X+2)}{X^2-1} = \frac{\frac{1}{2}(X+2)}{(X+1)(X-1)}$ qui est irréductible car son dénominateur et son numérateur sont sous forme factorisée et n'ont manifestement pas de facteurs irréductibles communs.

Ainsi, F a deux pôles simples : 1 et -1 .

0 est une racine de $2X^3-2X$, mais n'est pas un pôle de F , car la simplification par X fait apparaître que ce n'était qu'une illusion.

Définition 20.22 – Pour tout $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$, la quantité $\deg(A) - \deg(B)$ dépend de R sans dépendre du choix de (A, B) . On l'appelle le **degré de** R et on le note $\deg(R)$. Le degré d'une fraction rationnelle est donc soit un entier **RELATIF**, soit $-\infty$.

Pour tous $R, S \in \mathbb{K}(X)$: $\deg(R+S) \leq \max\{\deg(R), \deg(S)\}$ et $\deg(RS) = \deg(R) + \deg(S)$.

En outre, le degré d'un polynôme coïncide avec son degré comme fraction rationnelle.



ATTENTION ! Une fraction rationnelle peut être de degré positif sans être un polynôme ! C'est le cas par exemple de la fraction rationnelle $\frac{X^4 + X^3 + 1}{X^2 + 3}$ de degré $4 - 2 = 2$.

Définition 20.23 – Soit $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ **IRRÉDUCTIBLE**. La fonction $x \mapsto \frac{A(x)}{B(x)}$ définie sur $\mathbb{K}$ privé des racines de B est appelé la **fonction rationnelle associée** à R , et encore notée R .

Remarque 20.24 –

- Cette définition est possible car cette fonction dépend de R , sans dépendre du choix du couple (A, B) .
- On impose ici à l'écriture $R = \frac{A}{B}$ d'être irréductible pour que le dénominateur de R ait le moins de racines possible, et donc pour que R , comme fonction, soit définie sur le plus grand ensemble possible. Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{x^3 + x + 1}{x - 1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mais la fonction $x \mapsto \frac{x(x^3 + x + 1)}{x(x - 1)}$ l'est seulement sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Définition 20.25 – Soit $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ **IRRÉDUCTIBLE**.

- **Zéros** : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est un **zéro** de R si λ est une racine de A . La multiplicité de λ en tant que racine de A est alors appelée la **multiplicité** de λ dans R .
- **Pôles** : Soit $\mu \in \mathbb{K}$. On dit que μ est un **pôle** de R si μ est une racine de B . La multiplicité de μ dans B est alors appelée la **multiplicité** de μ dans R . Un pôle de multiplicité 1 (resp. 2) est aussi appelé un pôle **simple** (resp. **double**).

On impose ici à l'écriture $R = \frac{A}{B}$ d'être irréductible pour qu'il ne soit pas possible de confondre les zéros et les pôles de R . Quand A et B sont premiers entre eux, il est certain en effet qu'ils n'ont pas de racine commune.

Exemple 20.26 – Dans $\mathbb{R}(X)$, la fraction $\frac{(X^2 + 1)(X - 2)^3(X + 1)X}{(X - 1)^2(X^2 + X + 1)}$ a pour zéros les réels $-1, 0$ et 2 et pour pôle le seul réel 1 . La multiplicité de 2 est égale à 3 , celle de 1 est 2 , etc.

Théorème 20.27 – Partie entière

Soit $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction rationnelle $Q \in \mathbb{K}(X)$ pour lesquels : $R = E + Q$ et $\deg(Q) < 0$. Le polynôme E est appelé la **partie entière** de R et n'est autre que le quotient de la division euclidienne de A par B .

En particulier, la partie entière de R est nulle si $\deg(R) < 0$.

Démonstration.

- **Existence** : Notons E le quotient de la division euclidienne de A par B et F son reste, et posons $Q = \frac{F}{B}$. Alors d'une part $R = \frac{A}{B} = \frac{EB + F}{B} = E + Q$, mais d'autre part $\deg(Q) = \deg(F) - \deg(B) < 0$.
- **Unicité** : Soient $R = E + Q$ et $R = \tilde{E} + \tilde{Q}$ deux décompositions de R . Le polynôme $E - \tilde{E}$ est de degré $\deg(\tilde{Q} - Q) \leq \max\{\deg(\tilde{Q}), \deg(Q)\} < 0$, donc est nul, donc $E = \tilde{E}$, puis $Q = \tilde{Q}$.

□

Exemple 20.28 – La partie entière de la fraction $\frac{X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 1}{X^2 - 3X + 1}$ est $X^2 + 4$ par simple division euclidienne :

$$X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 1 = (X^2 - 3X + 1)(X^2 + 4) + 12X - 5$$

2 – Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Théorème 20.29 – Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles scindées

Soit $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{C}[X]$, une fraction rationnelle **sous forme irréductible**. On suppose que $B = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_i)^{k_i}$, c'est à dire que les pôles de R sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de multiplicités respectives $k_1, \dots, k_n$. On note par ailleurs, E la partie entière de R .

ALORS, il existe des uniques coefficients $a_{i,j}$ dans $\mathbb{C}$ (pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, k_i \rrbracket$) tels que

$$R(X) = E(X) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j}.$$

Pour rappel, E est le quotient de la division euclidienne de P par Q .

Démonstration. Démonstration hors programme. □

Exemple 20.30 – Dans les exemples suivants, on a pris soin de faire apparaître la partie entière même quand elle est nulle. Les fractions proposées étant en outre à coefficients **RÉELS**, elles sont égales à leur conjuguée, raison pour laquelle, par unicité de la décomposition en éléments simples certains coefficients sont égaux à conjugaison près tandis que d'autres sont réels.

- Pour un certain $a \in \mathbb{C}$: $\frac{X^3 + 4X^2 + 1}{X^2 + 1} = X + 4 + \frac{a}{X - i} + \frac{\bar{a}}{X + i}.$
- Pour certains $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $e \in \mathbb{C}$: $\frac{X^4 + X + 1}{X(X - 5)^3(X^2 + 4)} = 0 + \frac{a}{X} + \frac{b}{(X - 5)^3} + \frac{c}{(X - 5)^2} + \frac{d}{X - 5} + \frac{e}{X - 2i} + \frac{\bar{e}}{X + 2i}.$
- Pour certains $a \in \mathbb{R}$ et $b, c \in \mathbb{C}$: $\frac{1}{X(X^2 + X + 1)^2} = 0 + \frac{a}{X} + \frac{b}{(X - j)^2} + \frac{c}{X - j} + \frac{\bar{b}}{(X - \bar{j})^2} + \frac{\bar{c}}{X - \bar{j}}.$

Théorème 20.31 – Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Soit $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{R}(X)$ **IRRÉDUCTIBLE** de partie entière E . On introduit la factorisation irréductible de B , avec des notations évidentes :

$$B = \beta \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \prod_{j=1}^s (X^2 + b_j X + c_j)^{n_j}$$

Il existe des familles uniques $(a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq k \leq m_i}}, (u_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq s \\ 1 \leq k \leq n_j}}$ et $(v_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq s \\ 1 \leq k \leq n_j}}$ de réels pour lesquelles :

$$R = E + \underbrace{\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(X - \lambda_i)^k}}_{\text{Partie nolaire}} + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{n_j} \frac{u_{jk}X + v_{jk}}{(X^2 + b_j X + c_j)^k}.$$

Cette décomposition de R est appelée sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Démonstration hors programme. □

Exemple 20.32 – On reprend ci-dessous les exemples précédents, comparez !

- Pour certains $a', b' \in \mathbb{R}$: $\frac{X^3 + 4X^2 + 1}{X^2 + 1} = X + 4 + \frac{a'X + b'}{X^2 + 1}.$
- Pour certains $a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{R}$: $\frac{X^4 + X + 1}{X(X - 5)^3(X^2 + 4)} = 0 + \frac{a'}{X} + \frac{b'}{(X - 5)^3} + \frac{c'}{(X - 5)^2} + \frac{d'}{X - 5} + \frac{e'X + f'}{X^2 + 4}.$
- Pour certains $a', b', c', d', e' \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{X(X^2 + X + 1)^2} = 0 + \frac{a'}{X} + \frac{b'X + c'}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{d'X + e'}{X^2 + X + 1}.$

Pour le calcul pratique des coefficients, nous disposons grosso modo de quatre techniques :

- multiplier par $(X - \lambda)^m$ puis évaluer en λ ,
- multiplier par X puis passer à la limite en $+\infty$,
- évaluer en un point,
- mettre au même dénominateur et identifier.

Exemple 20.33 – Déterminer la décomposition en éléments simples de $F = \frac{2X^5 + X^4 + 3X + 2}{X^4 - 2X^2 + 1}$.

La division euclidienne de $2X^5 + X^4 + 3X + 2$ par $X^4 - 2X^2 + 1$ donne

$$2X^5 + X^4 + 3X + 2 = (X^4 - 2X^2 + 1)(1 + 2X) + 1 + X + 2X^2 + 4X^3.$$

$$F = 1 + 2X + \frac{1 + X + 2X^2 + 4X^3}{(X - 1)^2(X + 1)^2}.$$

$X^4 - 2X^2 + 1 = (X^2 - 1)^2 = (X - 1)^2(X + 1)^2$, donc le théorème précédent indique que cette fraction rationnelle peut se mettre sous la forme

$$\frac{1 + X + 2X^2 + 4X^3}{(X - 1)^2(X + 1)^2} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X + 1} + \frac{d}{(X + 1)^2}.$$

avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. En multipliant par $(X - 1)^2$, on obtient

$$\frac{1 + X + 2X^2 + 4X^3}{(X + 1)^2} = a(X - 1) + b + \frac{c(X - 1)^2}{X + 1} + \frac{d(X - 1)^2}{(X + 1)^2}.$$

En évaluant en 1, on obtient $b = 2$. De même, avec $(X + 1)^2$, on obtient $d = \frac{-1}{2}$.

En revanche, cette méthode ne permet pas de déterminer a et c .

D'autres méthodes plus efficaces existent, mais, à défaut, on peut tout mettre au même dénominateur :

$$\frac{1 + X + 2X^2 + 4X^3}{X^4 - 2X^2 + 1} = \frac{a(X - 1)(X + 1)^2 + 2(X + 1)^2 + c(X + 1)(X - 1)^2 + \frac{-1}{2}(X - 1)^2}{X^4 - 2X^2 + 1}.$$

$$1 + X + 2X^2 + 4X^3 = a(X - 1)(X + 1)^2 + 2(X + 1)^2 + c(X + 1)(X - 1)^2 + \frac{-1}{2}(X - 1)^2$$

En identifiant les coefficients de degré 0 et 3, on obtient

$$\begin{cases} a + c = 4 \\ -a + 2 + c + \frac{-1}{2} = 1 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} a + c = 4 \\ -a + c = \frac{-1}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} c = \frac{7}{4} \\ a = \frac{9}{4} \end{cases} \quad \text{On a donc pour conclure que}$$

$$F = 1 + 2X + \frac{\frac{9}{4}}{X - 1} + \frac{2}{(X - 1)^2} + \frac{\frac{7}{4}}{X + 1} + \frac{\frac{-1}{2}}{(X + 1)^2}.$$

Exemple 20.34 – $\frac{X^2 + 3X + 1}{(X - 1)^2(X - 2)} = -\frac{5}{(X - 1)^2} - \frac{10}{X - 1} + \frac{11}{X - 2}$

Démonstration.

- Forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$: La partie entière est nulle, donc pour certains $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\star \quad \frac{X^2 + 3X + 1}{(X - 1)^2(X - 2)} = \frac{a}{(X - 1)^2} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X - 2}$$

- Calcul de a : On multiplie $\star$ par $(X - 1)^2$ puis on évalue en 1 : $a = -5$.
- Calcul de c : On multiplie $\star$ par $X - 2$ puis on évalue en 2 : $c = 11$.
- Calcul de b : On multiplie $\star$ par X puis on passe à la limite en $+\infty$: $b + c = 1$, donc $b = -10$.

□

La décomposition en éléments simples trouve son application, notamment, dans le calcul d'intégrales et de primitives.

Exemple 20.35 – Une primitive évidente de $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ est

$$x \mapsto \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Démonstration. Commençons par déterminer la décomposition en éléments simples, dans $\mathbb{R}$, de $\frac{1}{X^3+1}$.

Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$.

Par multiplication par $X+1$ puis évaluation en -1 , on trouve $a = \frac{1}{3}$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^3+1} &= \frac{\frac{1}{3}}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1} \iff \frac{1}{X^3+1} = \frac{\frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X + \frac{1}{3} + bX^2 + bX + cX + c}{X^3+1} \\ &\iff 1 = \left(\frac{1}{3} + b\right)X^2 + \left(-\frac{1}{3} + b + c\right)X + \left(\frac{1}{3} + c\right) \iff \begin{cases} \frac{1}{3} + b = 0 \\ -\frac{1}{3} + b + c = 0 \\ \frac{1}{3} + c = 1 \end{cases} \iff b = -\frac{1}{3} \text{ et } c = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dès lors, en réutilisant les méthodes du Chapitre 11, on a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$\begin{aligned} \int^x \frac{1}{t^3+1} dt &= \frac{1}{3} \int^x \frac{1}{t+1} dt - \frac{1}{3} \int^x \frac{t-2}{t^2-t+1} dt = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int^x \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt + \frac{1}{2} \int^x \frac{1}{t^2-t+1} dt \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \int^x \frac{1}{t^2-t+1} dt = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{2}{3} \int^x \frac{1}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \int^x \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

□

Le théorème qui suit est spécifique aux **PÔLES SIMPLES** et pratique quand le dénominateur est écrit sous forme développée.

Théorème 20.36 – Partie polaire associée à un pôle simple

Soient $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$ **IRRÉDUCTIBLE** et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si λ est un pôle **SIMPLE** de R de partie polaire associée $\frac{a}{X-\lambda}$ avec $a \in \mathbb{C}$, alors $a = \frac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}$.

Démonstration. Comme λ est pôle simple de R : $B = (X-\lambda)C$ pour un certain $C \in \mathbb{K}[X]$ avec $C(\lambda) \neq 0$ et la décomposition en éléments simples de R sur $\mathbb{C}$ s'écrit $R = \frac{a}{X-\lambda} + Q$ pour une certaine fraction $Q \in \mathbb{C}(X)$ n'admettant pas λ pour pôle. Aussitôt $\frac{A}{C} = (X-\lambda)R = a + (X-\lambda)Q$, donc en λ : $a = \frac{A(\lambda)}{C(\lambda)}$ mais par ailleurs $B' = C + (X-\lambda)C'$, donc $B'(\lambda) = C(\lambda)$, donc en effet $a = \frac{A(\lambda)}{C(\lambda)} = \frac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}$. □

Exemple 20.37 – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{X-\omega}$.

Démonstration. Les pôles de $\frac{1}{X^n-1}$ sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et sont tous **SIMPLES**. La partie entière étant par ailleurs nulle, on a : $\frac{1}{X^n-1} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{a_\omega}{X-\omega}$ pour une certaine famille $(a_\omega)_{\omega \in \mathbb{U}_n} \in \mathbb{C}^n$.

Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$ fixé. La technique de multiplication/évaluation serait ici pénible à mettre en œuvre - essayez pour comprendre - nous allons nous en sortir grâce au théorème précédent. Écrivons $\frac{1}{X^n-1} = \frac{A}{B}$ avec $A = 1$ et $B = X^n-1$.

Comme ω est **PÔLE SIMPLE** : $a_\omega = \frac{A(\omega)}{B'(\omega)} = \frac{1}{n\omega^{n-1}} \stackrel{\omega^n=1}{=} \frac{\omega}{n}$. □

Quand les pôles **NON RÉELS** d'une fraction **RÉELLE** sont **SIMPLES**, on peut obtenir la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ facilement à partir de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ en regroupant les parties polaires conjuguées.

Exemple 20.38 – $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^5 dt}{t^4 - 1} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \ln \frac{3}{5}.$

- **Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$** : La partie entière est nulle, donc pour certains $a, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{C}$:

$$\frac{X^5}{X^4 - 1} = \frac{X^5}{(X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)} = X + \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - i} + \frac{\bar{c}}{X + i},$$

et les pôles étant simples : $a = \frac{X^5}{(X^4 - 1)'}(1) = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{X^5}{(X^4 - 1)' }(-1) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad c = \frac{X^5}{(X^4 - 1)' }(i) = -\frac{1}{4}$

- **Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$** : On regroupe !

$$\frac{X^5}{X^4 - 1} = X + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X - 1} + \frac{1}{X + 1} - \frac{1}{X - i} - \frac{1}{X + i} \right) = X + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X - 1} + \frac{1}{X + 1} - \frac{2X}{X^2 + 1} \right).$$

- **Calcul de l'intégrale** : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^5 dt}{t^4 - 1} = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4} (\ln(1 - t) + \ln(t + 1) - \ln(t^2 + 1)) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \ln \frac{3}{5}$

Exemple 20.39 – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{X^{2n} - 1}$ a pour décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{X^{2n} - 1} = \frac{1}{2n(X - 1)} - \frac{1}{2n(X + 1)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X \cos \frac{k\pi}{n} - 1}{X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1}.$$

Nous avons déjà calculé la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, elle admet -1 et 1 pour seuls pôles réels, les autres peuvent être regroupés par paires de conjugués.

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^{2n} - 1} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{2n}}}{X - e^{\frac{2ik\pi}{2n}}} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}}{X - e^{\frac{ik\pi}{n}}} = \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{X - 1} - \frac{1}{X + 1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}}{X - e^{\frac{ik\pi}{n}}} + \frac{e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{X - e^{-\frac{ik\pi}{n}}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2n(X - 1)} - \frac{1}{2n(X + 1)} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} (X - e^{-\frac{ik\pi}{n}}) + e^{-\frac{ik\pi}{n}} (X - e^{\frac{ik\pi}{n}})}{(X - e^{\frac{ik\pi}{n}})(X - e^{-\frac{ik\pi}{n}})} \\ &= \frac{1}{2n(X - 1)} - \frac{1}{2n(X + 1)} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2X \cos \frac{k\pi}{n} - 2}{X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1} = \frac{1}{2n(X - 1)} - \frac{1}{2n(X + 1)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X \cos \frac{k\pi}{n} - 1}{X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1}. \end{aligned}$$

Théorème 20.40 – Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de $\frac{P'}{P}$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les racines de P et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités respectives, on a :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^r \frac{m_k}{X - \lambda_k}$$

.

Exemple 20.41 – $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega} = \frac{n-1}{2}.$

La somme à calculer évoque fortement le théorème précédent évalué en 1, mais pour quel polynôme P ? Manifestement,

pour $P = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = \frac{X^n - 1}{X - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. En effet, $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{X - \omega} = \frac{P'}{P}$ d'après le théorème précédent, or $P(1) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$

et $P'(1) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$, donc $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega} = \frac{n-1}{2}.$