

10 Suites convergentes de nombres réels et complexes

I believe that numbers and functions of Analysis are not the arbitrary result of our minds ; I think that they exist outside of us, with the same character of necessity as the things of objective reality, and we meet them or discover them, and study them, as do the physicists, the chemists and the zoologists.

Charles Hermite (1822-1901), mathématicien.

I – Limites des suites réelles

1 – Limite finie d'une suite réelle

Définition 10.1 – On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers un réel ℓ si, et seulement si, u_n est aussi proche que l'on veut de ℓ au delà d'un certain rang, ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Cela signifie qu'au delà du rang N_ε (qui dépend a priori de ε), tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

On dit alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite convergente** et le réel ℓ est appelé **limite de la suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note alors

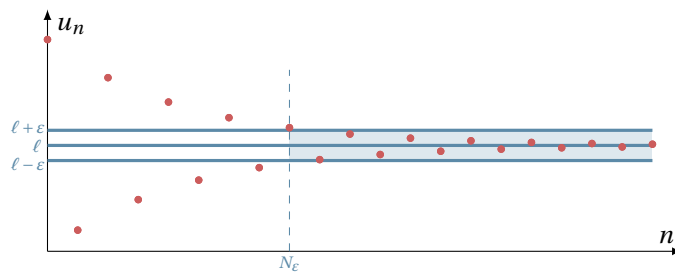
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Remarque 10.2 – On a également que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| \leq c\varepsilon.$$

où c est une constante strictement positive (ne dépendant ni de n , ni de ε).

Il suffit d'appliquer la définition à $\varepsilon' = c\varepsilon$.



Graphiquement, toute bande horizontale centrée sur la droite d'équation $y = \ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définition 10.3 – On dit qu'une suite est **divergente** ou qu'elle **diverge** lorsqu'elle n'est pas convergente.

Proposition 10.4 – Unicité d'une limite finie

La limite ℓ d'une suite convergente est unique.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell'$. Nous allons montrer par l'absurde que $\ell = \ell'$. On suppose que $\ell \neq \ell'$.

On pose alors $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3}$. Alors $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ' , il existe $N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N'_\varepsilon, |u_n - \ell'| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire d'après l'inégalité triangulaire

$$|\ell - \ell'| = |(u_n - \ell') - (u_n - \ell)| \leq |u_n - \ell'| + |u_n - \ell|$$

Pour tout $n \geq \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$, on obtient

$$|u_n - \ell'| + |u_n - \ell| \leq \varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

donc

$$|\ell - \ell'| \leq \frac{2}{3} |\ell - \ell'|.$$

Ceci est absurde, donc $\ell = \ell'$. □

2 – Propriétés des suites convergentes

Pour montrer qu'une suite converge vers une limite ℓ on se ramène souvent à montrer qu'une autre suite tend vers 0 grâce à la proposition suivante :

Proposition 10.5 – Décalage de limite en 0

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, la suite $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Démonstration.

$$\begin{aligned} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } \ell &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| \leq \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |(u_n - \ell) - 0| \leq \varepsilon \\ &\iff (u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } 0 \end{aligned}$$
□

Proposition 10.6

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente. On note ℓ sa limite.

Par définition de la convergence de la suite vers ℓ , il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

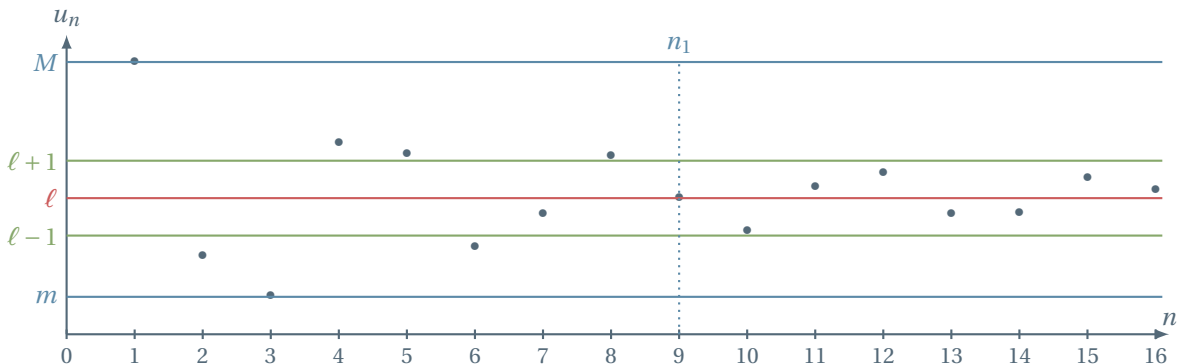
$$\forall n \geq n_1, \ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$$

On considère alors l'ensemble $A = \{u_0, u_1, \dots, u_{n_1-1}\}$. C'est un ensemble fini, qui admet un plus petit élément m_0 et un plus grand élément M_0 .

En posant $m = \min(\ell - 1, m_0)$ et $M = \max(\ell + 1, M_0)$, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m \leq u_n \leq M,$$

ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.



□

Proposition 10.7 – Convergence et caractère bornée

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente. On note ℓ sa limite. Soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m < \ell < M$.

1. Il existe $N_m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_m, u_n > m$.
2. Il existe $N_M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_M, u_n < M$.
3. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, m < u_n < M$.

Démonstration. On démontre le 1., la démonstration du 2. est similaire.

1. Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon.$$

On pose $\varepsilon = \frac{\ell - m}{2} > 0$. On obtient avec ce qui précède qu'il existe un rang N_m tel que $\forall n \geq N_m, u_n \geq \frac{\ell + m}{2} > m$ (car $\ell > m$).
Ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Corollaire 10.8 – Lien entre convergence et signe

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers une limite $\ell > 0$ est minorée par un réel $m > 0$ au delà d'un certain rang.

Démonstration. On utilise le résultat 1. de la proposition précédente avec $m = \ell/2$. $\square$

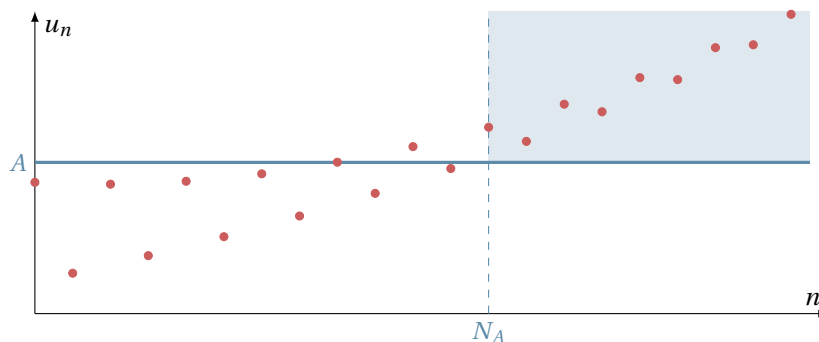
3 – Suites tendant vers l'infini**Définition 10.9 –**

• On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$ si on peut rendre u_n aussi grand que l'on veut au delà d'un certain rang, c'est-à-dire si et seulement si elle vérifie

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_A, u_n \geq A.$$

• On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$ si on peut rendre u_n aussi petit que l'on veut au delà d'un certain rang, c'est-à-dire si et seulement si elle vérifie

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_A, u_n \leq A.$$



ATTENTION ! Une suite tendant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ n'est pas une suite convergente. On dit qu'elle diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ ou encore que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite.

II – Opérations sur les limites

1 – Somme, Produit, Quotient

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose dans tout ce paragraphe que les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ EXISTENT. Dans les tableaux ci-dessous, le symbole **???** ne signifie pas une absence de limite mais une *indétermination*, i.e. une impossibilité de conclure en toute généralité, qui nécessite donc un traitement au cas par cas.

ADDITION	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	???

PRODUIT	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n)$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	???

MULTIPLICATION PAR UN RÉEL		$\lambda > 0$			$\lambda = 0$	$\lambda < 0$	
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$+\infty$	ℓ	$-\infty$	peu importe	$+\infty$	$-\infty$
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n)$	$+\infty$	$\lambda \ell$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$

INVERSE			$u_n > 0$ à partir d'un certain rang	$u_n < 0$ à partir d'un certain rang	sinon
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Mais finalement, c'est quoi une *forme indéterminée*? C'est une forme à déterminer. Le symbole **???** signifie qu'en effectuant une opération $(+\infty) - (+\infty)$ ou $0 \times (+\infty)$, on peut tomber a priori sur **N'IMPORTE QUEL RÉSULTAT**.

• **Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$:**

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \ell) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((n + \ell) - n) = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - n) = +\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + (-1)^n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $(n + (-1)^n) - n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

• **Cas de la forme indéterminée $0 \times (+\infty)$:**

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ell}{n} \times n \right) = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \times n^2 \right) = +\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, mais $\frac{(-1)^n}{n} \times n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Démonstration. Nous ne démontrerons pas tous les résultats des tableaux précédents.

- **Somme de deux limites finies :** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire : $|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|$.
Or par hypothèse, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang N et $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang N' , donc pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$: $|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
- **Somme d'une limite finie et d'une limite $+\infty$:** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < 1$ à partir d'un certain rang N , donc $u_n > \ell - 1$, et $v_n > A - \ell + 1$ à partir d'un certain rang N' , donc pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$: $u_n + v_n > (\ell - 1) + (A - \ell + 1) = A$.
- **Produit de deux limites finies :** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire : $|u_n v_n - \ell \ell'| = |(u_n - \ell) v_n + \ell (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| \cdot |v_n| + |\ell| \cdot |v_n - \ell'|$.
Or $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente donc bornée, disons par K en valeur absolue. En outre, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2K}$ à partir d'un certain rang N et $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)}$ à partir d'un certain rang N' , donc pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$:
$$|u_n v_n - \ell \ell'| \leq |u_n - \ell| \cdot |v_n| + |\ell| \cdot |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2K} \times K + |\ell| \times \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
- **Produit $\ell \times (+\infty)$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+^*$:** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < \frac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang N , donc $u_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$, et $v_n > \frac{2A}{\ell}$ à partir d'un certain rang N' , donc pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$: $u_n v_n > \frac{\ell}{2} \times \frac{2A}{\ell} = A$.
- **Produit de deux limites $+\infty$:** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $u_n > A$ à partir d'un certain rang N et $v_n > 1$ à partir d'un certain rang N' , donc pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$: $u_n v_n > A \times 1 = A$.
- **Inverse d'une limite finie non nulle :** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \neq 0$. Ainsi, $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang N . Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \geq N$: $\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| \cdot |\ell|}$. Or par hypothèse, $|u_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$ à partir d'un certain rang N' , donc :
 $|u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \geq |\ell| - |u_n - \ell| > |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}$ d'après l'inégalité triangulaire, donc pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$:
 $\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| \leq \frac{2}{|\ell|^2} |u_n - \ell|$. Mais comme $|u_n - \ell| < \frac{|\ell|^2}{2} \varepsilon$ à partir d'un certain rang N'' , pour tout $n \geq \max\{N, N', N''\}$:
 $\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| < \varepsilon$.
- **Inverse d'une limite $+\infty$:** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Ainsi $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang N . Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$ à partir d'un certain rang N' , donc pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$: $\left| \frac{1}{u_n} \right| = \frac{1}{u_n} < \varepsilon$.
- **Inverse d'une limite nulle de suite strictement positive :** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ avec $u_n > 0$ à partir d'un certain rang N . Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n| < \frac{1}{A}$ à partir d'un certain rang N' , donc pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$:
 $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{|u_n|} > A$.

□

2 – Composition par une fonction

Le résultat suivant est momentanément admis car il requiert la notion de limite d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui sera définie proprement dans quelques temps.

Proposition 10.10

Soit (u_n) une suite, soient $\ell, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant ℓ . On suppose que :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in I$
- $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = L$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$.

Exemple 10.11 –

1. Étudions la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \exp\left(-\frac{1}{n^2}\right).$$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ donc par composée de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

2. Étudions la limite éventuelle de la suite (w_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ donc par composée de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$
 Résultat à connaître!

Démonstration. On peut supposer $x \neq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{x}{n})}$. Or $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \ln'(1) = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = 1$ par composition,

i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$, et on compose enfin avec la limite $\lim_{t \rightarrow x} e^t = e^x$. $\square$



ATTENTION !

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \not\equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 1$$

Autrement dit, $1^{+\infty}$ EST UNE NOUVELLE FORME INDÉTERMINÉE.

III – Techniques pour lever une forme indéterminée

1 – Lever une indétermination par croissance comparée

Avant toute chose, rappelons le résultat suivant : soit $q \in \mathbb{R}$, alors
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 0 & \text{si } q \in]-1; 1[\\ \text{n'existe pas} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

Théorème 10.12 – Croissance comparée

- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $b > 0$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0$.
- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $q \in]-1; 1[$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a q^n = 0$.
- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $q > 1$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0$.
- Pour tout $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$ et pour tout $q \in]0; 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! q^n = +\infty$.

Remarque 10.13 – Soient a et b deux nombres réels. Soit q un réel strictement positif.

1. La suite $(n!)_n$ « l'emporte » sur les suites $(q^n)_n$, $(n^a)_n$ et $(\ln(n)^b)_n$.
2. La suite $(q^n)_n$ « l'emporte » sur les suites $(n^a)_n$ et $(\ln(n)^b)_n$.
3. La suite $(n^a)_n$ « l'emporte » sur la suite $(\ln(n)^b)_n$.

Remarque 10.14 – e^n rentre dans le cadre de ce théorème en prenant $q = e$. On pourra alors retenir la règle suivante : « la factorielle l'emporte sur l'exponentielle qui l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur le logarithme. »



ATTENTION ! La croissance comparée **ne s'applique pas** pour des sommes ou des différences.

Exemple 10.15 – Étudions la convergence des suites ci-dessous :

1. $u_n = \frac{2^n}{n^{100}}.$

On remarque tout d'abord que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{100} = +\infty$, nous sommes donc face à une forme indéterminée. On peut la lever grâce au théorème ci-dessus qui nous donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{100}}{2^n} = 0^+$. On a alors par passage à l'inverse :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

2. $v_n = \frac{\ln(n)}{n}.$

On est bien face à une forme indéterminée et grâce au théorème ci-dessus, on peut conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

3. $w_n = n^3 e^{-2n}.$

On remarque que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n} = 0$. Nous sommes bien face à une FI. Nous pouvons la lever grâce au point 2 du théorème précédent car $e^{-2} \in]-1; 1[$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0.$$



ATTENTION ! Attention à ne pas voir de la croissance comparée partout !

Exemple 10.16 – Par exemple, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n}}{\ln(n)} = 0$ par les propriétés du quotient, il n'y a pas de forme indéterminée.

2 – Lever une indétermination par factorisation

Lorsqu'une forme indéterminée ne peut pas être levée à l'aide de la croissance comparée, il faut essayer de la lever en factorisant notre expression par le terme prépondérant (Celui qui va le plus vite vers l'infini).

Exemple 10.17 – Dans chacun des cas, cherchons la limite de la suite de terme général :

1. $u_n = n^5 - n^2 + 3.$

Il s'agit bien d'une forme indéterminée. On factorise alors par le terme prépondérant, ici n^5 , on obtient :

$$u_n = n^5 \left(1 - \frac{n^2}{n^5} + \frac{3}{n^5} \right) = n^5 \left(1 - \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^5} \right).$$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^5 = +\infty$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^5} = 0$ donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^5} = 1$. Puis on conclut par propriété du produit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

2. $v_n = \frac{-2n^3 + 2n}{n^3 + 1}$

Il s'agit bien d'une forme indéterminée. On factorise alors par le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur, ici $-2n^3$ au numérateur et n^3 au dénominateur, on obtient :

$$v_n = \frac{-2n^3 \left(1 + \frac{2n}{-2n^3} \right)}{n^3 \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)} = -2 \times \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}}.$$

On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n^3} = 1$ donc par opérations sur les limites, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -2.$$

3. $w_n = e^n - n^{100} - \ln(n)^{100000}$

Il s'agit bien d'une forme indéterminée. On factorise alors par le terme prépondérant, ici e^n , on obtient :

$$w_n = e^n \left(1 - \frac{n^{100}}{e^n} - \frac{\ln(n)^{100000}}{e^n} \right).$$

Par croissance comparée, on a que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{100}}{e^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)^{100000}}{e^n} = 0$. Ainsi par opérations sur les limites, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty.$$

4. $r_n = \sqrt{4n^2 + n} - n$

Il s'agit bien d'une forme indéterminée. On factorise alors par le terme prépondérant, ici n , on obtient :

$$r_n = n \left(\frac{\sqrt{4n^2 + n}}{n} - 1 \right) = n \left(\sqrt{\frac{4n^2 + n}{n^2}} - 1 \right) = n \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 1 \right).$$

On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n}} = \sqrt{4} = 2$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 1 \right) = 1$. On conclut par opérations sur les limites que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = +\infty.$$

Pour résumer, pour lever une forme indéterminée, il faudra appliquer la méthode suivante :

Méthode 10.18 – Lever une forme indéterminée



1. S'assurer qu'il s'agit bien d'une forme indéterminée.
2. Voir si la forme indéterminée peut être levée à l'aide du théorème de croissance comparée. Dans ce cas-là, on peut directement conclure en précisant bien « par croissance comparée » sur la copie.
3. Sinon, on se ramène à un des deux cas précédents en factorisant par le terme prépondérant.
4. Parfois, il faudra être encore plus rusé pour se ramener aux deux premiers cas (expression conjuguée par exemple).

Exemple 10.19 – Étudier la limite éventuelle de la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \sqrt{n^2 + 1} - n.$$

Il s'agit bien d'une forme indéterminée. Ici l'astuce consiste à multiplier par la quantité conjuguée pour se débarrasser du signe -.

$$v_n = \sqrt{n^2 + 1} - n \times \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}.$$

Nous ne sommes alors plus en présence d'une forme indéterminée et nous pouvons conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

Remarque 10.20 – A noter qu'il existe des calculs de limite qui nécessitent des méthodes bien plus complexes et même certaines limites pour lesquelles on ne connaît pas encore de méthode.

IV – Suites extraites

Définition 10.21 – On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, (n < m \implies \varphi(n) < \varphi(m)).$$

La fonction φ n'est jamais qu'une suite strictement croissante d'entiers naturels utilisés comme de nouveaux indices. Par exemple, si $\varphi = (2, 4, 5, 8, 24, 59, \dots)$, la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $(u_2, u_4, u_5, u_8, u_{24}, u_{59}, \dots)$.

Concrètement, pour former une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on ne prend que certains éléments de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en conservant l'ordre d'apparition de ces termes (ce qui explique que φ soit choisie strictement croissante).

Exemple 10.22 –

- Les suites $(\sqrt{2^n + 4n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de la suite $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$, associées respectivement aux fonctions d'extraction $n \mapsto 2^n + 4n$ et $n \mapsto n^2$ strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
- Les suites constantes égales à 1 et -1 respectivement sont deux suites extraites de la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$, est une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Plutôt que de changer le nom de suite, on la note souvent $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Les suites $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$, où p_n désigne le n -ième nombre premier, sont également des sous-suites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



ATTENTION ! Pour $k \in \mathbb{N}$, le terme qui vient après u_{2k} dans la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est $u_{2(k+1)} = u_{2k+2}$ et non u_{2k+1} . De même, le terme qui vient après u_{2k+1} dans la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est $u_{2(k+1)+1} = u_{2k+3}$ et non u_{2k+2} .

Proposition 10.23 – Limite d'une suite extraite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors toute sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend aussi vers ℓ .

Démonstration. On traite d'abord le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Puisque la fonction φ est strictement croissante, on peut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$, on a donc $\forall n \geq N_\varepsilon, \varphi(n) \geq N_\varepsilon$ et donc

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence de la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ .

Les cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ se traitent de façon similaire. □

La contraposée de ce résultat fournit une méthode pour montrer qu'une suite n'a pas de limite.



Méthode 10.24 –

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite, on peut trouver deux sous-suites distinctes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne convergeant pas vers la même limite.

Exemple 10.25 – La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{2n} = 1$ alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{2n+1} = -1$

Exemple 10.26 – Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{2^n + (-2)^n}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{10}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'ont pas de limites.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 2^n$. Donc u_{2n} tend vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = 0$. Donc u_{2n+1} tend vers 0.

Ainsi, on a trouvé deux suites extraites de u ayant des limites différentes, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{20n} = 1$. Donc w_{20n} tend vers 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{20n+5} = 0$. Donc w_{20n+5} tend vers 0.

Ainsi, on a trouvé deux suites extraites de w ayant des limites différentes, donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

Proposition 10.27 – Suites extraites et limites

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ .

Démonstration. On traite le cas où $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers ℓ , il existe $n_{1,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ et $n_{2,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_{1,\varepsilon}, |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_{2,\varepsilon}, |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon.$$

On pose $N_\varepsilon = \max(2n_{1,\varepsilon}, 2n_{2,\varepsilon} + 1)$. On a alors

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Les cas où $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$ se traitent de façon similaire. □

V – Théorèmes d'existence de limite

L'existence d'une limite n'est jamais acquise. Dans les paragraphes qui précèdent, l'existence de certaines limites a été établie - somme, produit, suites extraites, etc. On omet généralement de voir ces résultats comme des théorèmes d'EXISTENCE pour les voir seulement, en pratique, comme des théorèmes de CALCUL, de manipulation des limites. Les théorèmes qui suivent gagnent au contraire à être conçus comme de vrais théorèmes d'existence. Ce qu'ils nous fournissent de façon essentielle, ce n'est pas tant la VALEUR d'une limite que son EXISTENCE.

1 – Théorèmes d'encadrement/minoration/majoration

Théorème 10.28

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Théorème d'encadrement :

Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

2. Théorème de minoration :

Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang, et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. Théorème de majoration :

Si $u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang N , $v_n > \ell - \varepsilon$ à partir d'un rang N' et $w_n < \ell + \varepsilon$ à partir d'un rang N'' , donc pour tout $n \geq \max\{N, N', N''\}$: $\ell - \varepsilon < v_n \leq u_n \leq w_n < \ell + \varepsilon$, et enfin $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
2. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang N et $v_n > A$ à partir d'un certain rang N' , donc pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$: $u_n \geq v_n > A$, et enfin $u_n > A$.

□

Exemple 10.29 – $n! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par minoration, car $n! \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exemple 10.30 – Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{2n^2 + (-1)^n}$.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n \leq 1$.

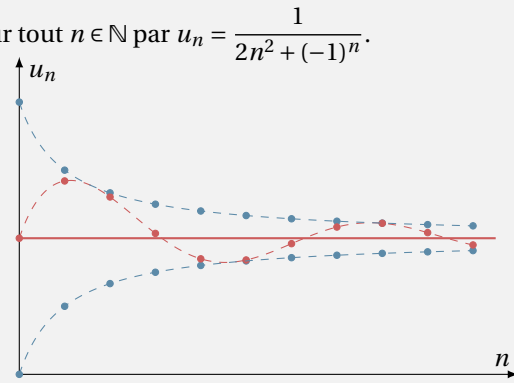
Alors $2n^2 - 1 \leq 2n^2 + (-1)^n \leq 2n^2 + 1$ et donc

$\frac{1}{2n^2 + 1} \leq \frac{1}{2n^2 + (-1)^n} \leq \frac{1}{2n^2 - 1}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{1}{2n^2 - 1}.$$

Enfin comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2 + 1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2 - 1} = 0$, grâce au théorème d'encadrement on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$



(Le graphe n'est pas celui de la suite (u_n) mais est plus visuel.)

Exemple 10.31 – Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = (2 + (-1)^n)n$.

La difficulté se situe au niveau du $(-1)^n$. Mais je sais que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc que $1 \leq 2 + (-1)^n \leq 3$. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \leq (2 + (-1)^n)n = v_n.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, alors je peux en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

Corollaire 10.32

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0, alors leur produit $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démonstration. Sous ces hypothèses, en notant M un majorant de la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n| \leq M |v_n|$. Comme la suite $(M |v_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, il en va de même pour $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\square$

Exemple 10.33 – Montrer que la suite $\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite. La suite $\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0 \text{ car la suite } (\sin(n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2 – Théorème de convergence monotone

Le théorème de convergence monotone est **LE** théorème d'EXISTENCE de limite par excellence. Aucune hypothèse de limite n'y est faite, mais la conclusion c'est qu'une limite existe, qui surgit par magie sans qu'on en connaisse la valeur. Et d'où vient la magie? De la propriété de la borne supérieure!

Théorème 10.34 – Théorème de convergence monotone

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
En notant ℓ la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$.
2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
En notant ℓ la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \ell$.

Démonstration.

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée. On pose $\ell = \sup \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. (ℓ est bien défini, car (u_n) est majorée).
Soit $\varepsilon > 0$.
Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $x \in \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tel que $\ell - \varepsilon \leq x \leq \ell$.

Autrement dit, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq \ell - u_N \leq \varepsilon$.

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N$. De plus, comme ℓ est la borne supérieure de $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, on a en fait $\ell \geq u_n \geq u_N$, c'est à dire,

$$0 \leq \ell - u_n \leq \ell - u_N \leq \varepsilon.$$

Finalement, on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . De plus, comme ℓ est la borne supérieure de $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, on a bien $\ell \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc convergente. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. $\square$



ATTENTION ! Une suite croissante majorée par M converge...
MAIS PAS FORCÉMENT VERS M qui n'est qu'un majorant parmi d'autres!

Exemple 10.35 – On pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{e^k}{3^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Démonstration. D'après le théorème de convergence monotone, il nous suffit de montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Or $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{e^{n+1}}{3^{n+1}} \geq 0$, et majorée car pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{e}{3}\right)^k = \frac{3}{3-e} \left(1 - \left(\frac{e}{3}\right)^{n+1}\right) \leq \frac{3}{3-e}.$$

$\square$

Exemple 10.36 – On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

1. Montrer que la suite (S_n) est croissante.

Calculons $S_{n+1} - S_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Ainsi la suite $(S_n)_n$ est croissante.

2. Dans cette question, on va montrer que la suite (S_n) est majorée par 2.

(a) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Soit $k \geq 2$. On a :

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k}{k(k-1)} - \frac{k-1}{k(k-1)} = \frac{1}{k^2 - k}$$

Or, $k^2 - k \leq k^2$ donc par passage à l'inverse, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2 - k}$, i.e

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

(b) Montrer que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Sommons cette inégalité pour k variant de 2 à n , on obtient :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

La somme de droite est une somme télescopique et vaut :

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

On obtient bien l'inégalité voulue.

(c) En déduire que $(S_n)_n$ est majorée par 2.

On a, d'après la question précédente :

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + 1 - \frac{1}{n}.$$

Or $-\frac{1}{n} < 0$, ainsi

$$S_n \leq 2.$$

3. Conclure.

La suite (S_n) étant croissante et majorée par 2, d'après le théorème de convergence monotone, elle est convergente vers une limite ℓ qui vérifie $\ell \leq 2$.

On ne peut rien dire de plus sur la limite ℓ .

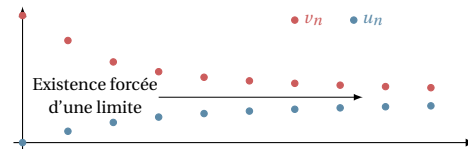
Remarque 10.37 – On peut démontrer (mais nous l'admettons) que la suite (S_n) converge vers $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449340668$.

3 – Suites adjacentes

Définition 10.38 – Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si, et seulement si :

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (ou l'inverse).
2. la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Deux suites adjacentes viennent à la rencontre l'une de l'autre, l'une en croissant, l'autre en décroissant, et finissent par s'écraser l'une contre l'autre. « Il faut bien qu'elles s'écrasent **QUELQUE PART!** » nous dit le théorème des suites adjacentes - théorème d'EXISTENCE.



Théorème 10.39 – Théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si elles sont adjacentes, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes de même limite ℓ .

Par ailleurs, si c'est $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est décroissante, alors pour tous $m, n \in \mathbb{N}$: $u_m \leq \ell \leq v_n$.

Démonstration. Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante (l'autre cas étant bien sûr totalement symétrique).

- Montrons que $u_k \leq v_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geq k$, $u_k \leq u_n$ par croissance et $v_n \leq v_k$ par décroissance, donc $u_k - v_k \leq u_n - v_n$, et ainsi $u_k - v_k \leq 0$ par passage à la limite sur n .
- Montrons ensuite que $u_m \leq v_n$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$. Si $m \leq n$: $u_m \leq u_n \leq v_n$ d'après le premier point et par croissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si au contraire $m > n$: $u_m \leq v_m \leq v_n$ cette fois par décroissance de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dans les deux cas, $u_m \leq v_n$.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par v_0) donc convergente, de limite un certain réel ℓ_u , d'après le théorème de convergence monotone. De même, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par u_0), donc convergente de limite un certain ℓ_v . L'égalité $\ell_u = \ell_v$ découle alors de ce que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.
- Pour finir, l'inégalité $u_m \leq \ell_u = \ell_v \leq v_n$ valable pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ exprime simplement le fait que la suite croissante $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est majorée par sa limite et la suite décroissante $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ minorée par la sienne.

□

Exemple 10.40 – Soient (u_n) et (v_n) définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Conclure. Nous devons montrer que l'une des suites est croissante et que l'autre décroissante. Remarquons tout d'abord que l'on a clairement $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est donc probablement croissante et la suite (v_n) probablement décroissante. Nous avons pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

Ainsi la suite $(u_n)_n$ est bien croissante. On a également pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n!} \right) = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2 - (n+1)}{(n+1)!} = -\frac{n-1}{(n+1)!} < 0. \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(v_n)_n$ est bien décroissante. On a également pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont bien adjacentes. Ainsi elles sont convergentes et elles convergent vers la même limite ℓ .

Remarque 10.41 – On peut démontrer (cf chapitre ultérieur) que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers $e \approx 2.7182818$.

VI – Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans ce paragraphe nous allons étudier les suites définies par la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{où } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction.}$$

1 – La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?



ATTENTION ! Il n'est pas du tout automatique qu'une telle suite existe. La définition par récurrence nécessite qu'à chaque étape le terme u_n soit dans le domaine de définition de f .

Par exemple, on ne peut pas définir de suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1/(1 - u_n)$. En effet, on aurait $u_1 = 1$ et la relation ne permet pas de définir u_2 .

Définition 10.42 – Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Une partie I de D est dite **stable** par f si, et seulement si, $f(I) \subset I$ c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\forall x \in I, f(x) \in I.$$

Proposition 10.43 – Suites récurrentes bien définies

Si I est une partie stable par f et $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

Démonstration. Pour le démontrer, on procède par récurrence :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété « u_n existe et $u_n \in I$ ».

▷ u_0 existe et $u_0 \in I$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. $u_n \in I \subset D$ donc $f(u_n)$ est bien défini et u_{n+1} existe. De plus, comme $u_n \in I$, $u_{n+1} \in f(I)$ donc $u_{n+1} \in I$ et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in I$. □

Exemple 10.44 –

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$, est bien définie et que tous ses termes sont positifs ou nuls.

Soit $I = [0, +\infty[$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto \frac{1}{1+x}.$$

Pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$, donc I est une partie stable par f .

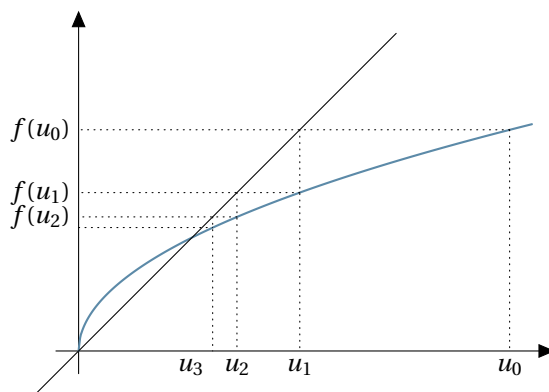
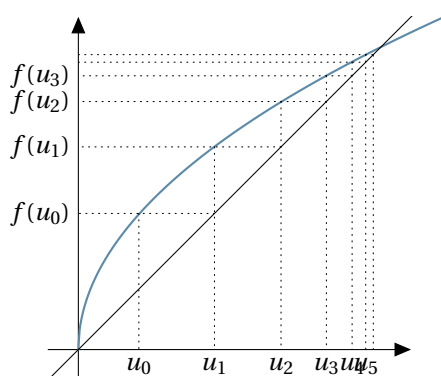
Comme $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et tous ses termes sont dans I , donc sont positifs ou nuls.

Remarque 10.45 – Il est évident que si f est définie sur $\mathbb{R}$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Dans la suite, on suppose que I est stable par f et que $u_0 \in I$ (et donc que tous les termes de la suite (u_n) sont dans I).

2 – Sens de variation.

Cas où f est croissante



On peut montrer que lorsque f est une fonction croissante alors la suite est monotone. Cette propriété ne peut pas être utilisée telle quelle, il faut établir à chaque fois la monotonie de la suite par l'une des deux méthodes suivantes :

- ▷ Dans le cas où l'on peut comparer facilement les deux premiers termes de la suite, on peut utiliser une récurrence pour démontrer la monotonie de la suite :
 - Si $u_0 \leq u_1$ alors on démontre par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
 - Si $u_0 \geq u_1$ alors on démontre par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
- ▷ On peut également étudier la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.
 Si g est positive sur I alors la suite (u_n) est croissante puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geq 0$.
 Si g est négative sur I alors la suite (u_n) est décroissante puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \leq 0$.

Exemple 10.46 – Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - \cos(u_n).$$

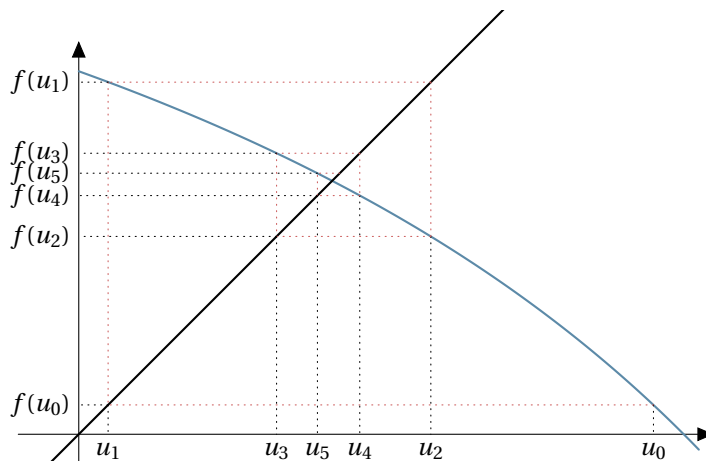
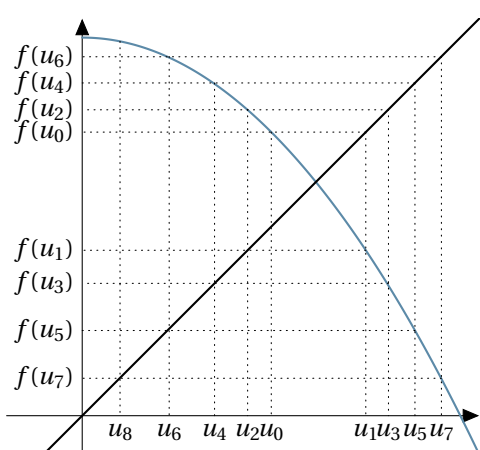
$f : x \mapsto 1 - \cos(x)$ est croissante sur $[0; 1]$. De plus, $0 = f(0) \leq f(x) \leq f(1) \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1]$, donc $[0, 1]$ est stable par f .

- ▷ On a $u_1 = 1 - \cos(u_0) = 1 - \cos(1) < u_0$. Montrons par récurrence la proposition définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par P_n : " $u_n \geq u_{n+1}$ ". Nous venons de voir l'initialisation.
 Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $u_n \geq u_{n+1}$. Comme f est croissante, on a que $f(u_n) \geq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_{n+2}$.
 Par récurrence, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.
- ▷ Étude de signe.

On définit sur $[0, 1]$ la fonction $g : x \mapsto 1 - \cos(x) - x$. g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a $g'(x) = \sin(x) - 1 \leq 0$, donc g est décroissante sur $[0, 1]$. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que g est négative sur $[0, 1]$.
 Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) \leq 0$, c'est à dire $u_n \geq 1 - \cos(u_n) = u_{n+1}$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Cas où f est décroissante

Dans ce cas la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas monotone. Elle n'a pas nécessairement une limite.



Puisque la composée de deux fonctions décroissantes est une fonction croissante, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2(n+1)} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2(n+1)+1} = f(u_{2n+2}) = f \circ f(u_{2n+1}).$$

On reprend donc l'étude précédente sur ces deux suites extraites. Si elles possèdent la même limite ℓ , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ , dans tous les autres cas, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

3 – Cas où f est continue sur un intervalle fermé

Théorème 10.47 – Limite d'une suite récurrente convergente $u_{n+1} = f(u_n)$

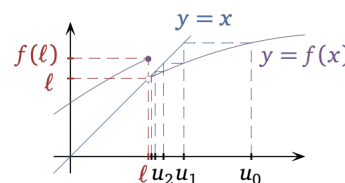
Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow D$ une fonction - ainsi D est stable par f . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $u_0 \in D$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in D$ et si f est CONTINUE en ℓ , alors ℓ est un point fixe de f , autrement dit $f(\ell) = \ell$.

Démonstration. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$ par continuité de f en ℓ , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ par composition. Pour finir $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $f(\ell) = \ell$. □

ATTENTION! L'hypothèse de continuité n'est pas là pour décorer.

Sur la figure ci-contre : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ mais $f(\ell) \neq \ell$.



Exemple 10.48 – On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f la fonction $x \mapsto \ln(x + 3)$ sur $] -3, +\infty[$.

- La fonction $x \mapsto f(x) - x$ est à la fois continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $g(0) = \ln 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = -\infty$, donc d'après le TVI strictement monotone, g s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+$, disons en α - l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrons que l'intervalle $[0, \alpha]$ est stable par f . Pour tout $x \in [0, \alpha]$, la croissance de f montre que $0 \leq \ln 3 = f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha) = \alpha$, donc $f(x) \in [0, \alpha]$.
- À présent, comme $[0, \alpha]$ est stable par f et comme $u_0 = 0 \in [0, \alpha]$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[0, \alpha]$. Or g est positive ou nulle sur $[0, \alpha]$, donc $f(x) \geq x$ pour tout $x \in [0, \alpha]$, donc $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conclusion : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Majorée par α , elle est finalement convergente d'après le théorème de la limite monotone, et comme f est continue sur $[0, \alpha]$, sa limite est un point fixe de f - forcément α . Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Exemple 10.49 – On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$. Montrer que la suite est croissante puis qu'elle tend vers $+\infty$.

Remarquons que la suite u est bien définie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 > 0$, donc la suite u est strictement croissante.

D'après le théorème de la limite monotone, u admet donc une limite en $+\infty$: Cette limite est finie si u est majorée ou $+\infty$ si elle n'est pas majorée.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \text{On définit } f : & \\ x &\mapsto x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Résolvons $f(x) = x$ d'inconnue réelle x . Soit $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = x \iff x^2 + x + 1 = x \iff x^2 = -1$. Donc f n'a pas de point fixe.

Or, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, elle converge vers un point fixe de f car f est continue. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple 10.50 – On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in$

$$x \mapsto \frac{3x+2}{x+2}$$

$[0; +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que les intervalles $[0; 2]$ et $[2; +\infty[$ sont stables par f .

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et pour tout $x > -2$, on a

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - (3x+2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} > 0.$$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; +\infty[$.

Comme $f(2) = 2$, on en déduit que pour tout $x \geq 2$, $f(x) \geq f(2) = 2$, donc $[2; +\infty[$ est stable par f .

De plus, $f(0) = 1$, donc pour $x \in [0; 2]$, $f(x) \in [1; 2] \subset [0; 2]$,

donc $[0; 2]$ est stable par f .

Cela prouve que si $u_0 \in [0; 2]$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et ses termes appartiennent à $[0; 2]$ et que si $u_0 \in [2; +\infty[$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et ses termes appartiennent à $[2; +\infty[$.

2. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in [0; +\infty[$. En déduire les points fixes de f sur $[0; +\infty[$ et le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de u_0 .

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \text{On pose } g : & \\ x &\mapsto f(x) - x \end{aligned}$$

$$g(x) = \frac{3x+2}{x+2} - \frac{x^2+2x}{x+2} = \frac{-x^2+x-2}{x+2} = \frac{-(x+1)(x-2)}{x+2}$$

Donc g est strictement positive sur $]0; 2[$, nulle en 2 et strictement négative sur $]2; +\infty[$. Ainsi, f admet exactement un point fixe sur $\mathbb{R}_+$, à savoir 2.

Si $u_0 \in [0; 2]$, on a vu que pour tout n , $u_n \in [0; 2]$. Donc $g(u_n) \geq 0$, c'est à dire $u_{n+1} \geq u_n$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Si $u_0 \in [2; +\infty[$, on a vu que pour tout n , $u_n \in [2; +\infty[$. Donc $g(u_n) \leq 0$, c'est à dire $u_{n+1} \leq u_n$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Si $u_0 \in [0; 2]$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2, donc converge.

Si $u_0 \in [2; +\infty[$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 2, donc converge.

Dans les deux cas, elle ne peut converger que vers un point fixe de f . Or le seul point fixe de f sur $[2; +\infty[$ est 2, on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 2.

VII – Le coin des grosses erreurs

ATTENTION !



- Les inégalités strictes deviennent **LARGES** à la limite.
- Un majorant **NE** dépend **JAMAIS** de n , c'est toujours une constante.
- Une suite croissante majorée par M converge, mais **PAS FORCÉMENT** vers M .
- Il ne doit **JAMAIS** rester de n à la limite.

Ce dernier interdit mérite de plus amples explications. Passer à la limite revient en quelque sorte à évaluer en $+\infty$, et quand on évalue, la variable disparaît totalement. Par exemple, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, cela n'a aucun sens d'écrire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = \ell^n$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+u_n} = \frac{n}{n+\ell}$. Une limite qui dépend de n ?

Plus subtil maintenant. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, on ne peut pas affirmer **SANS PREUVE** que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+\ell}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell^n$. La première égalité est vraie, mais comment le justifier sans calculer explicitement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+u_n}$? Quant à la deuxième, elle peut aussi bien être vraie que fausse selon la valeur de ℓ . En résumé :

Quand on passe à la limite, on **NE** peut **JAMAIS** le faire « par morceaux » en remplaçant tel morceau par sa limite et en laissant le reste intact.

VIII – Bornes supérieures/inférieures, densité et limites

Dans ce paragraphe, « caractérisation séquentielle » signifie « caractérisation en termes de suites ».

Théorème 10.51 – Caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

$$1. \sup A = M \text{ si et seulement si } \begin{cases} M \text{ majore } A \\ M \text{ est la limite d'une suite d'éléments de } A \end{cases}.$$

2. A n'est pas majorée si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A de limite $+\infty$.

On dispose bien sûr de résultats analogues sur les bornes inférieures et les parties non minorées.

Démonstration.

- Supposons d'abord que $\sup A = M$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M - \frac{1}{n}$ ne majore pas A , donc $a_n > M - \frac{1}{n}$ pour un certain $a_n \in A$. Ainsi, $M - \frac{1}{n} \leq a_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$ par encadrement. Réciproquement, faisons l'hypothèse que M majore A et est la limite d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A . Pour tout majorant M' de A , $a_n \leq M'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $M \leq M'$ par passage à la limite. En d'autres termes, M est le plus petit majorant de A , donc $M = \sup A$.
- Supposons d'abord que A n'est pas majorée. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n ne majore pas A , donc $a_n > n$ pour un certain $a_n \in A$, donc $a_n \rightarrow +\infty$ par minoration. La réciproque est triviale.

□

Exemple 10.52 – Si on note A l'ensemble $\left\{ \frac{q^2}{2^p + q} \mid p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$, alors A n'est pas majoré, mais $\inf A = 0$.

Démonstration. D'abord, A n'est pas majoré car il contient une suite de limite $+\infty$: $\frac{n^2}{2^1 + n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrons maintenant que $\inf A = 0$. Or $\frac{q^2}{2^p + q} \geq 0$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{1}{2^n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc A est minoré par 0 et contient une suite de limite 0. $\square$

Définition 10.53 – Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est **dense** dans $\mathbb{R}$ si A rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Remarque 10.54 – Cela revient à dire que l'on peut toujours trouver un élément de A entre deux réels distincts. On a déjà vu dans le chapitre précédent que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ainsi que $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux, sont denses dans $\mathbb{R}$.

Théorème 10.55

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A .

Démonstration. On suppose tout d'abord que A est dense dans $\mathbb{R}$, i.e que A rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On se donne un réel x et on veut montrer que x est la limite d'une suite d'éléments de A .

Puisque A est dense dans $\mathbb{R}$, alors A rencontre l'intervalle ouvert non vide $\left] x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n} \right[$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in A$ tel que $a_n \in \left] x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n} \right[$. On a ainsi construit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A tels que $x - \frac{1}{n} \leq a_n \leq x + \frac{1}{n}$. Le théorème d'encadrement permet alors de conclure que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

Réciproquement, on suppose que tout réel est limite d'une suite d'éléments de A et on veut montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. D'après la caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$ qui a été démontrée dans le chapitre précédent, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $I =]a; b[$. Soit $x \in]a; b[$. Il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\subset I$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|a_n - x| < \varepsilon$ i.e $a_n \in]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\subset I$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a $a_n \in I \cap A$. On a bien montré que tout intervalle ouvert non vide rencontre A . $\square$

Remarque 10.56 – Ainsi, tout réel est limite d'une suite de rationnels, d'irrationnels, et de nombres décimaux.

IX – Le cas des suites de nombres complexes

Définition 10.57 – Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On dit que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** si, et seulement si, la suite de nombres réels $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Définition 10.58 – On dit que la suite de nombres complexes $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - \ell| = 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |z_n - \ell| < \varepsilon.$$

On dit alors que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \ell$. On dit que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **divergente** si elle n'est pas convergente.



ATTENTION ! Il n'y a pas de sens à dire que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini.

Proposition 10.59 – Convergence d'une suite complexe

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $\ell = a + ib$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.

La suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, les suites de nombres réels $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a et b .

Démonstration.

- Supposons que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell = a + ib$. On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - \ell| = 0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|\operatorname{Re}(z_n) - a| = |\operatorname{Re}(z_n - \ell)| \leq |z_n - \ell|$$

et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - \ell| = 0$, on obtient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\operatorname{Re}(z_n) - a| = 0$ c'est-à-dire que la suite $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a . On montrerait de même que $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b .

- Supposons que les suites de nombres réels $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a et b . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'après l'inégalité triangulaire

$$|z_n - (a + ib)| = |(\operatorname{Re}(z_n) - a) + i(\operatorname{Im}(z_n) - b)| \leq |\operatorname{Re}(z_n) - a| + |\operatorname{Im}(z_n) - b|.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\operatorname{Re}(z_n) - a| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\operatorname{Im}(z_n) - b| = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - (a + ib)| = 0$ donc la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell = a + ib$. $\square$

Proposition 10.60 – Convergence, module et conjugué

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et ℓ un nombre complexe. Si $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , alors

- la suite $(\overline{z_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\overline{\ell}$.
- la suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.

De plus, toute suite complexe convergente est bornée.

Remarque 10.61 – Les résultats obtenus sur les suites de nombres réels qui ne font pas intervenir la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ restent valable pour les suites de nombres complexes.

Proposition 10.62 – Opérations sur les suites complexes convergentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers ℓ_1 et ℓ_2 respectivement, alors

- la somme $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ces deux suites est convergente et l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = \ell_1 + \ell_2.$$

- le produit $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ces deux suites est convergent et l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = \ell_1 \ell_2.$$

- pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la suite $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \lambda \ell_1.$$

- si de plus ℓ_2 est non nul, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $v_n \neq 0$ et la suite $(\frac{1}{v_n})_{n \geq N}$ converge vers $\frac{1}{\ell_2}$. Dans ce cas, la suite $(\frac{u_n}{v_n})_{n \geq N}$ converge vers $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Démonstration. La preuve repose sur le même principe que celle des suites réelles. $\square$



ATTENTION ! Il n'y a donc ni théorème des gendarmes, ni théorème de comparaison pour les suites complexes.

X – Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Ce théorème subtil et important aura pour nous un intérêt surtout théorique en cours d'année. Il établit une sorte de réciproque - mais pas jusqu'au bout - au résultat selon lequel toute suite convergente est bornée.

Théorème 10.63 – Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite (réelle ou complexe) bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration.

- **Cas d'une suite réelle :** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **RÉELLE** bornée, disons entre m et M avec $m \leq M$. Nous cherchons une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante pour laquelle $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Nous allons construire une telle φ pas à pas au moyen d'un algorithme appelé dichotomie.

On pose d'abord : $a_0 = m, b_0 = M$ et $\varphi(0) = 0$. Ensuite, soit $n \in \mathbb{N}$. Faisons l'hypothèse qu'on a réussi à définir des réels $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ et des entiers $\varphi(0), \dots, \varphi(n) \in \mathbb{N}$ pour lesquels :

- (i) $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_0$,
- (ii) pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $b_k - a_k = \frac{M-m}{2^k}$,
- (iii) l'ensemble d'indices $\{i \in \mathbb{N} \mid u_i \in [a_k, b_k]\}$ est infini pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,
- (iv) pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $a_k \leq u_{\varphi(k)} \leq b_k$,
- (v) $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n)$.

Sous cette hypothèse, nous allons tâcher de construire deux réels a_{n+1}, b_{n+1} et un entier $\varphi(n+1)$ qui rendent vraies les assertions (i) à (v) au rang $n+1$. Remarquons dans ce but qu'au moins l'un des ensembles $\left\{i \in \mathbb{N} \mid u_i \in \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]\right\}$ et $\left\{i \in \mathbb{N} \mid u_i \in \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]\right\}$ est infini, car si les deux étaient finis, leur réunion $\{i \in \mathbb{N} \mid u_i \in [a_n, b_n]\}$ le serait aussi et cela contredirait (iii).

Posons donc :
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n & \text{et} & b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si} & \left\{i \in \mathbb{N} \mid u_i \in \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]\right\} \text{ est infini (cas A)} \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & \text{et} & b_{n+1} = b_n & \text{sinon (cas B)} \end{cases}$$

Par construction, l'ensemble d'indices $\{i \in \mathbb{N} \mid u_i \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$ est infini, donc également l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid i > \varphi(n) \text{ et } u_i \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$ - le même ensemble à ceci près qu'on a ôté les éléments inférieurs ou égaux à $\varphi(n)$, en nombre fini. Sélectionnons finalement un élément quelconque $\varphi(n+1)$ dans cette partie de $\mathbb{N}$, par exemple le plus petit élément.

Assertion (i) au rang $n+1$: Comme $a_n \leq b_n$ d'après (ii) : $a_n \leq \frac{a_n+b_n}{2} \leq b_n$ donc $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$, que l'on soit dans le cas A ou dans le cas B.

Assertion (ii) au rang $n+1$:
$$b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \stackrel{(ii)}{=} \frac{M-m}{2^{n+1}} & \text{(cas A)} \\ b_n - \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} \stackrel{(ii)}{=} \frac{M-m}{2^{n+1}} & \text{(cas B)} \end{cases}$$

Assertion (iii) au rang $n+1$: Déjà fait.

Assertions (iv) et (v) au rang $n+1$: Vraies par définition de $\varphi(n+1)$.

Ouf! Fin de la construction. Les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construites sont adjacentes en vertu des assertions (i) et (ii), donc convergentes de limite commune un certain ℓ d'après le théorème des suites adjacentes. Or par ailleurs $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ par encadrement.

- **Cas général :** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe bornée, disons par K en module. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n| \leq K$ et $|\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n| \leq K$, donc $(\operatorname{Re}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites **RÉELLES** bornées. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass **RÉEL**, la suite $(\operatorname{Re}(u_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, disons vers a , pour une certaine fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

La suite $(\operatorname{Im}(u_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ n'a hélas aucune raison de converger elle aussi mais elle est toujours bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass **RÉEL**, la suite $(\operatorname{Im}(u_{\varphi \circ \psi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc, disons vers b , pour une nouvelle fonction $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Finalement : $u_{\varphi \circ \psi(n)} = \operatorname{Re}(u_{\varphi \circ \psi(n)}) + i \operatorname{Im}(u_{\varphi \circ \psi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a + ib$. Comme voulu, nous avons réussi à extraire une suite convergente de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

□