

17 | Matrices

It is my experience that proofs involving matrices can be shortened by 50% if one throws the matrices out.

Emil Artin, mathématicien, 1898-1962

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Généralités

Définition 17.1 – Soient n et p deux entiers non nuls. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau de nombres de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix},$$

avec $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Ce sont les **coefficients** de la matrice A .

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 17.2 – Voici quelques exemples de matrices :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}) & B &= \begin{pmatrix} \pi \\ 1,5 \\ e^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & C &= \begin{pmatrix} 3,1 & -2 \\ 1+i & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) \\ D &= \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R}) & E &= \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 0 \\ -1-i & 2 & i \\ -3+2i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{C}) & F &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Remarque 17.3 – Le premier indice n (i pour les coefficients) concerne les lignes et le second indice p (j pour les coefficients) concerne les colonnes.

Notation : Soient n et p deux entiers non nuls et M une matrice (n, p) .

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $m_{i,j}$ désigne un nombre de $\mathbb{K}$.

La notation $M = (m_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$ signifie que la matrice M est de taille (n, p) et que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $m_{i,j}$

est l'élément de la matrice qui se trouve en ligne i et en colonne j .

Il faut bien respecter l'ordre : l'indice de ligne est toujours en premier!

Exemple 17.4 – En reprenant les exemples précédent, on peut écrire $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}}$ et $E = (e_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket}}$, et dans ce cas on a, entre autre,

$$a_{1,1} = 1 \quad a_{2,3} = 7 \quad a_{3,1} = 9 \quad e_{2,2} = 2 \quad e_{2,3} = i \quad e_{4,2} = 0$$

Exemple 17.5 – Écrire explicitement les matrices suivantes :

$$M = \left(\frac{1}{i+j} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1,3 \rrbracket \\ j \in \llbracket 1,4 \rrbracket}} \quad N = \left(n_{i,j} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1,5 \rrbracket \\ j \in \llbracket 1,3 \rrbracket}} \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1,5 \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1,3 \rrbracket, n_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i < j \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $P = (p_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1,5 \rrbracket} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $i, j \in \llbracket 1,5 \rrbracket$, $p_{i,j} = \binom{i-1}{j-1}$.

Définition 17.6 –

- Une matrice qui possède le même nombre de lignes et de colonnes est une **matrice carrée**. L'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.
- Une matrice qui ne possède qu'une seule ligne est une **matrice ligne**.
- Une matrice qui ne possède qu'une seule colonne est une **matrice colonne**. Dans certaines applications, on utilise le terme "vecteur" pour parler d'une matrice colonne.

Exemple 17.7 –

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 3.
- $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.
- $B = (1 \quad 2 \quad 3 \quad -5)$ est une matrice ligne.

Définition 17.8 – Soit M une matrice (n, p) où n et p désignent deux entiers strictement positifs.

On note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de la matrice M . Ces lignes sont écrites via des matrices-ligne.

On note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de la matrice M . Ces colonnes sont écrites via des matrices-colonne.

Exemple 17.9 – Les lignes et les colonnes de la matrice A de l'exemple ?? sont

$$\begin{aligned} L_1 &= (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4) & L_2 &= (5 \quad 6 \quad 7 \quad 8) & L_3 &= (9 \quad 10 \quad 11 \quad 12) \\ C_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} & C_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} & C_3 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} & C_4 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 17.10 – Écrire les colonnes C_1 et C_3 des matrices E et D .

Pour la matrice E :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1-i \\ -3+2i \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

Pour la matrice D :

$$C_1 = (4) \quad C_3 = (0).$$

Définition 17.11 –

- On appelle **matrice nulle** à n lignes et p colonnes et on note $0_{n,p}$ la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls. Si $n = p$, on écrit simplement 0_n au lieu de $0_{n,n}$.
- On appelle **matrice identité** de taille n et on note I_n la matrice **carrée** dont les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 et tous les autres sont égaux à 0. Autrement dit,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 17.12 – Exprimer les matrices suivantes.

$$\bullet 0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bullet I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bullet 0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bullet I_{3,2} \text{ n'existe pas.}$$

Spoiler Alert – Nous verrons plus tard dans un chapitre sur les espaces vectoriels que la matrice identité représente (dans un certain sens) l'application identité.

II – Calcul matriciel

1 – Addition et multiplication externe

Dans ce paragraphe, les deux entiers naturels n et p non nuls sont fixés.

Définition 17.13 – Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle **somme** de A et B et on note $A + B$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

Exemple 17.14 – $\begin{pmatrix} 1 & e & 3 \\ \ln 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & \pi & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & e & 4 \\ \ln(2) & 5 + \pi & 0 \end{pmatrix}$



ATTENTION ! On ne peut additionner que des matrices de même taille.

Définition 17.15 – Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On appelle **produit externe** de A par le scalaire (nombre) λ la matrice λA de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

Exemple 17.16 – $2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \quad i \begin{pmatrix} 1+i & i & 3 \\ \ln 2 & -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i-1 & -1 & 3i \\ i \ln 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 17.17 – Propriétés de l'addition de matrices

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + B = B + A$
- $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$

Remarque 17.18 – En fait, $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif.

Proposition 17.19 – Propriétés de la multiplication par un scalaire

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ | 2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ | 3. $\lambda(\mu A) = (\mu \times \lambda)A$ |
| 4. $0.A = 0_{n,p}$ | 5. $1.A = A$ | 6. $-A = (-1).A$ |

Définition 17.20 – Soit r un entier naturel non nul et $M, A_1, A_2, \dots, A_r$ des matrices de même taille (n, p) .

On dit que la matrice M est une **combinaison linéaire des matrices** $A_1, A_2, \dots, A_r$ lorsqu'il existe des scalaires (nombres) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels qu'on puisse écrire

$$M = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_r A_r = \sum_{k=1}^r \lambda_k A_k.$$

Une combinaison linéaire de matrices est donc une somme pondérée de matrices.

Exemple 17.21 – La matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car on a $M = 2A_1 - 3A_2 + 4A_3$.

2 – Matrices élémentaires

Définition 17.22 – Lorsque x et y sont des nombres réels, on appelle **symbole de Kronecker de x et y** et on note $\delta_{x,y}$ le nombre réel qui vaut 1 si $x = y$ et 0 sinon. En résumé,

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Exemple 17.23 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice identité de taille n peut ainsi s'écrire $I_n = (\delta_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Exemple 17.24 – Soient x, y , et z des réels. Que vaut $\delta_{x,y} \delta_{y,z}$?

Si l'un des deux termes de $\delta_{x,y} \delta_{y,z}$ est nul, le produit est nul. Ainsi, pour que $\delta_{x,y} \delta_{y,z}$ soit non-nul, il faut que $\delta_{x,y} = \delta_{y,z} = 1$, c'est-à-dire que $x = y = z$.

Donc $\delta_{x,y} \delta_{y,z} = 1$ si $x = y = z$ et 0 sinon.

Définition 17.25 – Pour tous entiers $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $b \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la **matrice élémentaire** $E_{a,b}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice de taille (n, p) où tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la a -ième ligne et b -ième colonne qui vaut 1 :

$$E_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$E_{a,b}$ peut aussi être définie comme la matrice $(\delta_{a,i} \delta_{b,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$.

Exemple 17.26 – Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, il y a 6 matrices élémentaires qui sont :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 17.27 – Décomposition en combinaison linéaire de matrices élémentaires

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des matrices élémentaires $E_{a,b}$.

Démonstration. Toute matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ s'écrit de manière unique sous la forme $A = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i,j} E_{i,j}$. □

Exemple 17.28 –

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ e & \pi \end{pmatrix} = E_{1,1} + iE_{1,2} + eE_{2,1} + \pi E_{2,2}.$$

3 – Multiplication de deux matrices

Définition 17.29 – Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice quelconque et $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne. On appelle **produit** de la matrice A par la matrice B , la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ notée $A \times B$ ou AB , définie par

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_1 + a_{1,2}b_2 + \cdots + a_{1,p}b_p \\ a_{2,1}b_1 + a_{2,2}b_2 + \cdots + a_{2,p}b_p \\ \vdots \\ a_{n,1}b_1 + a_{n,2}b_2 + \cdots + a_{n,p}b_p \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la matrice AB est une matrice colonne de taille n dont le i -ième coefficient ($i \in \llbracket 1, n \rrbracket$) est donné par

$$\sum_{k=1}^p a_{i,k} b_k.$$

Exemple 17.30 – Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Calculer AX .

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0-2 \\ 2-3-8 \\ -1-2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Définition 17.31 – Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices.

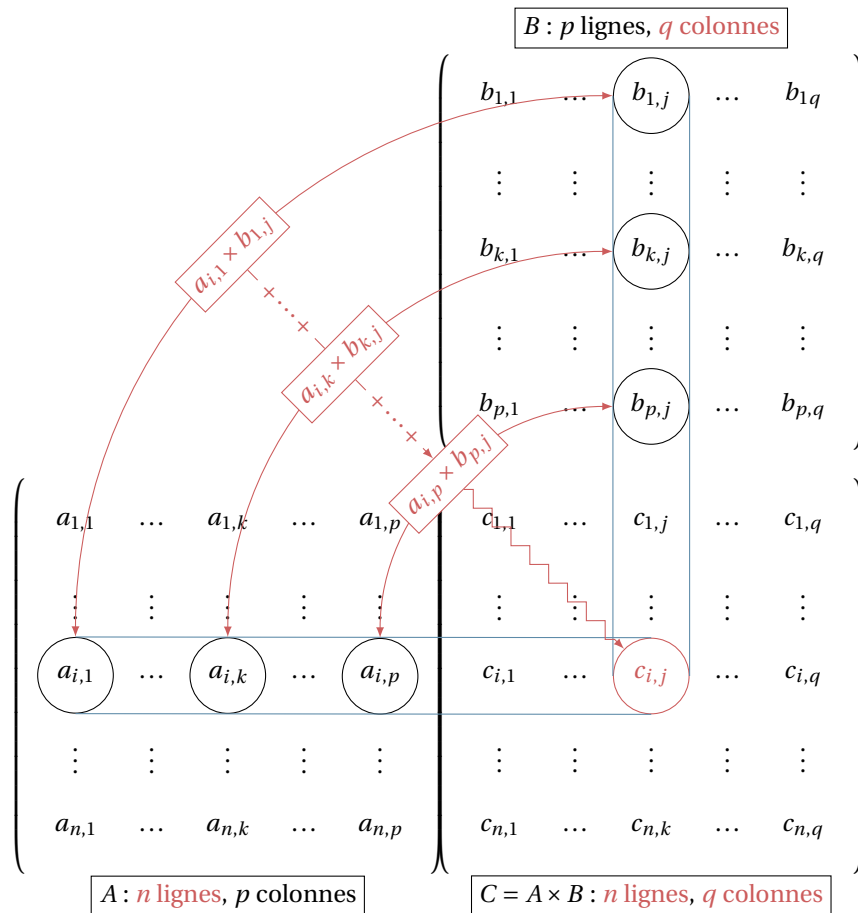
On appelle **produit** de la matrice A par la matrice B , la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ notée $A \times B$ ou AB , définie par

$$AB = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,q} \end{pmatrix} \quad \text{où } c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k}b_{k,j}.$$



ATTENTION ! Pour pouvoir effectuer le produit AB , le nombre de colonnes de A doit être **égal** au nombre de lignes de B . Sinon le produit n'est pas défini.

Illustration du produit matriciel :



Exemple 17.32 – Calculer les produits matriciels suivants après avoir donné l'ensemble de matrices auquel ils appartiennent.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \text{ et } A = (2 + 12 + 30) = (44)$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 + 12 + 30 \\ 2 - 8 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ -6 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } C = \begin{pmatrix} -4 + 0 & -2 + 18 \\ 10 + 0 & 5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 16 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$
- $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } D = \begin{pmatrix} -4 + 5 & 6 + 1 \\ 0 + 30 & 0 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 30 & 6 \end{pmatrix}$
- $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et } E = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & 12 & 20 \\ 6 & 18 & 30 \end{pmatrix}$
- $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $H = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \\ 9 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ et } H = \begin{pmatrix} 2x - 3y + 7z \\ 4x + y - 6z \\ 9x + 5z \end{pmatrix}$

**ATTENTION !**

- La multiplication matricielle **n'est pas commutative**. En général, le produit AB (s'il existe) n'est pas égal au produit BA (s'il existe aussi).
- Un produit de deux matrices peut être égal à la matrice nulle sans qu'aucune de ces deux matrices ne soit égale à la matrice nulle.

Proposition 17.33

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

$$\begin{array}{c} \text{Position } j \xrightarrow{A \times} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est la } j\text{-ième colonne de } A \end{array} \quad \begin{array}{c} (0 \cdots 1 \cdots 0) \times A \text{ est la } i\text{-ième ligne de } A \\ \xleftarrow{\text{Position } i} \end{array}$$

Plus généralement, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, en notant $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A : $AX = \sum_{j=1}^p x_j C_j$.

Démonstration. Simple calcul! □

Par convention, quand une matrice contient beaucoup de zéros, on omet souvent de les noter par souci de lisibilité.

Proposition 17.34 – Propriétés du produit matriciel

Soit $(n, p, q, r) \in (\mathbb{N}^*)^4$. Soit $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- ▷ Le produit matriciel est *associatif* :

$$(AB)C = A(BC);$$

- ▷ Le produit matriciel est *distributif* par rapport à l'addition :

$$A(B + B') = AB + AB' \quad \text{et} \quad (A + A')B = AB + A'B;$$

- ▷ Le produit matriciel et le produit par les scalaires « commutent » :

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

Démonstration. On note avec les lettres minuscules correspondantes les coefficients des matrices A, A', B, B', C .

1.

$$(AB)C = \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,k} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}} \times (c_{k,l})_{\substack{k \in \llbracket 1, q \rrbracket \\ l \in \llbracket 1, r \rrbracket}} = \left(\sum_{k=1}^q \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,k} \right) c_{k,l} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ l \in \llbracket 1, r \rrbracket}} = \left(\sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,k} c_{k,l} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ l \in \llbracket 1, r \rrbracket}}$$

$$\begin{aligned} A(BC) &= (a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}} \times \left(\sum_{k=1}^p b_{j,k} c_{k,l} \right)_{\substack{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ l \in \llbracket 1, r \rrbracket}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} \left(\sum_{k=1}^p b_{j,k} c_{k,l} \right) \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ l \in \llbracket 1, r \rrbracket}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p a_{i,j} b_{j,k} c_{k,l} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ l \in \llbracket 1, r \rrbracket}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,k} c_{k,l} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ l \in \llbracket 1, r \rrbracket}} = (AB)C \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
AB + A'B &= \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,k} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}} + \left(\sum_{j=1}^p a'_{i,j} b_{j,k} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,k} + a'_{i,j} b_{j,k} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^p (a_{i,j} + a'_{i,j}) b_{j,k} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}} \\
&= (a_{i,j} + a'_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}} \times (b_{j,k})_{\substack{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}} = (A + A')B
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
(\lambda A)B &= (\lambda a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}} \times (b_{j,k})_{\substack{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^p \lambda a_{i,j} b_{j,k} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} \lambda b_{j,k} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}} = \left(\lambda \sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,k} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}} \\
&= (a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}} \times (b_{j,k})_{\substack{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}} = \lambda \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,k} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}} \\
&= A(\lambda B) = \lambda(AB)
\end{aligned}$$

□

L'associativité du produit nous permet d'écrire ABC à la place de $(AB)C$ ou $A(BC)$. De la même façon, c'est l'associativité qui permet d'écrire A^3 pour désigner aussi bien $(AA)A$ que $A(AA)$.

Remarque 17.35 – On peut retenir que les règles de calcul sont les mêmes qu'avec les réels à l'exception que la commutativité n'est en général pas vraie pour les matrices.

4 – Transposée d'une matrice

Définition 17.36 – Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A et on note A^T la matrice définie par :

$$A^T = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq p}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

Autrement dit, la matrice A^T est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A .

Remarque 17.37 – On rencontre aussi souvent la notation ${}^t A$ au lieu de A^T .

Exemple 17.38 –

- Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

alors la transposée de A est :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Les colonnes de A sont les lignes de A^T .

- Soit $B \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

alors la transposée de B est :

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R}).$$

Proposition 17.39 – Propriété de la transposition

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad (A^T)^T = A,$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad (\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T,$
3. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad (AB)^T = B^T \times A^T$ (Attention à l'ordre !!),

Démonstration. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$

$$1. \quad A^T = (a_{i,j})_{\substack{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ i \in \llbracket 1, n \rrbracket}} \text{ et } (A^T)^T = (a_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}} = A.$$

$$2. \quad \text{Soient } B = (b_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

$$(\lambda A + B)^T = (\lambda a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ i \in \llbracket 1, n \rrbracket}} = \lambda (a_{i,j})_{\substack{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ i \in \llbracket 1, n \rrbracket}} + (b_{i,j})_{\substack{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ i \in \llbracket 1, n \rrbracket}} = \lambda A^T + B^T.$$

$$3. \quad \text{Soit } B = (b_{j,k})_{\substack{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}}.$$

$$(AB)^T = \left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} b_{j,k} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}}^T = \left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} b_{j,k} \right)_{\substack{k \in \llbracket 1, q \rrbracket \\ i \in \llbracket 1, n \rrbracket}}$$

$$B^T \times A^T = (b_{j,k})_{\substack{k \in \llbracket 1, q \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}} \times (a_{i,j})_{\substack{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ i \in \llbracket 1, n \rrbracket}} = \left(\sum_{k=1}^m b_{j,k} a_{i,j} \right)_{\substack{k \in \llbracket 1, q \rrbracket \\ i \in \llbracket 1, n \rrbracket}}.$$

$$\text{Donc } (AB)^T = B^T \times A^T.$$

□

Matrices symétriques

Définition 17.40 – Une matrice carrée A est dite **symétrique** si et seulement si elle est égale à sa transposée i.e. $A^T = A$.

Notations : On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.

Exemple 17.41 – La matrice $A = \begin{pmatrix} -9 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique : $A^T = A$.

Exemple 17.42 – Soient A et B deux matrices carrées de même dimension.

1. Montrer que la somme de deux matrices symétriques est une matrice symétrique.
2. Le produit de deux matrices symétriques est-il toujours une matrice symétrique ?
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cela soit le cas.

1. Soient A et B deux matrices symétriques, calculons $(A+B)^T$.

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A+B \quad \text{car les deux matrices sont symétriques.}$$

2. Soient A et B deux matrices symétriques, calculons $(AB)^T$.

$$(AB)^T = B^T A^T = BA \quad \text{car les deux matrices sont symétriques.}$$

AB est une matrice symétrique si et seulement si $(AB)^T = AB$, or d'après le calcul précédent $(AB)^T = BA$. Ainsi la matrice AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$ i.e. si les matrices A et B commutent.

Matrices antisymétriques

Définition 17.43 – Une matrice carrée A est dite **antisymétrique** si et seulement si elle est égale à l'opposé de sa transposée i.e. $A^T = -A$.

Notations : On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Exemple 17.44 – $\begin{pmatrix} 0 & 12 & -e \\ -12 & 0 & -i \\ e & i & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique : $A^T = -A$.

Remarque 17.45 – Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont forcément nuls.

En effet, les coefficients diagonaux restant inchangés par l'opération de transposition, les coefficients diagonaux de A sont égaux à ceux de A , qui sont égaux à ceux de $-A$ ssi ils sont tous nuls.

5 – Matrices diagonales et triangulaires

Définition 17.46 – Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice **carrée** d'ordre n . On dit que A est :

- **triangulaire supérieure** si $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i > j) \implies (a_{i,j} = 0)$, c'est-à-dire si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Les $*$ désignent ici des scalaires quelconques, c'est à dire des éléments de $\mathbb{K}$.

- **triangulaire inférieure** si $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i < j) \implies (a_{i,j} = 0)$, c'est-à-dire si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

- **diagonale** si $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i \neq j) \implies (a_{i,j} = 0)$, c'est-à-dire si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Cette matrice se note $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

- **scalaire** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \text{Diag}(\lambda, \dots, \lambda)$.

Remarque 17.47 – I_n est donc une matrice scalaire : $I_n = \text{Diag}(1, 1, \dots, 1)$.

Exemple 17.48 – Pour chacune des matrices suivantes, indiquer si elle est triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, diagonale, scalaire.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

	Triangulaire supérieure	Triangulaire inférieure	Diagonale	Scalaire
A	×			
B	×	×	×	
C		×		
D				
E	×	×	×	×
F	×	×	×	×

Proposition 17.49

Soit A une matrice carrée. A est diagonale si et seulement si elle est triangulaire inférieure et triangulaire supérieure.

Proposition 17.50 – Produit et matrices diagonales

La somme et le produit de deux matrices diagonales sont des matrices diagonales. Plus précisément, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

Démonstration. On peut le montrer directement ou le voir comme conséquence de la proposition suivante. □

Proposition 17.51 – Produit et matrices triangulaires

La somme et le produit de deux matrices diagonales sont des matrices diagonales.

La somme et le produit de deux matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) sont deux matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures).

Démonstration. $\triangleright$ C'est évident en ce qui concerne les sommes.

$\triangleright$ Soient A et B deux matrices triangulaires supérieures de taille n . $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et $B = (b_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Comme A et B sont triangulaires supérieures, on sait que pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si $i > j$, alors $a_{i,j} = 0$ et $b_{i,j} = 0$.

On note $C = AB$ et pour tout $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $c_{i,k}$ le coefficient de ligne i et de colonne k de C .

On a alors que $c_{i,k} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,k}$. Montrons que si $i > k$, alors $c_{i,k}$ est nul.

On suppose $i > k$. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Si $j < i$, alors comme A est triangulaire supérieure, $a_{i,j} = 0$ donc $a_{i,j} b_{j,k} = 0$.

Sinon $j \geq i > k$, donc $j > k$. Comme B est triangulaire supérieure, $b_{j,k} = 0$ donc $a_{i,j}b_{j,k} = 0$.

Donc, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,j}b_{j,k} = 0$, d'où $c_{i,k} = 0$.

On a bien montré que $i > k \Rightarrow c_{i,k} = 0$, c'est à dire que C est triangulaire supérieure.

- ▷ Un raisonnement similaire montre que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.
- ▷ Soient A et B deux matrices diagonales. Alors elles sont triangulaires inférieures et supérieures, donc leur produit est triangulaire inférieur et supérieur, c'est à dire diagonal.

□

III – Puissance d'une matrice carrée

1 – Introduction sur un exemple

On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1, & v_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = 3u_n + 2v_n, \\ \forall n \in \mathbb{N} & v_{n+1} = u_n + 2v_n. \end{cases}$$

On souhaite déterminer les expressions de u_n et de v_n en fonction de n .

Une méthode possible, vue dans un exercice du Chapitre 4, est de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. On en déduit ensuite l'expression u_n en fonction de n puis celle v_n en fonction de n .

Voyons comment on peut trouver ces expressions en utilisant les matrices.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, on a alors $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$. Le système peut donc se mettre sous la forme :

$$U_{n+1} = AU_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut montrer par récurrence que $U_n = A^n U_0$ avec $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

Pour déterminer les expressions de u_n et v_n , il nous "suffit" alors de calculer A^n et d'effectuer le produit matriciel $A^n \times U_0$.

2 – Définition et premiers exemples

Définition 17.52 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On pose :

$$A^0 = I_n$$

et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$:

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$$



ATTENTION ! Le calcul de A^2 , par exemple, ne consiste **pas** à élever les éléments de A au carré !

Exemple 17.53 – Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

Proposition 17.54

- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tous entiers r et s dans $\mathbb{N}$: $A^r A^s = A^{r+s}$.
- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tous entiers r et s dans $\mathbb{N}$: $(A^r)^s = A^{rs}$.



ATTENTION ! Les autres règles usuelles sur les puissances dans $\mathbb{K}$ ne sont **pas** vraies dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Par exemple, $(AB)^2 \neq A^2B^2$.

Exemple 17.55 – On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $(AB)^2$ et A^2B^2 . Conclure. Les matrices AB et BA sont-elles égales?

$$\text{On a : } AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc, } (AB)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par ailleurs, } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc, } A^2B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ On a donc } (AB)^2 \neq A^2B^2.$$

Par l'absurde, supposons que $AB = BA$. Alors, $(AB)^2 = ABAB = AAB B = A^2B^2$. Absurde.
Donc, $AB \neq BA$.

Exemple 17.56 – Calculer la puissance n -ième de la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons tout d'abord B^2 et B^3 et essayons de conjecturer une formule pour B^n .

$$\text{On a } B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2. \text{ Donc, } B^3 = B^2B = 0_2 \times B = 0_2. \text{ Ainsi, pour tout } n \geq 2,$$

$$B^n = B^2B^{n-2} = 0_2B^{n-2} = 0_2.$$

Exemple 17.57 – Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer la puissance n -ème de A .

Calculons d'abord A^2 , A^3 et A^4 pour conjecturer l'expression de A^n . On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Et } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Et } A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On conjecture que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons cette formule par récurrence sur n .

On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ».

Initialisation : $A^0 = I_2$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

On effectue le produit matriciel et on obtient $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3 – Formule du binôme de Newton

Définition 17.58 – Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B **commutent** si $AB = BA$.

Proposition 17.59 – Formule du binôme de Newton

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A et B **commutent** (i.e. $AB = BA$). Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^{p-k} B^k.$$

Remarque 17.60 – La formule du binôme de Newton sert à calculer les puissances d'une matrice **à condition** que l'on puisse écrire celle-ci comme la somme de deux matrices qui commutent et dont on sait expliciter les puissances. Le cas le plus fréquent est celui pour lequel la matrice considérée est la somme d'une matrice diagonale et d'une matrice dont les puissances sont nulles à partir d'un certain rang, **et qui commutent**.

Exemple 17.61 – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $A = D + J$.

Je calcule $D + J$: $D + J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$. J'ai bien montré que $A = D + J$.

2. Calculer J^2 . En déduire J^n pour tout $n \geq 2$.

Je calcule J^2 : $J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$.

Dès lors pour tout $n \geq 2$, $J^n = J^2 \times J^{n-2} = 0_2 \times J^{n-2} = 0_2$.

3. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme la matrice D est diagonale, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} J.$$

Tout d'abord, comme les matrices D et J commutent ($D = I_2$), je peux appliquer la formule du binôme de Newton à la matrice $A = D + J$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (D + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} J^k.$$

Puis dans cette somme, le terme d'indice k est nul dès lors que $k \geq 2$, d'après la question 2.. Enfin puisque $\binom{n}{0} = 1$ et $J^0 = I_2$, alors

$$A^n = \binom{n}{0} D^n J^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} J^1 + \underbrace{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} D^{n-k} J^k}_{=0_2 \text{ car } J^k=0_2 \text{ pour } k \geq 2} = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} J.$$

5. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{1} = n$ donc

$$A^n = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV – Systèmes linéaires

1 – Généralités

Définition 17.62 – On appelle **système linéaire** de n équations à p inconnues $x_1, \dots, x_p$ tout système (S) de la forme

$$(S) \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où $a_{i,j}$ et b_i désignent des réels supposés connus.

La i -ème équation du système (S) est notée L_i et s'appelle la i -ème **ligne** du système (S).

Résoudre le système (S), c'est déterminer tous les p -uplets $(x_1, \dots, x_p)$ vérifiant les n équations du système. Si pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a $b_i = 0$, on dit que le système (S) est **homogène**.

Exemple 17.63 –

- Le système suivant est un système de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

Le couple $(-1, 3)$ en est une solution car on a $2 \times (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$ et $-1 - 3 = -4$.

- Le système suivant est un système **homogène** de trois équations à trois inconnues.

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ 3x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

On note que le triplet $(0, 0, 0)$ est solution évidente, mais il peut y en avoir d'autres...

Remarque 17.64 –

- Il ne faut pas croire qu'un système linéaire admet **toujours** une **unique** solution! En effet, certains systèmes linéaires admettent une infinité de solutions et d'autres n'admettent aucune solution.

Proposition 17.65

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ Et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Alors l'équation matricielle $AX = B$ est équivalente à un système d'équations linéaires :

$$AX = B \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Autrement dit, le p -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est solution du système à n équations et p inconnues si et seulement si la matrice colonne X est solution de l'équation matricielle $AX = B$.

Définition 17.66 – Étant donné le système linéaire à n équations et p inconnues suivant

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases},$$

la matrice des coefficients $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ s'appelle la **matrice associée** au système.

Exemple 17.67 – Réécrire chacun des systèmes suivants sous forme d'une équation matricielle.

$$\bullet \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

Le système se réécrit sous la forme $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ Et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \begin{cases} 3x + y + z + 2t = 1 \\ \quad y - 2z + t = 3 \\ \quad \quad 4z - t = 2 \\ \quad \quad \quad 2t = -4 \end{cases}$$

Le système se réécrit sous la forme $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Remarque 17.68 – Les matrices permettent donc une écriture beaucoup plus succincte d'un système d'équations linéaires. Surtout, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application $X \mapsto AX$ de $\mathbb{K}^p = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est linéaire au sens que nous avons donné à ce terme au début du chapitre « Équations différentielles linéaires », à savoir que pour tous $X, Y \in \mathbb{K}^p$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $A(\lambda X + \mu Y) = \lambda(AX) + \mu(AY)$. Tout système linéaire est donc en ce sens une « équation linéaire ». Le résultat suivant en découle.

Théorème 17.69 – Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. On s'intéresse au système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$. Deux situations peuvent se présenter :

- soit ce système n'a pas de solution, on dit qu'il est **incompatible**,
- soit il en a, on dit qu'il est **compatible**. Elles sont dans ce cas soumises au principe bien connu suivant :

$$\text{Solution générale du système complet} = \text{Solution particulière} + \text{Solution générale du système HOMOGÈNE}$$

Démonstration. Rappelons brièvement la raison de ce résultat. Dans le cas où le système étudié possède une solution X_{part} , alors pour tout $X \in \mathbb{K}^p$:

$$\begin{aligned} AX = B &\iff AX = AX_{\text{part}} \iff A(X - X_{\text{part}}) = 0 \\ &\iff X - X_{\text{part}} \text{ est une solution du système HOMOGÈNE associé} \\ &\iff X \text{ est la somme de la solution particulière } X_{\text{part}} \\ &\quad \text{et d'une solution du système HOMOGÈNE associé.} \end{aligned}$$

□

2 – Systèmes échelonnés

Définition 17.70 – Considérons un système linéaire quelconque :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Un tel système est dit **échelonné** si les coefficients $a_{i,j}$ vérifient les deux conditions suivantes :

- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$
- si tous les coefficients situés à gauche d'un coefficient $a_{i,j}$ sont nuls, alors il en est de même des coefficients situés en dessous du coefficient $a_{i,j}$.

Sur chaque ligne, la première inconnue figurant avec un coefficient non nul est appelée une inconnue **principale** du système. Les inconnues non principales sont dites **secondaires**.

Si $n = p$, un système échelonné est dit **triangulaire** et les coefficients $a_{i,i}$ sont appelés les **pivots** du système.

Exemple 17.71 –

- Le système suivant est échelonné :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 5 \\ x_4 + 2x_5 = 7 \end{cases}$$

Les inconnues principales sont x_1, x_2 et x_4 . Les inconnues x_3 et x_5 sont les inconnues secondaires du système.

- Le système suivant est échelonné :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Les inconnues principales sont x_1, x_2 et x_3 .

Il n'y a pas d'inconnue secondaire.

- Le système suivant n'est pas échelonné :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 5 \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 7 \end{cases}$$

La résolution des systèmes échelonnés est très simple : on exprime les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires (s'il y en a), en partant de la dernière équation du système et en remontant.

Exemple 17.72 – Résolvons le système échelonné suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$$

On commence par exprimer les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires en partant de la dernière équation.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ y = 4 - 2z \end{cases} \quad (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - (4 - 2z) - z \\ y = 4 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + z \\ y = 4 - 2z \end{cases}$$

Ainsi $S = \{(-3 + z, 4 - 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 17.73 – Résolvons le système échelonné suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Ce système est triangulaire, il n'y a donc pas d'inconnue secondaire. Ce système possède alors une unique solution qu'on obtient en remontant les équations.

$$(S) \iff \begin{cases} x = 1 - y - z \\ y = 2 - z \\ z = 3 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} x = 1 - y - 3 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Ainsi $S = \{(-1, -1, 3)\}$.

Nous avons vu dans cette partie comment résoudre des systèmes échelonnés, nous allons donc apprendre dans la partie suivante à échelonner des systèmes.

3 – Opérations élémentaires et algorithme du pivot

Définition 17.74 (Opérations élémentaires sur les lignes) – Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **opération élémentaire** (sur les lignes d'un système linéaire) les opérations suivantes :

- permutation des i -èmes et j -èmes lignes, notée : $L_i \leftrightarrow L_j$,
- multiplication de la i -ème ligne par $\lambda \neq 0$, notée : $L_i \leftarrow \lambda L_i$,
- addition de la j -ème ligne multipliée par λ à la i -ème ligne (avec $i \neq j$), notée : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Remarque 17.75 – Transformer un système linéaire donné, par des opérations élémentaires **SUR LES LIGNES** ne modifie pas l'ensemble de ses solutions ! En effet, les opérations élémentaires préservent les équivalences, car on peut toujours les défaire. L'opération $L_1 \leftrightarrow L_2$ se défait elle-même par exemple. L'opération $L_1 \leftarrow 2L_1$ est défaite par l'opération $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$ et l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ par l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.



ATTENTION ! Il est très important de n'appliquer qu'une opération élémentaire à la fois. Sinon, on peut obtenir un système qui **n'est plus** équivalent.

L'idée est simple : utiliser les opérations élémentaires pour faire disparaître l'inconnue x_1 dans toutes les lignes sauf la première puis recommencer avec le sous-système constitué des lignes L_2 à L_n . On obtient finalement (en recommençant un nombre fini de fois la méthode) un système échelonné.

Théorème 17.76

- Tout système linéaire (S) peut être transformé à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes (via la méthode du pivot de Gauss) en un système échelonné (S') qui lui est équivalent.
- Dans le cas où (S) est un système de n équations à n inconnues, alors (S) est un système de Cramer si et seulement si le système échelonné (S') (qui est alors triangulaire) possède n pivots tous non nuls.

Appliquons cette méthode sur un exemple.

Exemple 17.77 – On souhaite résoudre le système :

$$(S) \quad \begin{cases} -y + 2z = 7 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ x + y - z = -4 \end{cases}$$

Première étape : Il faut que la première ligne contienne la première inconnue (ici x). Si ce n'est pas le cas, on échange la première ligne avec une autre ligne qui contient x (avec si possible le coefficient 1 ou -1 pour simplifier les calculs suivants).

Ici, on échange donc les lignes 1 et 3. Le système devient :

$$\begin{cases} x + y - z = -4 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -y + 2z = 7 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, on fait « disparaître » la première inconnue dans les autres lignes. En d'autres termes, on « nettoie » la première colonne des x .

On commence par supprimer le x dans la deuxième ligne :

$$\begin{cases} x + y - z = -4 \\ y + 6z = 9 \\ -y + 2z = 7 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

Puis on supprime le x dans la troisième ligne : il n'y a rien à faire ici.

Deuxième étape : On ne modifie plus et on n'échange plus la ligne 1. Il faut ensuite que la deuxième équation contienne la deuxième inconnue (ici y). Si ce n'est pas le cas, on échange la deuxième ligne avec une autre ligne contenant y (si possible avec le coefficient 1 pour simplifier les calculs suivants), mais **sans utiliser la ligne 1**.

Ici il n'y a rien à faire : la deuxième ligne contient déjà y .

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, on fait « disparaître » la deuxième inconnue dans la troisième ligne. En d'autres termes, on « nettoie » la deuxième colonne des y .

Il suffit ici d'additionner les lignes 2 et 3 :

$$\begin{cases} x + y - z = -4 \\ y + 6z = 9 \\ 8z = 16 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Troisième étape : On obtient alors un système échelonné (ici il est même triangulaire) que l'on sait résoudre.

La troisième équation donne $z = \frac{16}{8} = 2$. En remplaçant z dans la deuxième équation, on obtient $y + 6 \times 2 = 9$ soit $y + 12 = 9$. Ainsi, $y = 9 - 12 = -3$. Enfin, en remplaçant y et z dans la première ligne, on obtient : $x - 3 - 2 = -4$ soit $x - 5 = -4$. D'où $x = -4 + 5 = 1$. Ainsi, l'unique solution du système est : $\mathcal{S} = \{(1, -3, 2)\}$.

Remarque 17.78 – La résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss n'est pas difficile car c'est toujours la même chose. Elle est, en revanche, très calculatoire. Les erreurs de calculs sont très vite arrivées. Il faut donc prendre son temps et vérifier que le (les) p -uplet(s) obtenu(s) est (sont) bien solution(s) du système. Il est également impératif d'**écrire les opérations élémentaires** que vous effectuez étape après étape.

Une fois le système échelonné, on peut « supprimer » les lignes « $0 = 0$ ». En effet, elles sont vérifiées quelques soient les valeurs des inconnues, et ne génèrent aucune contrainte.

Trois situations peuvent alors se produire.

Cas 1 : Il y a une ligne du type « $0 = c$ » où c est une constante non-nulle.

Cette ligne ne sera jamais vérifiée, peu importe les valeurs prises par les inconnues. Le système n'a alors pas de solution.

Exemple 17.79 – On cherche à résoudre le système (S_1) : $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 3y = -1 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$ d'inconnues réelles x, y, z .

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x + y = 0 \\ 2x - 3y = -1 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x + y = 0 \\ -5y = -1 \\ 5y = 2 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x + y = 0 \\ -5y = -1 \\ 0 = 1 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

La dernière ligne est fausse, donc ce système n'a pas de solution.

Cas 2 : Le système obtenu est triangulaire.

C'est le cas le plus simple. Dans ce cas, il y a une unique solution, facilement déterminée.

Exemple 17.80 – Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système (S_2) :
$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ 2x + 5y + 3z = a+1 \\ x + y + 4z = 2a \\ x + 4y - z = 0 \end{cases} \quad \text{d'inconnues } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \boxed{1}x + 2y + z = a \\ 2x + 5y + 3z = a+1 \\ x + y + 4z = 2a \\ x + 4y - z = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x + 2y + z = a \\ -\boxed{1}y + z = -a+1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -y + 3z = a & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 2y - 2z = -a & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x & -z = 3a-2 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \boxed{1}y + z = -a+1 & \\ -\boxed{4}z = 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ -4z = a-2 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{4}x & & = 12a-7 & L_1 \leftarrow 4L_1 + L_3 \\ \boxed{4}y & & = -4a+3 & L_2 \leftarrow 4L_2 - L_3 \\ & 4z = 1 & \\ & 0 = a-1 & L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $a \neq 1$, alors la dernière ligne n'est pas vérifiée et le système est incompatible. L'ensemble des solutions est $\emptyset$.
- Si $a = 1$, alors la dernière ligne est $0 = 0$, qui est vraie, donc le système admet une unique solution, le triplet $\left(\frac{12a-7}{4}, \frac{-4a+3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, c'est-à-dire $\left(\frac{5}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

Cas 3 : Il y a une ou plusieurs inconnues secondaires.

Le système possède alors une infinité de solutions. Dans ce cas, les inconnues principales peuvent être paramétrées à l'aide des inconnues secondaires. Autrement dit, on attribue les valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ aux différentes inconnues auxiliaires, puis on exprime les inconnues principales en fonction de ces paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots$.

Exemple 17.81 – Résoudre le système (S_3) :
$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 & L_1 \\ 3x + y + 3z = 1 & L_2 \end{cases} \quad \text{d'inconnues } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \boxed{2}x - y - z = 0 & L_1 \\ 3x + y + 3z = 1 & L_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2}x - \boxed{5}y - z = 0 \\ \boxed{5}y + 9z = 2 & L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{10}x & + 4z = 2 & L_1 \leftarrow 5L_1 + L_2 \\ \boxed{5}y & + 9z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Le pivot est terminé et z est une inconnue secondaire. On utilise alors un paramètre valant z pour décrire l'ensemble des solutions.

$$\begin{cases} \boxed{2}x - y - z = 0 & L_1 \\ 3x + y + 3z = 1 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{1}{10}(2-4\lambda) \\ y = \frac{1}{5}(2-9\lambda) \\ z = \lambda \end{cases}$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de ce système est donné par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \left(-\frac{2}{5}\lambda + \frac{1}{5}, -\frac{9}{5}\lambda + \frac{2}{5}, \lambda \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \left(-\frac{2}{5}, -\frac{9}{5}, 1 \right) + \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0 \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dans le cas où le système admet des solutions, on peut donner une interprétation géométrique de l'ensemble de celles-ci. Lorsque le nombre d'inconnues est inférieur à 3, on reconnaîtra un point, une droite, un plan ou même l'ensemble vide.

V – Matrices inversibles

1 – Définition et propriétés

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, vous savez depuis le collège que : $\{x \in \mathbb{R} \mid ax = b\} = \begin{cases} \left\{\frac{b}{a}\right\} & \text{si } a \neq 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } a = b = 0 \\ \emptyset & \text{si } a = 0 \text{ mais } b \neq 0. \end{cases}$

Et au fond, la question principale est simple - peut-on diviser par a ou pas? La même question se pose à nous dans ce chapitre car nous pouvons écrire tout système linéaire sous forme matricielle $AX = B$. Une division matricielle est-elle possible dans ce cadre? Dans $\mathbb{R}$, tout réel x **AUTRE QUE** 0 possède un inverse $\frac{1}{x}$ défini par les relations $x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1$. Nous allons voir que le monde des matrices offre plus de diversité que le monde des réels, mais que ces mondes sont tout de même ressemblants.

Définition 17.82 – Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice carrée $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = I_n \text{ Et } BA = I_n$$

Si B existe, alors B est unique et on l'appelle la **matrice inverse** de A . On la note A^{-1} .

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ et appelé le groupe linéaire de degré n sur $\mathbb{K}$.

Remarque 17.83 –

- La notion de matrice inversible n'a de sens que pour les matrices carrées.
- Une matrice inversible admet un **unique** inverse.
Si on suppose qu'il existe deux matrices B_1 et B_2 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB_1 = B_1A = I_n$ et $AB_2 = B_2A = I_n$, alors en particulier $(B_1A)B_2 = I_nB_2$ donc $B_1(AB_2) = B_2$ donc $B_1I_n = B_2$ et donc $B_1 = B_2$.

Définition 17.84 – Un système linéaire est dit **de Cramer** si sa matrice est inversible - donc carrée, en particulier.

Pour tous $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$, le système de Cramer $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution, à savoir $A^{-1}B$.

Démonstration. Pour tout $X \in \mathbb{K}^n$: $AX = B \iff X = A^{-1}B$ - on a simplement multiplié par A^{-1} à gauche pour passer de gauche à droite, et par A à gauche pour passer de droite à gauche. $\square$

L'analogie des équations $ax = b$ et $AX = B$ est confortée, mais deux questions se posent naturellement :

- qui sont concrètement les matrices inversibles?
- comment calcule-t-on l'inverse d'une matrice inversible?

Exemple 17.85 –

1. La matrice identité est inversible et $I_n^{-1} = I_n$ car :

$$I_n I_n = I_n \quad \text{Et } I_n I_n = I_n$$

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. En effet :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

3. La matrice carrée nulle O_n n'est pas inversible car :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad O_n \times M = M \times O_n = O_n \neq I_n$$

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas la matrice nulle mais elle n'est pas inversible pour autant.

Quelle que soit la matrice par laquelle on la multiplie à droite, la première ligne du résultat sera constituée de trois zéros et donc la matrice produit ne peut pas être égale à I_3 .

Exemple 17.86 – On considère les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Et } Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice P est inversible d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{2}Q$.

Calculons les produits matriciels PQ et QP . On obtient :

$$PQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$$

et

$$QP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

Ainsi $P \times \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}Q \times P = I_3$ et donc la matrice P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2}Q$.

Exemple 17.87 – On considère la matrice Attila d'ordre 4 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice A n'est pas inversible.

Raisonnons par l'absurde et supposons que la matrice A est inversible. Il existe alors une matrice B telle que $BA = AB = I_4$. On note

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}.$$

La première colonne de la matrice AB est alors

$$\begin{pmatrix} a+e+i+m \\ a+e+i+m \\ a+e+i+m \\ a+e+i+m \end{pmatrix}.$$

Comme par hypothèse $AB = I_4$, on devrait avoir $a+e+i+m = 1$ et $a+e+i+m = 0$. Absurde! Ainsi la matrice A n'est pas inversible.

Dans la pratique, on utilisera souvent le théorème admis suivant pour montrer qu'une matrice est inversible.

Théorème 17.88

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et on a :

$$A^{-1} = B \text{ Et } B^{-1} = A.$$

Exemple 17.89 – Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Alors :

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Ce qui prouve que A et B sont inversibles et qu'elles sont inverses l'une de l'autre.

Avant de passer aux propriétés de l'inversion de matrices, remarquons que le cas des matrices diagonales est facile :

Proposition 17.90

Une matrice diagonale (d'ordre n), $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux d_i sont tous non nuls. Dans ce cas :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 17.91 –

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Proposition 17.92

Soient A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Si A est inversible alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
4. Si A est inversible, alors A est simplifiable à gauche et à droite, i.e. :

$$AB = AC \implies B = C$$

$$BA = CA \implies B = C$$

Démonstration. 1. Si A est inversible d'inverse A^{-1} alors par définition : $AA^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$. Ce qui veut également dire que la matrice A^{-1} est inversible d'inverse A .

2. On a $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ donc d'après le Théorème ??, la matrice AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.

3. On a $A^T \times (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$ alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

4. On a : $AB = AC \implies A^{-1}AB = A^{-1}AC \implies I_nB = I_nC \implies B = C$. De même pour la dernière implication en multipliant à droite par A^{-1} .

□



ATTENTION ! La somme de deux matrices inversibles n'est pas inversible en général. Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}^*$, I_n et $-I_n$ sont inversibles mais $I_n - I_n = 0_n$ ne l'est pas.

Remarque 17.93 –

- Ainsi, $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour la multiplication, mais pas pour l'addition.
- La propriété ?? implique en particulier que si A est une matrice carrée inversible, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est inversible d'inverse $(A^{-1})^n$. Cette dernière matrice est notée A^{-n} .

2 – Cas des matrices carrées d'ordre 2

Proposition 17.94

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration. Montrons cette équivalence par double implication.

($\Leftarrow$) Supposons que $ad - bc \neq 0$ et montrons que la matrice A est inversible. On a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I_2$$

ce qui prouve que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

($\Rightarrow$) Supposons que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible et montrons alors que $ad - bc \neq 0$.

Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $ad - bc = 0$. Posons $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, on a alors :

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2 = 0_2.$$

Ainsi $AB = 0_2$, or la matrice A est inversible donc il existe une matrice inverse A^{-1} telle que $A^{-1}A = I_2$. On a alors :

$$A^{-1} \times AB = A^{-1} \times 0_2 \iff B = 0_2.$$

Ainsi $a = b = c = d = 0$, ceci implique que $A = 0_2$. Or la matrice A est inversible donc non nulle. Absurde. On peut donc conclure que $ad - bc \neq 0$. $\square$

Exemple 17.95 – Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, préciser leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. On commence par calculer $ad - bc$. On a $ad - bc = 2 \times 5 - 6 \times 2 = -2 \neq 0$. La matrice A est donc inversible. D'après ce qui précède son inverse est égal à :

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. On commence par calculer $ad - bc$. On a $ad - bc = 3 \times 4 - 6 \times 2 = 0$ donc la matrice B n'est pas inversible.

3 – Calcul effectif de l'inverse d'une matrice

A l'aide d'un polynôme annulateur



Méthode 17.96 –

Dans certains cas sympathiques, la matrice dont on veut étudier l'inversibilité vérifie une relation faisant intervenir ses propres puissances et la matrice identité. Dans ce cas, on peut directement conclure quant à l'inversibilité de la matrice et on détermine son inverse à peu de frais.

Exemple 17.97 – On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^2 + A$. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse. On commence par calculer A^2 . On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis on calcule $A^2 + A$, on obtient :

$$A^2 + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

Ainsi $A^2 + A = 2I_3$. De cette relation, on déduit que A est inversible et on détermine son inverse. En effet

$$A^2 + A = 2I_3 \iff A(A + I_3) = 2I_3 \iff A \times \frac{1}{2}(A + I_3) = I_3.$$

D'après le Théorème ??, la matrice A est inversible d'inverse $\frac{1}{2}(A + I_3)$. Ainsi :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Calcul de l'inverse par la résolution d'un système

Théorème 17.98

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système linéaire $AX = Y$ admet une unique solution.

Démonstration. Le sens $(\Rightarrow)$ est facile : supposons la matrice A inversible. Alors on a les équivalences :

$$\begin{aligned} (S) &\iff AX = Y \\ &\iff A^{-1}(AX) = A^{-1}Y \\ &\iff (A^{-1}A)X = A^{-1}Y \\ &\iff X = A^{-1}Y \end{aligned}$$

La réciproque est un peu plus délicate à démontrer, nous l'admettons. □

Ce théorème nous fournit une nouvelle méthode pour déterminer si une matrice est inversible et, le cas échéant, calculer son inverse.



Méthode 17.99 – Montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on résout le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en fonction de $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ quelconque fixé, puis on discute :

- si le système admet une unique solution $X = BY$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$,
- sinon la matrice n'est pas inversible.

Exemple 17.100 – Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 11 \\ -1 & 12 & -19 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
 AX = Y &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -7 & 11 \\ -1 & 12 & -19 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 7y + 11z = a \\ -x + 12y - 19z = b \\ -3y + 5z = c \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 7y + 11z = a \\ 5y - 8z = a + b \\ -3y + 5z = c \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 7y + 11z = a \\ 15y - 24z = 3a + 3b \\ -15y + 25z = 5c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 5L_3 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 7y + 11z = a \\ 15y - 24z = 3a + 3b \\ z = 3a + 3b + 5c \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 7y + 11z = a \\ 15y = 75a + 75b + 120c \\ z = 3a + 3b + 5c \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 24L_3 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 7y + 11z = a \\ y = 5a + 5b + 8c \\ z = 3a + 3b + 5c \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{15}L_2 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3a + 2b + c \\ y = 5a + 5b + 8c \\ z = 3a + 3b + 5c \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 7L_2 - 11L_3 \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Finalement, la matrice A est inversible et son inverse est donné par $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Proposition 17.101

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux (pivots) sont non nuls.

Exemple 17.102 – Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrons que la matrice A est inversible et calculons son inverse.

D'après la proposition précédente, A est inversible car ses coefficients diagonaux sont non nuls. Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ une ma-

trice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a les équivalences :

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2y + 3z = b \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a-c}{2} \\ y = \frac{b-3c}{2} \\ z = c \end{cases} \quad \text{d'où} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode de Gauss-Jordan

Les opérations élémentaires sur les lignes que nous avons définies pour les systèmes linéaires sont définies de la même manière pour les matrices et notées aussi : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, mais des opérations sur les colonnes sont utilisées également, notées : $C_i \leftrightarrow C_j$, $C_j \leftarrow \lambda C_j$ et $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice A correspondent à la multiplication matricielle à gauche de A par certaines matrices : matrices de transvection, dilatation et permutation.

Les mêmes opérations sur les colonnes de A correspondent à la multiplication à droite de A par ces mêmes matrices de transvection, dilatation et permutation.

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Définition 17.103 – Soit $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice

$$T_{i,j}^n(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & 0 & \dots & 0 & \lambda \\ & & & \ddots & & & 0 & \\ & & & & 1 & & 0 & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (0) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

où λ est le coefficient d'indices (i, j)

est appelée une **matrice de transvection**.

Proposition 17.104 – Matrices de transvection et opérations élémentaires

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. La matrice obtenue à partir de M par l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est la matrice $T_{i,j}^n(\lambda)M$.
2. La matrice obtenue à partir de M par l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ est la matrice $MT_{j,i}^n(\lambda)$.

Démonstration. Il suffit de faire le calcul. □

Définition 17.105 – Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\mu \in \mathbb{K}^*$. La matrice

$$D_i^n(\mu) = I_n + (\mu - 1)E_{i,i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (0) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

où μ est situé à la position (i, i)

est appelée une **matrice de dilatation**.

Proposition 17.106 – Matrices de dilatation et opérations élémentaires

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\mu \in \mathbb{K}^*$.

1. La matrice obtenue en multipliant par μ la i -ème ligne de M est la matrice $D_i^n(\mu)M$.
2. La matrice obtenue en multipliant par μ la i -ème colonne de M est la matrice $MD_i^n(\mu)$.

Définition 17.107 – Soit $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. La matrice

$$P_{i,j}^n = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & (0) \end{pmatrix}$$

est appelée une **matrice de permutation**.

Proposition 17.108 – Matrices de permutation et opérations élémentaires

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$.

1. La matrice obtenue en échangeant les lignes i et j de M est la matrice $P_{i,j}^n M$.
2. La matrice obtenue en échangeant les colonnes i et j de M est la matrice $M P_{i,j}^n$.

Proposition 17.109 – Inversibilité des matrices d'opérations élémentaires

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{K}^*$.

1. La matrice de transvection $T_{i,j}^n(\lambda)$ est inversible et sa matrice inverse est la matrice $T_{i,j}^n(-\lambda)$.
2. La matrice de dilatation $D_i^n(\mu)$ est inversible et sa matrice inverse est la matrice $D_i^n(1/\mu)$.
3. La matrice de permutation $P_{i,j}^n$ est inversible et elle est sa propre inverse.

Ainsi, multiplier par une de ces matrices préserve l'inversibilité.

Démonstration. Avec l'interprétation en termes d'opérations sur les lignes, on a :

$$T_{i,j}^n(-\lambda)T_{i,j}^n(\lambda) = I_n, \quad D_i^n(\mu)D_i^n(1/\mu) = I_n, \quad P_{i,j}^nP_{i,j}^n = I_n.$$

□

Proposition 17.110

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si il existe une suite d'opérations sur les lignes de A qui transforme la matrice A en la matrice identité.

Démonstration. Si il existe une suite d'opérations sur les lignes de A qui transforme la matrice A en la matrice identité, alors cela signifie qu'il existe une matrice E produit de matrices de transvection, dilatation et permutation, telle que $EA = I_n$. On peut affirmer alors que A est inversible et $E = A^{-1}$.

Réciproquement, si A est inversible, alors $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution. Ainsi, en effectuant un pivot de Gauss sur la matrice A , il n'y a pas de colonne sans pivot (sinon $AX = 0$ aurait zéro ou une infinité de solutions). Il y a donc un pivot par colonne et puisque A est carrée, un pivot par colonne. Ainsi, à l'aide de dilatations et permutations de ligne, on transforme la matrice A en la matrice identité. □

Méthode 17.111 –

Pour déterminer l'inverse de A , il nous faut donc trouver la matrice E de la démonstration précédente. Or on sait que chaque matrice qui compose E est obtenue à partir de la matrice identité par la même opération sur les lignes que celle appliquée à la matrice que l'on est en train de réduire.

Pour calculer E (c'est-à-dire A^{-1}), il suffit d'appliquer à la matrice I_n les mêmes opérations élémentaires qui ont permis de transformer A en la matrice identité.

Dans la pratique, on mène en parallèle les deux calculs : en même temps que l'on transforme A en I_n , on transforme I_n en A^{-1} .

Pour effectuer ces opérations élémentaires, il suffit de placer la matrice I_n juste à côté de la matrice A c'est-à-dire d'écrire la matrice $(A|I_n)$.



Exemple 17.112 – Nous allons déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 (A|I_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \sim_L &\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -10 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
 \sim_L &\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & -10 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right) & L_2 \leftrightarrow L_3 \\
 \sim_L &\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 0 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 7 & 6 & -11 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 11L_2 \end{array} \\
 \sim_L &\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 0 & 0 & 9 & 6 & -12 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 6 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 7 & 6 & -11 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \\
 \sim_L &\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 7/2 & 3 & -11/2 \end{array} \right) & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array}
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'inverse de $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 7/2 & 3 & -11/2 \end{pmatrix}$

4 – Application à la diagonalisation

Nous traitons cette section sous la forme d'un exercice :

Exemple 17.113 – On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ Et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'objectif de cet exercice est d'obtenir l'expression de A^n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
3. Exprimer A en fonction de D , P et P^{-1} .
4. Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = PD^nP^{-1}$$

5. En déduire l'expression de A^n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Correction :

1. Appliquons la méthode de Gauss-Jordan pour montrer que la matrice P est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{L_3 \leftarrow -0.5L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3, \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi la matrice P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculons le produit $P^{-1}AP$. On obtient $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

3. En partant de l'égalité $D = P^{-1}AP$, on a :

$$D = P^{-1}AP \iff PDP^{-1} = (PP^{-1})A(PP^{-1}) \iff PDP^{-1} = I_n A I_n \iff PDP^{-1} = A.$$

Ainsi $A = PDP^{-1}$.

4. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $A^n = PD^nP^{-1}$. »

Initialisation ($n = 0$). $A^0 = I_n$ par convention et $PD^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$. Ainsi $A^0 = PD^0P^{-1}$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A \times A^n \\
&= APD^nP^{-1}, \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= PDP^{-1}PD^nP^{-1}, \quad \text{car } A = PDP^{-1} \\
&= PDI_nD^nP^{-1} \\
&= PD^{n+1}P^{-1}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion La propriété étant initialisée et héréditaire, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. On calcule facilement D^n . On a :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}.$$

Il ne nous reste alors plus qu'à calculer le produit matriciel PD^nP^{-1} pour obtenir l'expression de A^n .

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 6^n & 6^n - 4^n & 4^n - 6^n \\ 6^n - 2^n & 2^n + 6^n & 2^n - 6^n \\ 4^n - 2^n & 2^n - 4^n & 2^n + 4^n \end{pmatrix}.$$

Définition 17.114 – Une matrice carrée A est dite **diagonalisable** s'il existe une matrice inversible P telle que le produit $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D . On dispose alors des égalités matricielles suivantes :

$$D = P^{-1}AP \text{ Et } A = PDP^{-1}$$

Remarque 17.115 – Toutes les matrices ne sont pas diagonalisables! Lorsqu'une matrice A n'est pas diagonalisable, on a recours à d'autres techniques pour calculer A^n .