

11 | Techniques élémentaires de calcul intégral

La nature se rit des difficultés de l'intégration.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), polymathe.

Le point de vue adopté dans ce chapitre est exclusivement pratique. On y apprend essentiellement à faire du calcul exact de primitives et d'intégrales. La notion d'intégrale sera définie proprement en fin d'année au chapitre « Théorie de l'intégration » et nous démontrerons alors tous les théorèmes énoncés dans les pages qui suivent.

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non-réduit à un point, et non vide.

I – Primitive d'une fonction à valeurs réelles

1 – Généralités

Définition 11.1 – Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une **primitive** de f sur I si elle est dérivable sur I et $F' = f$.

Exemple 11.2 – La fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est **UNE** primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ et Arctan est **UNE** primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.



ATTENTION ! Il n'existe jamais une seule primitive, on ne dit jamais « la » primitive mais **UNE** primitive. Il peut d'ailleurs ne pas en exister, mais quand il en existe, il en existe une infinité et elles sont toutes égales à constante additive près (cf Proposition 11.6).

Le résultat suivant, qui n'est pas évident, est admis pour l'instant. Il sera démontré ultérieurement.

Proposition 11.3 – Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I . Soit $a \in I$. La fonction

$$F_a : \begin{array}{lcl} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t) dt \end{array}$$

est dérivable sur I et : $\forall x \in I, F'_a(x) = f(x)$

Exemple 11.4 – La fonction $x \mapsto \int_0^x \cos(t) dt$ est dérivable, de dérivée la fonction $\cos$.

Corollaire 11.5 – Existence de primitives des fonctions continues

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I . Alors f admet au moins une primitive sur I .

Démonstration. Soit a un élément de I . La fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I . □

Proposition 11.6 – Forme des primitives

Soit f une fonction continue sur I . Si F est une primitive de f sur I .

1. Les primitives de f sur I sont toutes les fonctions de la forme $F + c$ où c est une constante réelle.
2. Pour tout $a \in I$, la fonction $F_a : \begin{matrix} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t) dt \end{matrix}$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Démonstration. 1. Notons G une primitive de f sur I . Alors $G - F$ est dérivable sur I et

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0.$$

Donc $G - F$ est constante sur I (car I intervalle) et il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + c$.

2. Par conséquent, deux primitives distinctes de f diffèrent d'une constante non-nulle et ne peuvent prendre la même valeur au même point a de I . La fonction $F_a : \begin{matrix} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t) dt \end{matrix}$ est une primitive de f sur I et $F_a(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ donc F_a est bien l'unique primitive de f s'annulant en a .

□

Théorème 11.7 – Intégration via une primitive

Soit f une fonction continue sur I et a et b deux éléments de I . Quelle que soit la primitive F de f sur I ,

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Soit $(a, b) \in I^2$ et F une primitive de f sur I . Par le corollaire précédent, il existe une constante réelle c telle que : $\forall x \in I, F(x) = c + \int_a^x f(t) dt$.

On a donc
$$F(b) - F(a) = c + \int_a^b f(t) dt - c - \int_a^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

□

Exemple 11.8 – $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1.$



ATTENTION ! Dans ce chapitre, on détermine toujours les intégrales et/ou primitives sur un intervalle. Si l'on travaillait sur une partie quelconque de $\mathbb{R}$, de nombreux problèmes se poseraient. Par exemple, une fonction $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dont la dérivée est nulle n'est pas forcément constante sur $\mathbb{R}^*$.

2 – La notation primitive en x : $\int_a^x f(t) dt$

Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. La fonction $F_a : \begin{matrix} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t) dt \end{matrix}$ est une primitive de f sur I .

Si l'on change la valeur de a , la primitive F_a ne varie que d'une constante additive. Donc a n'a pas d'intérêt quand on souhaite écrire une primitive quelconque de f sur I sans préciser laquelle.

Notation 11.9 – Pour tout $x \in I$, on note $\int_a^x f(t) dt$ la valeur en x d'une primitive quelconque de f sur I .

Exemple 11.10 – La fonction $\cos + \exp$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle possède des primitives sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\int^x (\cos(t) + \exp(t)) dt = \int^x \cos(t) dt + \int^x \exp(t) dt = \sin(x) + \exp(x)$$

3 – Propriétés de l'intégrale

Proposition 11.11

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I . On a alors :

$$\int_a^a f(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt.$$

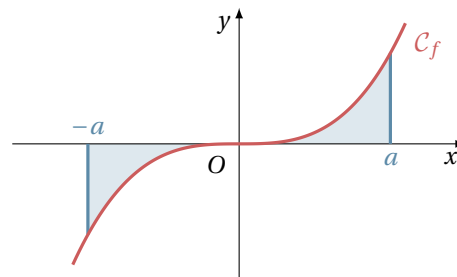
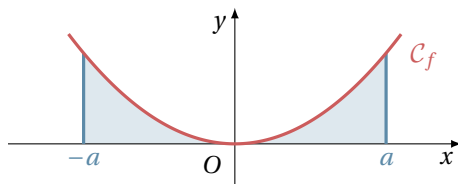
Démonstration. Soit F une primitive de f , d'après la Proposition 11.7 précédente, on a :

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) - F(a) = 0, \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(t) dt.$$

□

Proposition 11.12

- Si f est continue et paire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
- Si f est continue et impaire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.



Exemple 11.13 –

- $\int_{-1}^1 t^3 \sqrt{t^2 + 1} dt = 0$ puisque la fonction est impaire.
- $\int_{-1}^1 t^2 + |t| dt = 2 \int_0^1 t^2 + |t| dt = 2 \int_0^1 t^2 + t dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{3}$ par parité.

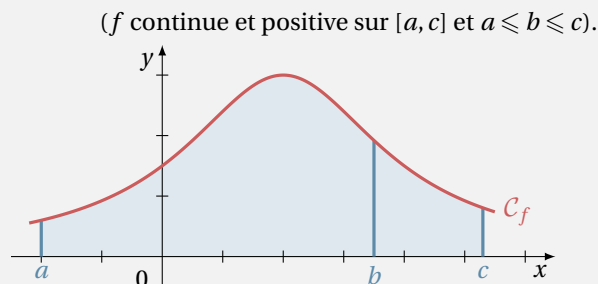
Proposition 11.14 – Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a , b et c dans I . Alors

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

Exemple 11.15 – Interprétation graphique

L'aire du domaine compris entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et du domaine compris entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = b$ et $x = c$.



Exemple 11.16 – Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-2}^3 |t-1| dt.$$

Il nous faut nous débarrasser de la valeur absolue pour calculer cette intégrale. Commençons par remarquer que $t-1 \geq 0$ pour $t \geq 1$. Ainsi $|t-1| = t-1$ pour $t \geq 1$ et $|t-1| = 1-t$ pour $t \leq 1$. On a donc en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 |t-1| dt &= \int_{-2}^1 |t-1| dt + \int_1^3 |t-1| dt = \int_{-2}^1 (1-t) dt + \int_1^3 (t-1) dt \\ &= \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_{-2}^1 + \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_1^3 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left((-2) - \frac{(-2)^2}{2} \right) + \left(\frac{3^2}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} - (-4) + \frac{9}{2} - 3 - \left(-\frac{1}{2} \right) = 2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}. \end{aligned}$$

Remarque 11.17 – On peut généraliser la relation de Chasles. Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, soit $a_i \in I$ tels que $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$. On a alors :

$$\int_{a_0}^{a_n} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt.$$

Par exemple, $\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_1^{n+1} f(t) dt$.

Proposition 11.18 – Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , soient a et b dans I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt.$$

Remarque 11.19 – Plus généralement, si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels, on a :

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_a^b f_k(t) dt.$$

II – Les techniques de calcul simples, basiques

1 – Reconnaître la dérivée d'une fonction

Les fonctions qu'on manipule sont généralement un empilement de fonctions usuelles liées entre elles par des additions, des multiplications, des passages à l'inverse et des compositions. Vous savez toutes les dériver car vous savez dériver les fonctions usuelles, les sommes, les produits, les inverses et les composées.

La primitivation des fonctions est autrement plus difficile :

- vous savez primitiver la fonction $x \mapsto x$, mais pour primitiver son inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, il a fallu qu'on vous introduise une nouvelle fonction usuelle, la fonction logarithme,
- vous savez primitiver la fonction $x \mapsto 1+x^2$, mais pour primitiver son inverse $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, il a fallu qu'on vous introduise une nouvelle fonction usuelle, la fonction arctangente.

On ne peut pas dire pourtant que les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sont un sommet de sophistication ! Le problème de la primitivation, c'est qu'on ne peut pas primitiver explicitement toutes les fonctions qu'on utilise couramment. On peut montrer - mais c'est difficile - que les primitives d'une fonction simple comme $x \mapsto e^{-x^2}$ NE peuvent PAS être écrites explicitement comme un empilement de fonctions usuelles - à moins bien sûr de considérer une telle primitive comme une nouvelle fonction usuelle ! On en retiendra la mise en garde suivante :

En général, même quand on sait primitiver deux fonctions, on NE sait PAS primitiver leur **PRODUIT**, leur **QUOTIENT**, leur **COMPOSÉE**.

Cette mise en garde précédente ne signifie pas qu'on ne sait rien faire. On sait déjà primitiver toutes les fonctions usuelles, en inversant simplement le tableau des dérivées (voir le tableau à la fin de ce chapitre pour un récapitulatif des primitives usuelles - À CONNAÎTRE BIEN SÛR PARFAITEMENT).

Par ailleurs, étant donné la définition d'une primitive, certains résultats connus pour les fonctions dérivées se prolongent aux fonctions primitives.

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I .

Exemple 11.20 –

- Déterminer les primitives de la fonction f définie par $f(x) = xe^{x^2}$.

f semble être de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2$. Or $u'e^u = 2xe^{x^2}$ ainsi $xe^{x^2} = \frac{1}{2}u'e^u$. On a donc :

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

- Déterminer les primitives de la fonction g définie par $g(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.

g semble être de la forme $-\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$. On a : $-\frac{u'}{u^2} = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ ainsi $g(x) = \frac{u'}{u^2}$. On a donc :

$$G(x) = -\frac{1}{x^2+x+1} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

- Déterminer les primitives de la fonction h définie par $h(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$.

h semble être de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^{2x}-1$. Or $\frac{u'}{u} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} = h(x)$. On a donc :

$$H(x) = \ln|e^{2x}-1| + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

- Déterminer les primitives de la fonction i définie par $i(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$.

i semble être de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 1 + \ln(x)$. Or $\frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{1+\ln(x)}} = \frac{1}{2x\sqrt{1+\ln(x)}}$. Ainsi $i(x) = 2 \times \frac{u'}{2\sqrt{u}}$. On a donc :

$$I(x) = 2\sqrt{|1+\ln(x)|} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

- Déterminer les primitives de la fonction j définie par $j(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^4}$.

j semble être de la forme $u'u^{-4}$ avec $u(x) = x^2 + 2x + 3$. Or $u'u^{-4} = (2x+2)(x^2+2x+3)^{-4} = 2 \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^4}$. Ainsi

$j(x) = \frac{1}{2}u'u^{-4}$. On a donc $J(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{-4+1}(x^2+2x+3)^{-4+1} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$, soit

$$J(x) = \frac{-1}{6(x^2+2x+3)^3} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

- Déterminer les primitives de la fonction k définie par $k(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

k semble être de la forme $u'\cos(u)$ avec $u(x) = \sqrt{x}$. Or $u'\cos(u) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}k(x)$. Ainsi $k(x) = 2u'\cos(u)$.

On a donc :

$$K(x) = 2\sin(\sqrt{x}) + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

- Déterminer les primitives de la fonction ℓ définie par $\ell(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$.

ℓ semble être de la forme $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ avec $u(x) = x^2$. Or $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} = 2\ell(x)$. Ainsi $\ell(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$. On a donc :

$$L(x) = \frac{1}{2}\arcsin(u) + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$


Méthode 11.21 – Déterminer la primitive vérifiant une condition donnée

Pour déterminer la primitive F d'une fonction f vérifiant une condition donnée :

1. On commence par déterminer la forme générale de toutes les primitives de la fonction f : elles sont toutes de la forme $F + C$.
2. On utilise ensuite la condition que doit vérifier la primitive demandée pour déterminer la valeur de la constante C .

Exemple 11.22 – Calculer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ qui vérifie la condition $F(1) = 1$.

Je commence par déterminer la forme générale des primitives de f . f est un polynôme donc je peux primitiver terme à terme :

$$F(x) = 3 \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} + 2x + C = x^3 - 2x^2 + 2x + C.$$

Je dois maintenant déterminer la valeur de la constante C . Je sais que $F(1) = 1$ donc

$$1^3 - 2 \times 1^2 + 2 + C = 1.$$

Autrement dit, $2 + C = 1$. Donc $C = -1$ et la primitive F de f qui vérifie $F(1) = 1$ est

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

2 – Linéarisation de polynômes trigonométriques

Linéariser une expression trigonométrique, c'est transformer un produit de fonctions circulaires en une somme de telles fonctions. Pour cela, on effectue les étapes suivantes :

1. on remplace chaque occurrence des fonctions cosinus et sinus par leur expression en nombres complexes à l'aide des formules d'Euler :
2. on développe, à l'aide de la formule du binôme, les différents produits qui apparaissent dans l'expression ;
3. on réutilise les formules d'Euler pour revenir aux fonctions circulaires.

Exemple 11.23 – Linéariser $\cos^3(\theta) \sin^2(2\theta)$, c'est-à-dire exprimer cette quantité en fonction de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ avec $k \geq 1$. On a d'après la formule du binôme

$$\cos^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta})$$

donc

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + \frac{3}{8} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{4} \cos(3\theta) + \frac{3}{4} \cos(\theta).$$

De même,

$$\sin^2(2\theta) = \left(\frac{e^{i2\theta} - e^{-i2\theta}}{2i} \right)^2 = \frac{1}{-4} (e^{4i\theta} - 2 + e^{-4i\theta}) = \frac{-2}{-4} + \frac{1}{-2} \left(\frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 - \cos(4\theta))$$

On peut maintenant linéariser le produit des deux.

$$\begin{aligned} \cos^3(\theta) \sin^2(2\theta) &= \frac{1}{-32} (e^{7i\theta} - 2e^{3i\theta} + e^{-i\theta} + 3e^{5i\theta} - 6e^{i\theta} + 3e^{-3i\theta} + 3e^{3i\theta} - 6e^{-i\theta} + 3e^{-5i\theta} + e^i - 2e^{-3i\theta} + e^{-7i\theta}) \\ &= \frac{1}{-32} ((e^{7i\theta} + e^{-7i\theta}) + (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) - 5(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + 6(e^{5i\theta} + e^{-5i\theta})) \\ &= \frac{-1}{16} (\cos(7\theta) + 3\cos(5\theta) + \cos(3\theta) - 5\cos(\theta)) \end{aligned}$$

Notons que les formules

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)], \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)], \quad \sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \cos(x-y)]$$

sont des cas particuliers de linéarisation d'expressions trigonométriques.

Cette technique est particulièrement utile dans le calcul des primitives des produits de fonctions trigonométriques.

Exemple 11.24 – Pour trouver une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos^3(x) \sin^2(2x).$$

Il suffit de linéariser $\cos^3(x) \sin^2(2x)$ puis de primitiver chaque terme : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{-1}{16} (\cos(7x) + 3 \cos(5x) + \cos(3x) - 5 \cos(x))$$

donc en définissant la fonction F par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{-1}{16} \left(\frac{1}{7} \sin(7x) + \frac{3}{5} \sin(5x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - 5 \sin(x) \right),$$

la fonction F est une primitive de f .

On a alors :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3(x) \sin^2(2x) dx = \left[\frac{-1}{16} \left(\frac{1}{7} \sin(7x) + \frac{3}{5} \sin(5x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - 5 \sin(x) \right) \right]_0^{\pi/2} = \frac{-1}{16} \left(\frac{-1}{7} + \frac{3}{5} - \frac{1}{3} - 5 \right) = \frac{32}{105}$$

3 – Décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle

Exemple 11.25 –

- Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in]2; +\infty[, \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}.$$

- En déduire une primitive sur $]2; +\infty[$ de f :

$]2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$	
$x \mapsto$	$\frac{1}{(x-1)(x-2)}.$

- Soient a et b deux réels. Pour tout $x \in]2; +\infty[$,

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2) + b(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(a+b)x + (-2a-b)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\text{Si } \begin{cases} a+b=0 \\ -2a-b=1 \end{cases}, \text{ alors on a bien pour tout } x \in]2; +\infty[, \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}.$$

$$\text{Or, } \begin{cases} a+b=0 \\ -2a-b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-b \\ 2b-b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases} \quad \text{Donc, } \forall x \in]2; +\infty[, \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

- Une primitive de f sur $]2; +\infty[$ est alors F :

$]2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$	
$x \mapsto$	$-\ln(x-1) + \ln(x-2)$

 , autrement dit la fonction

$$F: \begin{matrix}]2; +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\ln(x-1) + \ln(x-2) \end{matrix}$$

Cette technique est un cas particulier de décomposition en éléments simples.

On s'intéresse dans ce chapitre uniquement aux fonctions de la forme $f: x \mapsto \frac{px+q}{ax^2+bx+c}$ avec p, q, a, b, c réels et $a \neq 0$ mais nous verrons plus tard dans l'année que la démarche se généralise à toute fonction de la forme $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q des polynômes (une telle fonction est appelée fraction rationnelle).

Nous allons voir sur des exemples les différents cas pouvant se produire. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Méthode 11.26 – Cas « deux racines réelles simples », c'est-à-dire $\Delta > 0$

Si $\Delta > 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ possède deux racines distinctes réelles α_1 et α_2 . Dans ce cas, il existe deux réels k_1 et k_2 tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1; \alpha_2\}$,

$$\frac{px + q}{ax^2 + bx + c} = \frac{k_1}{x - \alpha_1} + \frac{k_2}{x - \alpha_2}.$$

Ensuite, on obtient une primitive de $x \mapsto \frac{k_1}{x - \alpha_1}$, par exemple $x \mapsto k_1 \ln(|x - \alpha_1|)$.

Exemple 11.27 – Calculer $\int_3^4 \frac{3x+2}{x^2-3x+2} dx$.

Le trinôme $x^2 - 3x + 2$ possède deux racines distinctes, 1 et 2.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

On cherche alors les nombres réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, $\frac{3x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, $\frac{3x+2}{x-2} = a + (x-1)\frac{b}{(x-2)}$. En prenant la limite en 1, on obtient $a = -5$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, $\frac{3x+2}{x-1} = a\frac{x-2}{x-1} + b$. En prenant la limite en 2, on obtient $b = 8$.

Donc,

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{3x+2}{x^2-3x+2} dx &= \int_3^4 \left(\frac{-5}{x-1} + \frac{8}{x-2} \right) dx = [-5 \ln(|x-1|) + 8 \ln(|x-2|)]_3^4 \\ &= [-5 \ln(x-1) + 8 \ln(x-2)]_3^4 = -5 \ln(3) + 8 \ln(2) + 5 \ln(2) - 8 \ln(1) \\ &= 13 \ln(2) - 5 \ln(3) \end{aligned}$$

Méthode 11.28 – Cas « une racine réelle double », c'est-à-dire $\Delta = 0$

Si $\Delta = 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ possède une unique racine réelle α_0 .

On force au numérateur une factorisation par $(x - \alpha_0)$: Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{px + q}{a(x - \alpha_0)^2} &= \frac{p(x - \alpha_0) + q + p\alpha_0}{a(x - \alpha_0)^2} = \frac{p(x - \alpha_0)}{a(x - \alpha_0)^2} + \frac{q + p\alpha_0}{a(x - \alpha_0)^2} \\ &= \frac{p}{a(x - \alpha_0)} + \frac{q + p\alpha_0}{a(x - \alpha_0)^2}. \end{aligned}$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x - \alpha_0}$ est $x \mapsto \ln(x - \alpha_0)$.

$x \mapsto \frac{1}{(x - \alpha_0)^2}$ est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u : x \mapsto x - \alpha_0$. Une primitive en est donc $x \mapsto \frac{-1}{x - \alpha_0}$.

Exemple 11.29 – Calculer $\int_2^3 \frac{3x+2}{2x^2-4x+2} dx$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{2(x-1)^2} &= \frac{3(x-1) + 5}{2(x-1)^2} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{1}{x-1} + \frac{5}{2} \frac{1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

On déduit que $x \mapsto \frac{3}{2} \ln(|x-1|) + \frac{5}{2} \frac{1}{x-1}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{3x+2}{2x^2-4x+2}$ sur $[2;3]$.

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{3x+2}{2x^2-4x+2} dx &= \int_2^3 \left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{x-1} + \frac{5}{2} \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \left[\frac{3}{2} \ln(x-1) - \frac{5}{2} \frac{1}{x-1} \right]_2^3 \\ &= \frac{3}{2} \ln(2) - \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \ln(1) + \frac{5}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{2} \ln(2) + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Méthode 11.30 – Cas « pas de racines réelles », c'est-à-dire $\Delta < 0$

Si $\Delta < 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racine réelle. On effectue la transformation suivante, visant à faire apparaître la dérivée du dénominateur : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{\frac{p}{2a}(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \frac{q - \frac{pb}{2a}}{ax^2+bx+c}.$$

$x \mapsto \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$, donc $x \mapsto \ln(ax^2+bx+c)$ en est une primitive.

Pour trouver une primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$, on met le dénominateur sous forme canonique afin de faire apparaître la dérivée d'une fonction du type $x \mapsto \text{Arctan}(\beta x + \alpha)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ (rappel : $-\Delta > 0$),

$$\begin{aligned} \frac{1}{ax^2+bx+c} &= \frac{1}{a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]} = \frac{1}{\frac{-\Delta}{4a} \left[\left(\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}} x + \frac{b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 + 1 \right]} \\ &= \frac{\alpha}{1 + (\beta x + \gamma)^2} \end{aligned}$$

où $\alpha = \frac{4a}{-\Delta}$, $\beta = \frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}$ et $\gamma = \frac{b}{\sqrt{-\Delta}}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{\alpha}{1 + (\beta x + \gamma)^2}$ est alors $x \mapsto \frac{\alpha}{\beta} \text{Arctan}(\beta x + \gamma)$.

Exemple 11.31 – Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{3x+1}{2x^2+x+1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{2x^2+x+1} &= \frac{\frac{3}{4} \times (4x+1) - \frac{3}{4} + 1}{2x^2+x+1} \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{2x^2+x+1} \end{aligned}$$

On calcule alors séparément une primitive des deux termes. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int^x \frac{4t+1}{2t^2+t+1} dt = \ln(|2x^2+x+1|) = \ln(2x^2+x+1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{4}}{2x^2+x+1} &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{\frac{7}{16}} \times \frac{1}{\frac{16}{7} \times \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{2}{7} \times \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \times \frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

On en déduit alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int^x \frac{\frac{1}{4}}{2t^2 + t + 1} dt = \int^x \frac{1}{2\sqrt{7}} \times \frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}t + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} dt = \frac{1}{2\sqrt{7}} \times \text{Arctan}\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

Finalement, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \frac{3x+1}{2x^2+x+1}$ est la fonction $F : x \mapsto \frac{3}{4} \ln(2x^2+x+1) + \frac{1}{2\sqrt{7}} \times \text{Arctan}\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$.

III – Technique avancée 1 : Intégration par parties

1 – Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 11.32 – Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est de **classe $\mathcal{C}^1$** sur I si f est dérivable sur I et que sa dérivée est continue sur I .

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I se note $\mathcal{C}^1(I)$.

Exemple 11.33 – La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\text{Arctan}' : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$. Arctan' est continue sur $\mathbb{R}$, donc Arctan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui est continue sur $]0; +\infty[$, donc $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.



ATTENTION! De classe $\mathcal{C}^1$ $\neq$ Dérivable à dérivée continue $\neq$ Dérivable **ET** continue.

Proposition 11.34 – Ce qu'il faut savoir sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

1. Les fonctions polynomiales, $\cos$, $\sin$, $\tan$, $\exp$, $\ln$, ch , sh , th , Arctan sont de classe de $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition.
2. Arccos , Arcsin et les fonctions puissances sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine de dérivabilité. (Elle ne peuvent bien sur pas être de classe $\mathcal{C}^1$ sur un domaine où elles ne sont pas dérivables).
3. La somme, le produit, le quotient (s'il est bien défini) et la composée (là où elle a un sens) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

2 – Le principe

Théorème 11.35 – Intégration par parties

Soient $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Soient a et b dans I . Alors,

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Démonstration. uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$. Comme u , v , u' et v' sont continues sur I , on en déduit que $(uv)'$ est continue sur I . On a alors :

$$\int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t)) dt = \int_a^b (uv)'(t) dt \text{ i.e. } \int_a^b u'(t)v(t) dt + \int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b$$

□

On peut aussi pratiquer des intégrations par parties sur des intégrales sans borne inférieure pour calculer des primitives. La formule prend dans ce cas la forme suivante :

$$\int^x u'(t)v(t) dt = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t) dt$$

3 – Application : Primitives des fonctions multipliées par une fonction polynomiale

Méthode 11.36 –



On cherche à calculer les primitives et intégrales de fonctions de la forme $t \mapsto P(t)e^{at}$, $t \mapsto P(t)\sin(at)$, $t \mapsto P(t)\cos(at)$, $t \mapsto P(t)\operatorname{sh}(at)$, $t \mapsto P(t)\operatorname{ch}(at)$ où P est une fonction polynomiale et $a \in \mathbb{R}$.

Pour cela, une méthode efficace est d'appliquer la méthode d'intégration par parties en dérivant le polynôme afin de « faire baisser son degré ».

On répète alors cela jusqu'à obtenir un polynôme constant.

Exemple 11.37 – Déterminer la valeur de $\int_0^1 x e^{2x} dx$.

On pose $u : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $u'(x) = 1$, $v'(x) = e^{2x}$.

Ainsi, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{2x} dx &= \int_0^1 u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x) v(x) dx \\ &= \left[x \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} (e^2 - e^0) = \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

Exemple 11.38 – Déterminer la primitive de $x \mapsto x^2 \sin(x)$ s'annulant en 0.

Nous allons calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x t^2 \sin(t) dt$ en fonction de x . On pose $u_1 : [0; x] \rightarrow \mathbb{R}$ et $v_1 : [0; x] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto -\cos(t)$$

u_1 et v_1 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémité 0 et x . Pour tout t dans ce segment, $u_1'(t) = 2t$, $v_1'(t) = \sin(t)$.

En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 \sin(t) dt &= \int_0^x u_1(t) v_1'(t) dt = [u_1(t) v_1(t)]_0^x - \int_0^x u_1'(t) v_1(t) dt \\ &= [-t^2 \cos(t)]_0^x - \int_0^x 2t(-\cos(t)) dt = -x^2 \cos(x) + \int_0^x 2t \cos(t) dt. \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale nous allons à nouveau intégrer par parties.

On pose $u_2 : [0; x] \rightarrow \mathbb{R}$ et $v_2 : [0; x] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto 2t$ et $t \mapsto \sin(t)$.

u_2 et v_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémité 0 et x . Pour tout t dans ce segment, $u_2'(t) = 2$, $v_2'(t) = \cos(t)$.

En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^x 2t \cos(t) dt &= \int_0^x u_2(t) v_2'(t) dt = [u_2(t) v_2(t)]_0^x - \int_0^x u_2'(t) v_2(t) dt \\ &= [2t \sin(t)]_0^x - \int_0^x 2 \sin(t) dt = 2x \sin(x) - 2[-\cos(t)]_0^x \\ &= 2x \sin(x) + 2 \cos(x) - 2 \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_0^x t^2 \sin(t) dt = -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) - 2.$$

4 – La grosse astuce de malade : multiplier par 1



Méthode 11.39 –

Pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, on peut utiliser l'intégration par parties pour calculer $\int_a^b f(t) dt$. Pour cela, on écrit que $f = u'v$ avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto f(t)$.
On peut résumer cela par : « On intègre 1 et on dérive f ».

Exemple 11.40 – Déterminer la primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

On pose $u :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $v :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(t)$. u et v sont de classe C^1 .

En intégrant par parties, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \int^x \ln(t) dt &= \int^x 1 \cdot \ln(t) dt \\ &= \int^x u'(t) v(t) dt \\ &= u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t) dt \\ &= x \ln(x) - \int^x t \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= x \ln(x) - x \end{aligned}$$

Une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$ est $x \mapsto x \ln(x) - x$.

IV – Technique avancée 2 : Changement de variable

1 – Le principe

Théorème 11.41 – Changement de variable

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point. Soit f une fonction continue sur J et φ une fonction de classe C^1 sur I telle que : $\forall t \in I, \varphi(t) \in J$. Pour tous réels a et b dans I ,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (11.1)$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable $u = \varphi(t)$.

Démonstration. f est continue sur J , donc elle admet des primitives sur J . Notons F une primitive de f sur J . Alors, $F \circ \varphi$ est bien définie et est de classe C^1 sur I . Pour tout $t \in I$, on a, $(F \circ \varphi)'(t) = F' \circ \varphi(t) \times \varphi'(t)$, donc

$$(F \circ \varphi)'(t) = f \circ \varphi(t) \varphi'(t) \quad (11.2)$$

Donc, pour tout $a, b \in I$, on a en intégrant (11.2) entre a et b :

$$\int_a^b f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt = \int_a^b (F \circ \varphi)'(t) dt = [F \circ \varphi(t)]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$$

□

2 – En pratique

Deux cas peuvent se présenter lorsqu'on désire effectuer un changement de variable dans une intégrale donnée $\mathcal{I}$: ou bien $\mathcal{I}$ peut s'écrire facilement comme le membre de droite de l'égalité (11.1), ou bien comme le membre de gauche de (11.1).

Méthode 11.42 –

- 1 On donne le changement de variable que l'on utilise (même s'il est donné dans l'énoncé). On donne les valeurs entre lesquelles les deux variables varient.
Les bornes de celle intervenant dans l'intégrale de l'énoncé sont imposées.
Pour l'autre, on trouve les bornes grâce à la formule de changement de variable. Il y a deux cas :
On peut avoir directement les valeurs (cf. exemple 11.43)
On peut avoir besoin de résoudre une équation (cf. exemple 11.44). S'il y a plusieurs solutions à l'équation, on en prend une. Il faudra faire attention que le reste de la méthode marche bien avec celle qu'on a choisie.
- 2 On définit la fonction φ associée au changement de variable (qui est de la forme "machin" = φ ("truc")).
On vérifie (et on l'écrit) que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.
- 3 on calcule la différentielle $du = \varphi'(t) dt$. Pour cela, la recette est la suivante :
Partir de $u = \varphi(t)$ et la différentier. C'est-à-dire la dériver comme si u et t étaient des fonctions, dont on note du et dt les dérivées.
- 4 On transforme l'intégrande $f(u) du$ en $g(t) dt$.
Pour cela on commence toujours par faire apparaître $\varphi'(t) dt$ que l'on peut remplacer par du pour ne plus y toucher.
Dans ce qui reste, on transforme les "t" en "u" grâce à la formule de changement de variable.
- 5 On termine le changement de variable en égalant les deux intégrales. Ne pas oublier de mettre les bonnes bornes à chacune des variables.



ATTENTION ! Après le changement de variable, seule la nouvelle variable doit apparaître dans l'intégrale. Il ne peut y avoir de « mélange » des deux variables.

Exemple 11.43 – Calculer l'intégrale $\int_0^2 \frac{e^t}{\text{ch}(t)} dt$ en effectuant le changement de variable $u = e^t$.

- 1 On effectue le changement de variable $u = e^t$.
 t prend les valeurs de 0 à 2.
 u prend les valeurs de $e^0 = 1$ à e^2 .
- 2 La fonction $\varphi : t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 2]$.
- 3 On a $du = e^t dt$.
- 4 et

$$\frac{e^t}{\text{ch}(t)} dt = \frac{2}{e^t + e^{-t}} e^t dt = \frac{2}{e^t + \frac{1}{e^t}} du = \frac{2e^t}{(e^t)^2 + 1} du = \frac{2u}{u^2 + 1} du$$

- 5 donc

$$\int_0^2 \frac{e^t}{\text{ch}(t)} dt = \int_1^{e^2} \frac{2u}{u^2 + 1} du.$$

- 6 (On termine le calcul :)

$$\int_1^{e^2} \frac{2u}{u^2 + 1} du = \left[\ln(|u^2 + 1|) \right]_1^{e^2} = \ln(e^4 + 1) - \ln(2) = \ln(e^4 + 1) - \ln(2)$$

Exemple 11.44 – Calculer l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en effectuant le changement de variable $t = \cos(u)$.

1 On effectue le changement de variable $t = \cos(u)$

t prend les valeurs de 0 à 1

u prend les valeurs de $\frac{\pi}{2}$ à 0.

Remarques :

1. Il faut bien respecter l'ordre!

2. On aurait pu prendre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π .

2 La fonction $\varphi : u \mapsto \cos(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi/2]$.

3 On a $dt = -\sin(u) du$

4 et

$$\begin{aligned}\sqrt{1-t^2} dt &= \sqrt{1-(\cos(u))^2} \times (-\sin(u) du) = -\sqrt{\sin^2(u)} \sin(u) du \\ &= -|\sin(u)| \sin(u) du\end{aligned}$$

5

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = - \int_{\pi/2}^0 \underbrace{|\sin(u)|}_{\geq 0} \sin(u) du = \int_0^{\pi/2} \sin^2(u) du$$

6 (On termine le calcul :)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2u)) du = \frac{1}{2} \left[u - \frac{\sin(2u)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

On peut aussi pratiquer des changements de variable sur des intégrales sans borne inférieure pour calculer des primitives. La formule prend dans ce cas la forme suivante :

$$\int^x f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int^{\varphi(x)} f(u) du$$

Exemple 11.45 – Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ définie sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on calcule $\int^x \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$.

Soit $x \in]0; +\infty[$.

1 On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$. En t , on intègre "jusqu'à" x et en u , on intègre "jusqu'à" $\sqrt{x}$.

2 La fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3 On a $du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

4 et

$$\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt = \ln((\sqrt{t})^2) \frac{dt}{\sqrt{t}} = \ln(u^2) \times 2 du = 4 \ln(u) du$$

5

$$\int^x \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt = \int^{\sqrt{x}} 4 \ln(u) du.$$

6 (On termine le calcul :)

$$\int^{\sqrt{x}} 4 \ln(u) du = 4 (\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) - \sqrt{x}) = 2\sqrt{x}(\ln(x) - 2).$$

Ainsi, $F : x \mapsto 2\sqrt{x}(\ln(x) - 2)$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

V – Primitives et intégrales d'une fonction réelles à valeurs complexes

1 – Généralisation des résultats réels

Dans tout ce paragraphe, f désigne une fonction de I dans $\mathbb{C}$, et a, b des éléments de I .

Définition 11.46 – On définit l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ par $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (\operatorname{Re}(f))(x) dx + i \int_a^b (\operatorname{Im}(f))(x) dx$.

Exemple 11.47 – $\int_1^2 (e^x + \frac{i}{x}) dx = \int_1^2 e^x dx + i \int_1^2 \frac{1}{x} dx = e^2 - e + i \ln(2)$.

Définition 11.48 – Soit $F : I \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Exemple 11.49 – $F : \begin{matrix}]0; +\infty[& \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^x + i \ln(x) \end{matrix}$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de $f : \begin{matrix}]0; +\infty[& \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^x + \frac{i}{x} \end{matrix}$

Proposition 11.50 – Résultats sur les fonctions à valeurs complexes

1. Si f est continue sur I , alors f admet des primitives sur I et les primitives de f sont les fonctions de la forme $F = g + ih$ où g est une primitive de $\operatorname{Re}(f)$ et h une primitive de $\operatorname{Im}(f)$.
2. Si f est continue sur I , l'unique primitive de f qui s'annule en $a \in I$ est la fonction $F_x : \begin{matrix} I & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t) dt. \end{matrix}$
3. Si F est une primitive de f sur I , alors les autres primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F + c$ avec $c \in \mathbb{C}$.

Proposition 11.51 – Primitive d'une exponentielle complexe

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Une primitive de la fonction $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{\alpha x} \end{matrix}$ est la fonction $F : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \end{matrix}$.

Exemple 11.52 – La fonction $x \mapsto \frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{(1+2i)x}$.

2 – Application aux fonctions du type $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$

Il faut aussi savoir primitiver les fonctions $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$ pour $a, b \in \mathbb{R}^*$. Pour cela, on applique la démarche suivante. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{ax} \cos(bx) = \operatorname{Re}(e^{(a+ib)x})$ et $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ admet $x \mapsto \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$ pour primitive, donc en vertu du principe selon lequel $\operatorname{Re}(f') = \operatorname{Re}(f)'$, la fonction $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ admet pour primitive :

$$x \mapsto \operatorname{Re}\left(\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\right) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} \operatorname{Re}((\cos(bx) + i \sin(bx)) \times (a - ib)) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)).$$

Exemple 11.53 – Calculer une primitive de $x \mapsto e^x \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de $x \mapsto e^{(1+2i)x}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i}$. Déterminons sa forme algébrique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i} = \frac{1}{5} (1-2i) e^x (\cos(2x) + i \sin(2x)) = \frac{1}{5} e^x (\cos(2x) + 2 \sin(2x)) + \frac{i}{5} e^x (-2 \cos(2x) + \sin(2x)).$$

Ainsi, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^x \sin(2x)$ est $x \mapsto \frac{1}{5} e^x (-2 \cos(2x) + \sin(2x))$.

Tableau récapitulatif des primitives usuelles

Fonctions	Primitives	Fonctions	Primitives
A (constante)	$Ax + C$		
x^α ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$u' u^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C$
En particulier si $\alpha = -2, \frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u} + C$
En particulier si $\alpha = -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C$
e^x	$e^x + C$	$u' e^u$	$e^u + C$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$u' \ln(u)$	$u \ln(u) - u$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$u' \cos(u)$	$\sin(u) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$u' \sin(u)$	$-\cos(u) + C$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) + C$	$u' \tan(u)$	$-\ln \cos(u) + C$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$	$u' \operatorname{ch}(u)$	$\operatorname{sh}(u)$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$	$u' \operatorname{sh}(u)$	$\operatorname{ch}(u)$
$\operatorname{th}(x)$	$\ln \operatorname{ch}(x)$	$u' \operatorname{th}(u)$	$\ln \operatorname{ch}(u)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arccos(u)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u) + C$