

12 | Équations différentielles linéaires

Il ne peut y avoir de langage plus universel et plus simple, plus exempt d'erreurs et d'obscurités, c'est-à-dire plus digne d'exprimer les rapports invariables des êtres naturels.

Baron Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830), dans *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822)

I – Introduction aux équations linéaires

Commençons par une présentation informelle (mais suffisante pour le moment) du concept de linéarité. En résumé, une application T définie sur un ensemble E est dite **linéaire** si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$$

Exemple 12.1 –

	T	$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$
Linéarité de la dérivation	$f \mapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
Linéarité de l'intégrale	$f \mapsto \int_a^b f(t) dt$	$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$
Linéarité de la limite	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

Si T est linéaire, toute équation de la forme $T(y) = b$ d'inconnue y pour un certain b fixé est appelée une *équation linéaire* et b en est appelé le *second membre*. Lorsque $b = 0$ (fonction nulle, vecteur nul, suite nulle... selon le contexte), on dit que l'équation est *homogène* ou *sans second membre*.

Faisons l'hypothèse que, souhaitant trouver toutes les solutions de l'équation linéaire $T(y) = b$ d'inconnue y , nous en connaissons au moins une solution y_{part} , dite *solution particulière*. Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} T(y) = b &\iff T(y) = T(y_{\text{part}}) \iff T(y) - T(y_{\text{part}}) = 0 \xrightarrow{\text{Linéarité}} \iff T(y - y_{\text{part}}) = 0 \\ &\iff y - y_{\text{part}} \text{ est solution de l'équation HOMOGÈNE associée} \\ &\iff y \text{ est la somme de la solution particulière } y_{\text{part}} \text{ et d'une solution de l'équation HOMOGÈNE.} \end{aligned}$$

Lisez, relisez, et re-relisez ce petit raisonnement ! Nous y reviendrons constamment toute l'année. En résumé,

Pour trouver toutes les solutions d'une équation LINÉAIRE $T(y) = b$, il suffit d'en connaître UNE solution particulière et TOUTES les solutions de l'équation homogène $T(y) = 0$.

Exemple 12.2 – Les solutions de l'équation linéaire $f' = \cos$ d'inconnue f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \sin(x) + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ - la fameuse « constante de primitivation ».

Démonstration.

- **Équation homogène :** Les solutions de l'équation homogène $f' = 0$ sont toutes les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
- **Solution particulière de l'équation $f' = \cos$:** La fonction sinus convient.
- **Conclusion :** Il ne reste plus qu'à additionner !

□

Une autre propriété des équations **LINÉAIRES** va compter dans ce chapitre, c'est le *principe de superposition*.

Principe de superposition : Si y_1 est solution de l'équation $T(y) = b_1$ et y_2 solution de $T(y) = b_2$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation $T(y) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

En effet, tout simplement : $T(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \stackrel{\text{Linéarité}}{=} \lambda_1 T(y_1) + \lambda_2 T(y_2) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

Intéressons nous maintenant aux *équations différentielles*- en abrégé, «équadiff». Une équation différentielle est une équation dans laquelle cohabitent à la fois y , et ses dérivées y' , y'' , etc. Le plus grand exposant de dérivation qui y figure est son *ordre*. Par exemple, $y' = x^2 e^y + 1$ est une équation différentielle du premier ordre et $xy'' - y^2 = yy'$ une équation différentielle du second ordre.

Les équations différentielles sont utilisées en physique, en biologie, en économie, etc pour étudier des modèles mathématiques des phénomènes étudiés : datation des organismes, évolution du climat, évolution de la charge électrique d'un condensateur...

Les équations différentielles sont en général très difficiles à résoudre, aussi nous nous contenterons-nous, dans un premier temps, de travailler dans le cadre à peu près agréable des équations de la forme :

- $y' + a(x)y = b(x)$ (*équations différentielles linéaires du premier ordre*),
- $ay'' + by' + cy = d(x)$ (*équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants*)

L'intérêt de ces équations, c'est qu'elles sont linéaires, et nous pourrons donc appliquer les principes qui précèdent. Pour celles du premier ordre, notons en effet T la fonction qui associe à toute fonction dérivable y la fonction $y' + ay$. Pour toutes fonctions dérivables y et z et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(\lambda y + z) = (\lambda y + z)' + a(\lambda y + z) = \lambda(y' + ay) + (z' + az) = \lambda T(y) + T(z)$$

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle. Nous nous intéresserons parfois aux solutions réelles d'une équation différentielle et parfois à ses solutions complexes. Les solutions réelles sont bien sûr aussi complexes, mais quand on connaît toutes les solutions complexes et qu'on cherche les réelles, il reste du travail. La connaissance des solutions complexes ne suffit pas. Pour cette raison, nous travaillerons avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II – Équations différentielles linéaires du premier ordre

Soient a et b des fonctions définies et continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On s'intéresse aux équations $y' + a(x)y = b(x)$ d'inconnue y , une fonction définie et dérivable sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple 12.3 – La fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$.

$$t \mapsto 2e^{-3t}$$

En effet, y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $y'(t) + 3y(t) = -6e^{-3t} + 6e^{-3t} = 0$.

1 – Équations homogènes

Théorème 12.4 – Équation différentielle $y' + a(t)y = 0$

Soit $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. On note A une primitive de a sur I . Les solutions sur I de l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ sont toutes les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$, λ décrivant $\mathbb{K}$.

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La fonction $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ est bien solution de l'équation étudiée car pour tout $t \in I$:

$$y'(t) + a(t)y(t) = -\lambda A'(t)e^{-A(t)} + a(t) \times \lambda e^{-A(t)} = -\lambda a(t)e^{-A(t)} + a(t) \times \lambda e^{-A(t)} = 0$$

- Réciproquement, si $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction dérivable, solution de l'équation étudiée, alors on a :

$$(ye^A)' = y'e^A + yA'e^A = (y' + ay)e^A = 0$$

Ainsi, la fonction ye^A est constante sur I . Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $ye^A = \lambda$, i.e $y = \lambda e^{-A}$.

□

Exemple 12.5 – Résoudre sur $]1; +\infty[$ l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{t-1}y = 0 \quad (E)$$

On pose la fonction a définie sur $]1; +\infty[$ par $a(t) = \frac{1}{t-1}$.

Alors, une primitive de a sur $]1; +\infty[$ est $A : \begin{matrix}]1; +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(|t-1|) \end{matrix}$.

Donc les solutions de (E) sont les fonctions $f_\lambda : \begin{matrix}]1; +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\ln(|t-1|)} \end{matrix}$ où λ est un réel.

Or, pour tout $t \in]1; +\infty[$, on a :

$$f_\lambda(t) = \lambda e^{-\ln(|t-1|)} = \lambda e^{-\ln(t-1)} = \frac{\lambda}{t-1}.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{ f_\lambda : \begin{matrix}]1; +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\lambda}{t-1} \end{matrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Corollaire 12.6 – Solutions d'une EDL homogène d'ordre 1 à coefficient constant

Soit $k \in \mathbb{K}^*$ une constante. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + ky = 0$ sont les fonctions

$$\begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-k \times t} \end{matrix} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le résultat de la proposition précédente : une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction constante $t \mapsto k$ est la fonction $t \mapsto kt$. □

2 – Équations avec second membre

Théorème 12.7 – Équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$, conséquence de la linéarité

Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et y_{part} une solution particulière de l'équation $y' + a(t)y = b(t)$. En notant A une primitive de a sur I , les solutions sur I de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ sont toutes les fonctions de la forme $y_{\text{part}} + \lambda e^{-A}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Solution générale} & = & \text{Solution particulière} & + & \text{Solution générale} \\ \text{de l'équation complète} & & & & \text{de l'équation HOMOGÈNE} \end{array}$$

Démonstration. Notons E l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ et (EH) l'équation homogène associée. Soit y_{part} une solution particulière sur I . Soit également $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, on pose $y_H = y - y_{\text{part}}$ de sorte que $y = y_{\text{part}} + y_H$. Alors,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ &\iff \forall t \in I, y'_{\text{part}}(t) + a(t)y_{\text{part}}(t) + y'_H(t) + a(t)y_H(t) = b(t) \\ &\iff \forall t \in I, y'_H(t) + a(t)y_H(t) = 0 \quad \text{car } y'_{\text{part}}(t) + a(t)y_{\text{part}}(t) = b(t) \\ &\iff y \text{ est solution de } (EH) \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $y_{\text{part}} + y_H$ où y_H est solution de l'équation homogène associée. □

Exemple 12.8 – Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y' - ty = 2t \quad (E)$$

1. Résolution de l'équation homogène associée (E_h): $y' - ty = 0$.

Les solutions de (E_h) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda : t \mapsto \lambda e^{\frac{t^2}{2}}$

2. Solution particulière : On vérifie facilement que $g : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -2 \end{matrix}$ est une solution de (E).

3. Ainsi, d'après la Proposition 12.7, les solutions de (E) sont les fonctions $g_\lambda : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{\frac{t^2}{2}} - 2 \end{matrix}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

3 – Méthodes de recherche d'une solution particulière

• 1ère méthode : Rechercher une solution « évidente »

Souvent, une telle solution a la même forme que les coefficients de l'équation différentielle (polynôme, exponentielle, sinus et cosinus...).

Exemple 12.9 – Rechercher une solution particulière de (E) : $y' - 2y = t^2 - 2t + 4$.

Le second membre de l'équation étant un polynôme de degré 2, on va chercher un polynôme de degré 2 qui soit solution.

Soient a, b, c trois réels. On définit la fonction polynomiale P sur $\mathbb{R}$ par $P(t) = at^2 + bt + c$. Alors

$$\begin{aligned} P \text{ solution de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad P'(t) - 2P(t) = t^2 - 2t + 4 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 2at + b - 2at^2 - 2bt - 2c = t^2 - 2t + 4 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad -2at^2 + (2a - 2b)t + (b - 2c) = t^2 - 2t + 4 \end{aligned}$$

En prenant $a = \frac{-1}{2}; b = \frac{1}{2}; c = \frac{-7}{4}$, cette dernière proposition est vérifiée.

Donc la fonction P définie par $P(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{7}{4}$ est une solution particulière de (E).

• 2ème méthode : Méthode de variation de la constante et existence d'une solution

Soient a et b deux fonctions définies et continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et (E) l'équation différentielle :

$$(E) : y' + a(t)y = b(t)$$

On cherche une solution particulière de (E) en reprenant la forme d'une solution h_λ de l'équation homogène associée (EH) et en remplaçant λ par une fonction g dérivable sur I : on recherche une solution particulière y_{part} sous la forme

$$y_{\text{part}} : \begin{matrix} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & g(t)e^{-A(t)} \end{matrix}$$

où A désigne une primitive de la fonction a et où g est une fonction dérivable sur I à déterminer.

Puisque g et A sont dérivables sur I , la fonction y_{part} est dérivable sur I et pour tout $t \in I$,

$$y_{\text{part}}'(t) = g'(t)e^{-A(t)} - g(t)e^{-A(t)}a(t).$$

Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$y_{\text{part}}'(t) + a(t)y_{\text{part}}(t) = g'(t)e^{-A(t)} - g(t)e^{-A(t)}a(t) + a(t)g(t)e^{-A(t)} = g'(t)e^{-A(t)}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} y_{\text{part}} \text{ solution de } (E) &\iff \forall t \in I, \quad g'(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ &\iff \forall t \in I, \quad g'(t) = b(t)e^{A(t)} \end{aligned}$$

Puisque les fonctions A et b sont continues sur I , la fonction $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ l'est aussi, et par conséquent, elle admet des primitives sur I . On est donc assuré qu'il existe une fonction g définie et dérivable sur I vérifiant : $\forall t \in I, g'(t) = b(t)e^{A(t)}$. Ceci démontre que l'équation (E) admet au moins une solution sur I .

Proposition 12.10 – Existence de solution pour les EDL d'ordre 1

Soit a et b deux fonctions continues de I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

L'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ possède au moins une solution sur I .

Notons que la méthode de variation de la constante ne fournit pas toujours une solution particulière explicite : il faut pour cela être capable de déterminer deux primitives à l'aide des fonctions usuelles (une primitive A de a et une primitive de la fonction $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$).

Exemple 12.11 – Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' - t^2 y = \frac{te^{t^3/3}}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Résolution de l'équation homogène associée (EH) : $y' - t^2 y = 0$.

$t \mapsto -\frac{t^3}{3}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto -t^2$ donc les solutions de (E_h) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ $f_\lambda : t \mapsto e^{t^3/3}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Recherche d'une solution particulière de (E).

On pose une fonction inconnue λ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda(t)e^{t^3/3} \end{matrix}$.

On cherche alors à déterminer λ tel que g soit solution particulière de (E). On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, g'(t) - t^2 g(t) = \frac{te^{t^3/3}}{\sqrt{1+t^2}} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t)e^{t^3/3} + \lambda(t)t^2 e^{t^3/3} - t^2 \lambda(t)e^{t^3/3} = \frac{te^{t^3/3}}{\sqrt{1+t^2}} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t)e^{t^3/3} = \frac{te^{t^3/3}}{\sqrt{1+t^2}} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

Une primitive de $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ est $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$, donc $g : t \mapsto \sqrt{1+t^2} e^{t^3/3}$ est une solution particulière de (E).

3. Conclusion.

Les solutions de (E) sont les fonctions $g_\lambda : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\sqrt{1+t^2} + \lambda)e^{t^3/3} \end{matrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.



ATTENTION ! Ne pas dire que l'on cherche LA solution particulière. La Proposition 12.7 nous assure qu'il y en a une infinité. On cherche donc UNE solution particulière.

4 – Principe de superposition des solutions

Proposition 12.12 – Superposition des solutions

Soient a , b_1 et b_2 trois fonctions définies et continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. On note :

$$(E_1) : y' + a(t)y = b_1(t) \quad (E_2) : y' + a(t)y = b_2(t)$$

Si y_1 est solution de (E₁) et y_2 est solution de (E₂), alors $k_1 y_1 + k_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' + a(t)y = k_1 b_1(t) + k_2 b_2(t)$$

Démonstration. Soient y_1 et y_2 des solutions de E_1 et E_2 respectivement, et k_1 et k_2 deux éléments de $\mathbb{K}$. Montrons que $y = k_1 y_1 + k_2 y_2$ est solution de (E).

Tout d'abord, puisque y_1 et y_2 sont dérivables sur I par définition, f est aussi dérivable sur I .

Pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} y'(t) + a(t)y(t) &= (k_1 y_1'(t) + k_2 y_2'(t)) + a(t)(k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)) \\ &= k_1 (y_1'(t) + a(t)y_1(t)) + k_2 (y_2'(t) + a(t)y_2(t)) \\ &= k_1 b_1(t) + k_2 b_2(t) \end{aligned}$$

ce qui signifie que y est bien une solution de (E). □

Exemple 12.13 – Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(E) \quad y' - 2y = e^x + 3$. L'équation homogène associée à (E) est $(EH) : y' - 2y = 0$, dont l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{2x} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

Soit l'équation $(E_1) : y' - 2y = e^x$. On va chercher une solution particulière de (E_1) par variation de la constante. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $f : x \mapsto g(x)e^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors f est dérivable et :

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E_1) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - 2f(x) = e^x \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, g'(x)e^{2x} + 2g(x)e^{2x} - 2g(x)e^{2x} = e^x \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^{-x} \end{aligned}$$

$x \mapsto -e^{-x}$ est une primitive de $x \mapsto e^{-x}$, donc en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_{\text{part}}(x) = -e^{-x}e^{2x} = -e^x$, on obtient une solution particulière y_{part} de (E_1) .

Soit l'équation $(E_2) : y' - 2y = 3$. On voit immédiatement que la fonction constante égale à $-\frac{3}{2}$ est une solution de (E_2) .

On en déduit par principe de superposition que $x \mapsto -e^x - \frac{3}{2}$ est une solution de (E) . L'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{2x} - e^x - \frac{3}{2} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

5 – Problème de Cauchy

Définition 12.14 – Étant donnée une équation différentielle, on appelle **condition de Cauchy** toute condition imposant la valeur d'une solution ou de l'une de ses dérivées en un point de I .

Proposition 12.15 – Solution au problème de Cauchy

Soient $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Sous la condition de Cauchy $y(t_0) = y_0$, l'équation $(E) : y' + a(t)y = b(t)$ admet une solution unique sur I .

Démonstration. D'après ce qui précède qu'en notant y_{part} une solution particulière de E (il en existe) et A une primitive de a sur I , les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $\begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto y_{\text{part}} + \lambda \exp(-A(t)) \end{array}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $f : \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto y_{\text{part}}(t) + \lambda \exp(-A(t)) \end{array}$.

$$\text{On a : } f(t_0) = y_0 \iff y_{\text{part}}(t_0) + \lambda \exp(-A(t_0)) = y_0 \iff \lambda = (y_0 - y_{\text{part}}(t_0)) \exp(A(t_0))$$

donc sous la condition de Cauchy $y(t_0) = y_0$, l'équation différentielle (E) admet bien une solution unique sur I . $\square$

Exemple 12.16 – On veut déterminer l'unique solution de $(C) : \begin{cases} y' + \frac{1}{t-1}y = 0 \\ y(3) = 3 \end{cases}$

On a déjà vu lors de la résolution de l'exemple 12.5 que l'ensemble des solutions de $y' + \frac{1}{t-1}y = 0$ est

$$\left\{ f_\lambda : \begin{array}{l}]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\lambda}{t-1} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f_\lambda(2) = 3 \iff \frac{\lambda}{3-1} = 3 \iff \lambda = 6$$

Ainsi, l'unique solution de (C) est

$$g : \begin{array}{l}]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{6}{t-1} \end{array}$$

III – Équadiffs linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse aux équations $ay'' + by' + cy = d(x)$ d'inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivables, où $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ et d est une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 – Équations homogènes

En pratique, ce sont généralement les solutions réelles des équations différentielles qui nous intéressent, mais nous commencerons pourtant par le cas complexe car c'est lui le cas théorique fondamental, celui dont la preuve est naturelle, et ceci entièrement grâce à l'exponentielle complexe.

Théorème 12.17

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$.

On appelle polynôme caractéristique de l'équation

$ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $aX^2 + bX + c$.

Ci-contre, λ, λ' et μ décrivent $\mathbb{C}$.

Discriminant Δ de $aX^2 + bX + c$	Racines de $aX^2 + bX + c$	Forme des solutions
$\Delta \neq 0$	r et r'	$x \mapsto \lambda e^{rx} + \lambda' e^{r'x}$
$\Delta = 0$	r	$x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}$

Démonstration. Mais d'où sort le polynôme caractéristique? Et pourquoi l'exponentielle est-elle à ce point présente? Pour tout $r \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} x \mapsto e^{rx} \text{ est solution de l'équation : } ay'' + by' + cy = 0 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \\ &\iff r \text{ est une racine du polynôme caractéristique } aX^2 + bX + c \end{aligned}$$

Ce calcul nous incite à introduire les racines éventuellement égales r et r' du polynôme $aX^2 + bX + c$, liées par la relation $r + r' = -\frac{b}{a}$.

La fonction $x \mapsto e^{rx}$ est alors solution de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$, mais c'est le cas plus généralement de la fonction $x \mapsto \lambda e^{rx}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Et le contexte est certes différent, mais de nouveau, nous allons résoudre notre équation en faisant varier la constante. Concrètement, nous cherchons nos solutions sous la forme $x \mapsto z(x) e^{rx}$ avec z dérivable.

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, a(z''(x) + 2rz'(x) + r^2z(x))e^{rx} + b(z'(x) + rz(x))e^{rx} + cz(x)e^{rx} = 0 \\ &\iff az'' + (2ar + b)z' + (ar^2 + br + c)z = 0 \\ &\iff (z')' + \left(2r + \frac{b}{a}\right)z' = 0 \quad \text{Tiens, une équation linéaire du premier ordre!} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = \lambda e^{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x}. \end{aligned}$$

La fin du calcul requiert qu'on distingue deux cas : $\Delta \neq 0$ et $\Delta = 0$.

- **Cas où $\Delta \neq 0$:** Ici $r \neq -\frac{b}{2a}$, donc $2r + \frac{b}{a} \neq 0$.

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = \frac{\lambda e^{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x}}{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)} + \mu \quad \text{après primitivation} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = \lambda e^{-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x} + \mu \quad \text{quitte à changer le } \lambda \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = z(x) e^{rx} = \lambda e^{-\left(r + \frac{b}{a}\right)x} + \mu e^{rx} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{r'x} + \mu e^{rx}. \end{aligned}$$

- **Cas où $\Delta = 0$:** Cette fois, $r = -\frac{b}{2a}$ est l'unique racine de $aX^2 + bX + c$, donc $2r + \frac{b}{a} = 0$.

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = \lambda \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = \lambda x + \mu \quad \text{après primitivation} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = z(x) e^{rx} = (\lambda x + \mu) e^{rx}. \end{aligned}$$

□

Théorème 12.18

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

On appelle polynôme caractéristique de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $aX^2 + bX + c$.

Ci-contre, λ, λ' et μ décrivent $\mathbb{C}$.

Discriminant Δ de $aX^2 + bX + c$	Racines de $aX^2 + bX + c$	Forme des solutions
$\Delta > 0$	r et r'	$x \mapsto \lambda e^{rx} + \lambda' e^{r'x}$
$\Delta = 0$	r	$x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{rx}$
$\Delta < 0$	$r \pm i\omega$	$x \mapsto (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)) e^{rx}$

Dans le cas où $\Delta < 0$, on privilégie en physique d'autres formes équivalentes des solutions : $x \mapsto \lambda \sin(\omega x + \varphi) e^{rx}$ et $x \mapsto \lambda \cos(\omega x + \varphi) e^{rx}$

Démonstration. Les solutions réelles de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ en sont aussi des solutions complexes, donc soumises au théorème précédent. Nous nous contenterons du cas $\Delta < 0$ (le plus compliqué et le plus intéressant). Les racines de $aX^2 + bX + c$ y sont complexes conjuguées de la forme $r \pm i\omega$ avec $\omega \neq 0$.

Soit y une solution **COMPLEXE** de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$.

D'après le théorème précédent, y est de la forme $x \mapsto \alpha e^{rx+i\omega x} + \beta e^{rx-i\omega x} = e^{rx} (\alpha e^{i\omega x} + \beta e^{-i\omega x})$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

À quelle condition y est-elle **RÉELLE** ? Si elle l'est, alors $\text{Im}(y(0)) = \text{Im}\left(y\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\right) = 0$, or :

$$-\text{Im}(y(0)) = \text{Im}(\alpha + \beta), \quad \text{donc } \text{Im}(\beta) = -\text{Im}(\alpha)$$

$$-\text{Im}\left(y\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\right) = \text{Im}\left(i(\alpha - \beta) e^{\frac{\pi r}{2\omega}}\right) = \text{Im}(i(\alpha - \beta)) e^{\frac{\pi r}{2\omega}} = \text{Re}(\alpha - \beta) e^{\frac{\pi r}{2\omega}}, \quad \text{donc } \text{Re}(\beta) = \text{Re}(\alpha)$$

Bref, si y est réelle : $\beta = \bar{\alpha}$. Posons dans ce cas $\lambda = 2\text{Re}(\alpha)$ et $\mu = -2\text{Im}(\alpha)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{rx} (\alpha e^{i\omega x} + \bar{\alpha} e^{-i\omega x}) = 2e^{rx} \text{Re}(\alpha e^{i\omega x}) = e^{rx} (2\text{Re}(\alpha) \cos(\omega x) - 2\text{Im}(\alpha) \sin(\omega x)) \\ &= e^{rx} (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)). \end{aligned}$$

Réciproquement, cette fonction est bien réelle.

Les formes $\lambda e^{rx} \sin(\omega x + \varphi)$ et $\lambda e^{rx} \cos(\omega x + \varphi)$ s'en déduisent grâce aux formules usuelles de trigonométrie. □

Exemple 12.19 –

- Les solutions (réelles) de l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$ sont toutes les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2 - 3X + 2$ possède deux racines réelles distinctes, 1 et 2.
- Les solutions (réelles) de l'équation $y'' - 2y' + y = 0$ sont toutes les fonctions $x \mapsto (\lambda x + \mu) e^x$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2 - 2X + 1$ admet 1 pour unique racine.
- Les solutions (réelles) de l'équation $y'' + 4y = 0$ sont toutes les fonctions $x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2 + 4$ possède deux racines complexes conjuguées, $2i$ et $-2i$.
- Les solutions (réelles) de l'équation $y'' + 2y' + 10y = 0$ sont toutes les fonctions $x \mapsto e^{-x} (\lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x))$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car le polynôme $X^2 + 2X + 10$ possède deux racines complexes conjuguées, $-1 + 3i$ et $-1 - 3i$.

2 – Équations avec second membre

Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème 12.20 – Équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$, problème de Cauchy

Soient $a \in \mathbb{K}^*$, $b, c \in \mathbb{K}$ et d une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$. Pour tous $x_0 \in I$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$, le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d(x) \\ y(x_0) = y_0 \text{ et } y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad \text{possède une et une seule solution sur } I.$$

Je ne l'énonce pas de nouveau, mais le principe « solution particulière + solution générale de l'équation homogène » et le principe de superposition sont toujours valables au second ordre car ils découlent seulement de la **LINÉARITÉ** de l'équation.

En revanche, le programme de MPSI ne vous donne aucune méthode un peu générale de recherche de solution particulière pour les équations du second ordre. Seuls les seconds membres du cadre suivant sont exigibles. Fixons $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c, A, r \in \mathbb{C}$.

L'équation $ay'' + by' + cy = Ae^{rx}$ possède une solution de la forme suivante avec $B \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x \mapsto Be^{rx} & \text{si } r \text{ n'est PAS racine du polynôme caractéristique} \\ x \mapsto Bxe^{rx} & \text{si } r \text{ est racine SIMPLE du polynôme caractéristique} \\ x \mapsto Bx^2e^{rx} & \text{si } r \text{ est racine DOUBLE du polynôme caractéristique.} \end{cases}$$

Comme au premier ordre, ce principe permet aussi de traiter le cas de seconds membres exponentiels-(co)sinus. Par exemple, si f est solution de l'équation $y'' + 2y = 2e^{(3+i)x}$, $\text{Im}(f)$ est solution de l'équation $y'' + 2y = 2e^{3x} \sin x$.

Exemple 12.21 – Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$.

- **Équation homogène** : $(EH) : y'' + 2y' + y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$. Son discriminant est nul et elle n'a qu'une seule racine double : -1 .

Les solutions de (EH) sont les fonctions $f_{\lambda, \mu} : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{-t}$ avec λ et μ dans $\mathbb{R}$.

- **Solution particulière**. Le coefficient de t dans l'exponentielle du second membre est -1 , qui est l'unique solution de l'équation caractéristique. Donc, on pose $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g : t \mapsto \alpha t^2 e^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:
 $g'(t) = \alpha(2te^{-t} - t^2 e^{-t}) = \alpha(2t - t^2)e^{-t}$.
 $g''(t) = \alpha((2 - 2t)e^{-t} - (2t - t^2)e^{-t}) = \alpha(t^2 - 4t + 2)e^{-t}$.

$$\begin{aligned} g \text{ est une solution de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, g''(t) + 2g'(t) + g(t) = 2e^{-t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \alpha(t^2 - 4t + 2)e^{-t} + 2\alpha(2t - t^2)e^{-t} + \alpha t^2 e^{-t} = 2e^{-t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \alpha(t^2 - 4t + 2) + 2\alpha(2t - t^2) + \alpha t^2 = 2 \\ &\iff 2\alpha = 2 \end{aligned}$$

Donc $g : t \mapsto t^2 e^{-t}$ est une solution particulière de (E) .

- L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\left\{ g_{\lambda, \mu} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (t^2 + \lambda t + \mu)e^{-t} \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

Exemple 12.22 – On veut résoudre l'équation $y'' - y = e^{2x} - e^x$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

- **Équation homogène** : Les solutions de l'équation $y'' - y = 0$ sont toutes les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car les racines du polynôme $X^2 - 1$ sont -1 et 1 .
- **Solution particulière de l'équation** $y'' - y = e^{2x}$: Comme 2 n'est PAS racine de $X^2 - 1$, cherchons-en une sous la forme $x \mapsto Be^{2x}$ avec $B \in \mathbb{R}$.

$$x \mapsto Be^{2x} \text{ est solution de } y'' - y = e^{2x} \iff \forall x \in \mathbb{R}, 4Be^{2x} - Be^{2x} = e^{2x} \iff B = \frac{1}{3}$$

- **Solution particulière de l'équation** $y'' - y = e^x$: Comme 1 est racine SIMPLE de $X^2 - 1$, cherchons-en une sous la forme $x \mapsto Bxe^x$ avec $B \in \mathbb{R}$.

$$x \mapsto Bxe^x \text{ est solution de } y'' - y = e^x \iff \forall x \in \mathbb{R}, (Bxe^x + 2Be^x) - Bxe^x = e^x \iff B = \frac{1}{2}.$$

- **Conclusion** : Les solutions de l'équation complète $y'' - y = e^{2x} - e^x$ sont finalement toutes les fonctions $x \mapsto \left(\lambda - \frac{x}{2}\right)e^x + \mu e^{-x} + \frac{e^{2x}}{3}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$. L'unique solution pour laquelle $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ est obtenue sous réserve que λ et μ satisfassent les relations $\lambda + \mu + \frac{1}{3} = 1$ et $\lambda - \mu + \frac{1}{6} = 0$, i.e. $\lambda = \frac{1}{4}$ et $\mu = \frac{5}{12}$. L'unique solution finale est ainsi la fonction $x \mapsto \frac{1-2x}{4}e^x + \frac{5}{12}e^{-x} + \frac{e^{2x}}{3}$.

Exemple 12.23 – On cherche les solutions réelles de l'équation $y'' + y' + y = e^x \cos x$.

- **Équation homogène** : Les solutions en sont les fonctions $x \mapsto \left(\lambda \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \right) e^{-\frac{x}{2}}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$, car les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et $\bar{j}$.
- **Solution particulière de l'équation** $y'' + y' + y = e^{(1+i)x}$: Comme $1 + i$ n'est pas racine de $X^2 + X + 1$, cherchons-en une sous la forme $x \mapsto B e^{(1+i)x}$ avec $B \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} x \mapsto B e^{(1+i)x} \text{ est solution de } y'' + y' + y &= e^{(1+i)x} \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}, (1+i)^2 B e^{(1+i)x} + (1+i) B e^{(1+i)x} + B e^{(1+i)x} &= e^{(1+i)x} \iff (2+3i)B = 1 \\ \iff B = \frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{13}. \text{ La fonction } x \mapsto \frac{2-3i}{13} e^{(1+i)x} &\text{ convient.} \end{aligned}$$

- **Solution particulière de l'équation** $y'' + y' + y = e^x \cos x = \operatorname{Re}(e^{(1+i)x})$: D'après le point précédent, la fonction $x \mapsto \operatorname{Re}\left(\frac{2-3i}{13} e^{(1+i)x}\right) = \left(\frac{2 \cos x + 3 \sin x}{13}\right) e^x$ convient.
- **Conclusion** : Les solutions (réelles) de l'équation $y'' + y' + y = e^x \cos x$ sont toutes les fonctions :

$$x \mapsto \left(\frac{2 \cos x + 3 \sin x}{13}\right) e^x + \left(\lambda \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) e^{-\frac{x}{2}}, \quad \lambda \text{ et } \mu \text{ décrivant } \mathbb{R}$$

3 – Problème de Cauchy

Proposition 12.24 – Problème de Cauchy à l'ordre 2

Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, c une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$.

Pour tout $(y_0, y'_0) \in \mathbb{K}^2$, l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c(t)$ a une unique solution vérifiant $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$

Démonstration. Admis. □

Exemple 12.25 –

Déterminer la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de $(E_2) : y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$ et vérifiant $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$. Soit f cette fonction (existence et unicité par proposition précédente).

On a déjà montré qu'il existe λ et μ réels tels que $f : t \mapsto (t^2 + \lambda t + \mu) e^{-t}$.

Alors, la dérivée de f est $f' : t \mapsto (-t^2 + (2 - \lambda)t + (\lambda - \mu)) e^{-t}$.

$$\begin{aligned} f(1) = 0 \text{ Et } f'(1) = 1 &\iff \begin{cases} (1 + \lambda + \mu) e^{-1} = 0 \\ (1 - \mu) e^{-1} = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = e - 2 \\ \mu = 1 - e \end{cases} \end{aligned}$$

Donc f est la fonction $\begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (t^2 + (e-2)t + (1-e)) e^{-t} \end{matrix}$.



ATTENTION ! Dans la dernière proposition, la forme des conditions initiales est importantes. Il doit s'agir de la valeur de la fonction et de la valeur de la dérivée au même point.

Si c'est en des points différents, ni l'unicité ni l'existence ne sont assurées. On peut facilement voir que pour l'équation de l'exemple 12.25, il n'y a aucune solution vérifiant $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$ et il y en a une infinité vérifiant

$$\begin{cases} y(0) = 1 - e \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

De même, fixer la valeur de la fonction en deux points différents n'assure ni l'unicité ni l'existence de solutions.