10 Suites convergentes de nombres réels et complexes

> I believe that numbers and functions of Analysis are not the arbitrary result of our minds; I think that they exist outside of us, with the same character of necessity as the things of objective reality, and we meet them or discover them, and study them, as do the physicists, the chemists and the zoologists.
>
> Charles Hermite (1822-1901), mathématicien.

I – Limites des suites réelles

1 – Limite finie d'une suite réelle

Définition 10.1 – On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers un réel ℓ si, et seulement si, u_n est aussi proche que l'on veut de ℓ au delà d'un certain rang, ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

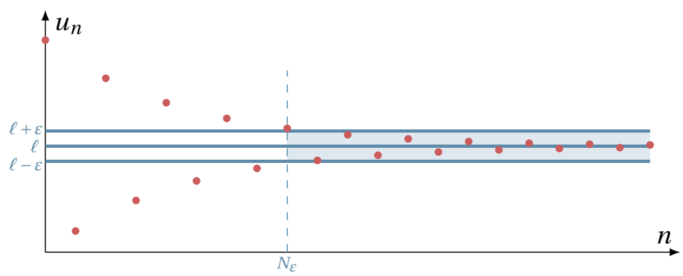
Cela signifie qu'au delà du rang N_ε (qui dépend a priori de ε), tous les termes de la suites appartiennent à l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$.
On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite convergente** et le réel ℓ est appelé **limite de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Remarque 10.2 – On a également que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |u_n - \ell| \leqslant c\varepsilon.$$

où c est une constante strictement positive (ne dépendant ni de n, ni de ε).
Il suffit d'appliquer la définition à $\varepsilon' = c\varepsilon$.



Graphiquement, toute bande horizontale centrée sur la droite d'équation $y = \ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définition 10.3 – On dit qu'une suite est **divergente** ou qu'elle **diverge** lorsqu'elle n'est pas convergente.

Proposition 10.4 – Unicité d'une limite finie

La limite ℓ d'une suite convergente est unique.

Démonstration.

□

2 – Propriétés des suites convergentes

Pour montrer qu'une suite converge vers une limite ℓ on se ramène souvent à montrer qu'une autre suite tend vers 0 grâce à la proposition suivante :

Proposition 10.5 – Décalage de limite en 0

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Démonstration.

□

Proposition 10.6

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration.

□

Proposition 10.7 – Convergence et caractère bornée

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. On note ℓ sa limite. Soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m < \ell < M$.

1. Il existe $N_m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_m,\ u_n > m$.
2. Il existe $N_M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_M,\ u_n < M$.
3. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ m < u_n < M$.

Démonstration. On démontre le 1., la démonstration du 2. est similaire.

□

Corollaire 10.8 – Lien entre convergence et signe

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers une limite $\ell > 0$ est minorée par un réel $m > 0$ au delà d'un certain rang.

Démonstration. On utilise le résultat 1. de la proposition précédente avec $m = \ell/2$. □

3 – Suites tendant vers l'infini

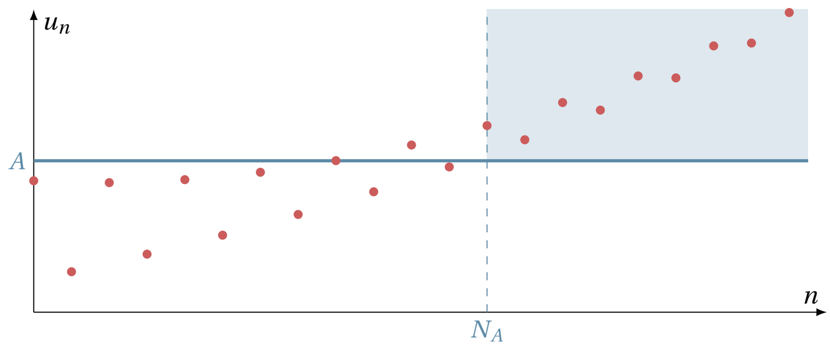
Définition 10.9 –

• On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$ si on peut rendre u_n aussi grand que l'on veut au delà d'un certain rang, c'est-à-dire si et seulement si elle vérifie

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_A \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_A,\ u_n \geqslant A.$$

• On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$ si on peut rendre u_n aussi petit que l'on veut au delà d'un certain rang, c'est-à-dire si et seulement si elle vérifie

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N_A \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_A,\ u_n \leqslant A.$$



ATTENTION ! Une suite tendant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ n'est pas une suite convergente. On dit qu'elle diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ ou encore que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite.

II – Opérations sur les limites

1 – Somme, Produit, Quotient

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose dans tout ce paragraphe que les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ **EXISTENT** . Dans les tableaux ci-dessous, le symbole ??? ne signifie pas une absence de limite mais une *indétermination*, i.e. une impossibilité de conclure en toute généralité, qui nécessite donc un traitement au cas par cas.

ADDITION

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	???

PRODUIT

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_nv_n)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	???

MULTIPLICATION PAR UN RÉEL

	$\lambda>0$			$\lambda=0$	$\lambda<0$		
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$+\infty$	ℓ	$-\infty$	peu importe	$+\infty$	ℓ	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n)$	$+\infty$	$\lambda\ell$	$-\infty$	0	$-\infty$	$\lambda\ell$	$+\infty$

INVERSE

			$u_n>0$ à partir d'un certain rang	$u_n<0$ à partir d'un certain rang	sinon
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell\neq0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$	???

Mais finalement, c'est quoi une *forme indéterminée*? C'est une forme **À** déterminer. Le symbole ??? signifie qu'en effectuant une opération $(+\infty)-(+\infty)$ ou $0\times(+\infty)$, on peut tomber a priori sur **N'IMPORTE QUEL RÉSULTAT** .

- **Cas de la forme indéterminée** $(+\infty)-(+\infty)$ **:**
  - — On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\ell)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}((n+\ell)-n)=\ell$.
  - — On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n-n)=+\infty$.
  - — On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n+(-1)^n\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, mais $\left(n+(-1)^n\right)-n=(-1)^n$ n'a pas de limite.
- **Cas de la forme indéterminée** $0\times(+\infty)$ **:**
  - — On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ell}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ell}{n}\times n\right)=\ell$.
  - — On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\times n^2\right)=+\infty$.
  - — On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, mais $\dfrac{(-1)^n}{n}\times n=(-1)^n$ n'a pas de limite.

Démonstration. Nous ne démontrerons pas tous les résultats des tableaux précédents.

□

2 – Composition par une fonction

Le résultat suivant est momentanément admis car il requiert la notion de limite d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui sera définie proprement dans quelques temps.

Proposition 10.10

Soit (u_n) une suite, soient ℓ, $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant ℓ. On suppose que :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in I$
- $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = L$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = L$.

Exemple 10.11 –

1. Étudions la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \exp\left(-\frac{1}{n^2}\right).$$

2. Étudions la limite éventuelle de la suite (w_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{e^x = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$. Résultat à connaître !

Démonstration. □

ATTENTION ! $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 1}$ Autrement dit, $1^{+\infty}$ **EST UNE NOUVELLE FORME INDÉTERMINÉE.**

III – Techniques pour lever une forme indéterminée

1 – Lever une indétermination par croissance comparée

Avant toute chose, rappelons le résultat suivant : soit $q \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 0 & \text{si } q \in]-1;1[\\ \text{n'existe pas} & \text{si } q \leqslant -1 \end{cases}$.

Théorème 10.12 – Croissance comparée

- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $b > 0$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0$.
- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $q \in]-1;1[$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^a q^n = 0$.
- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $q > 1$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^a}{q^n} = 0$.
- Pour tout $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$ et pour tout $q \in]0,1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n! q^n = +\infty$.

Remarque 10.13 – Soient a et b deux nombres réels. Soit q un réel strictement positif.

1. La suite $(n!)_n$ « l'emporte » sur les suites $(q^n)_n$, $(n^a)_n$ et $(\ln(n)^b)_n$.
2. La suite $(q^n)_n$ « l'emporte » sur les suites $(n^a)_n$ et $(\ln(n)^b)_n$.
3. La suite $(n^a)_n$ « l'emporte » sur la suite $(\ln(n)^b)_n$.

Remarque 10.14 – e^n rentre dans le cadre de ce théorème en prenant $q = e$. On pourra alors retenir la règle suivante : « la factorielle l'emporte sur l'exponentielle qui l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur le logarithme. »

ATTENTION ! La croissance comparée **ne s'applique pas** pour des sommes ou des différences.

Exemple 10.15 – Étudions la convergence des suites ci-dessous :

1. $u_n = \dfrac{2^n}{n^{100}}$.

2. $v_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$.

3. $w_n = n^3 e^{-2n}$.

ATTENTION ! Attention à ne pas voir de la croissance comparée partout !

Exemple 10.16 – Par exemple, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{-n}}{\ln(n)} = 0$ par les propriétés du quotient, il n'y a pas de forme indéterminée.

2 – Lever une indétermination par factorisation

Lorsqu'une forme indéterminée ne peut pas être levée à l'aide de la croissance comparée, il faut essayer de la lever en factorisant notre expression par le terme prépondérant (Celui qui va le plus vite vers l'infini).

Exemple 10.17 – Dans chacun des cas, cherchons la limite de la suite de terme général :

1. $u_n = n^5 - n^2 + 3$.

2. $v_n = \dfrac{-2n^3 + 2n}{n^3 + 1}$

3. $w_n = \mathrm{e}^n - n^{100} - \ln(n)^{100000}$

4. $r_n = \sqrt{4n^2 + n} - n$

Pour résumer, pour lever une forme indéterminée, il faudra appliquer la méthode suivante :

Méthode 10.18 – Lever une forme indéterminée

1. S'assurer qu'il s'agit bien d'une forme indéterminée.
2. Voir si la forme indéterminée peut être levée à l'aide du théorème de croissance comparée. Dans ce cas-là, on peut directement conclure en précisant bien « par croissance comparée » sur la copie.
3. Sinon, on se ramène à un des deux cas précédents en factorisant par le terme prépondérant.
4. Parfois, il faudra être encore plus rusé pour se ramener aux deux premiers cas (expression conjuguée par exemple).

Exemple 10.19 – Étudier la limite éventuelle de la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \sqrt{n^2+1} - n.$$

Remarque 10.20 – A noter qu'il existe des calculs de limite qui nécessitent des méthodes bien plus complexes et même certaines limites pour lesquelles on ne connaît pas encore de méthode.

IV – Suites extraites

Définition 10.21 – On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ (n < m \Longrightarrow \varphi(n) < \varphi(m)).$$

La fonction φ n'est jamais qu'une suite strictement croissante d'entiers naturels utilisés comme de nouveaux indices. Par exemple, si $\varphi = (2, 4, 5, 8, 24, 59, \ldots)$, la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(u_2, u_4, u_5, u_8, u_{24}, u_{59}, \ldots)$.

Concrètement, pour former une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on ne prend que certains éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en conservant l'ordre d'apparition de ces termes (ce qui explique que φ soit choisie strictement croissante).

Exemple 10.22 –

- Les suites $\left(\sqrt{2^n+4n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$, associées respectivement aux fonctions d'extraction $n \longmapsto 2^n + 4n$ et $n \longmapsto n^2$ strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
- Les suites constantes égales à 1 et -1 respectivement sont deux suites extraites de la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
  La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$, est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Plutôt que de changer le nom de suite, on la note souvent $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
  Les suites $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$, où p_n désigne le n-ième nombre premier, sont également des sous-suites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ATTENTION ! Pour $k \in \mathbb{N}$, le terme qui vient après u_{2k} dans la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_{2(k+1)} = u_{2k+2}$ et non u_{2k+1}. De même, le terme qui vient après u_{2k+1} dans la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_{2(k+1)+1} = u_{2k+3}$ et non u_{2k+2}.

Proposition 10.23 – Limite d'une suite extraite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers ℓ.

Démonstration.

□

La contraposée de ce résultat fournit une méthode pour montrer qu'une suite n'a pas de limite.

Méthode 10.24 –
Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite, on peut trouver deux sous-suites distinctes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergeant pas vers la même limite.

Exemple 10.25 – La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite car $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{2n} = 1$ alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{2n+1} = -1$

Exemple 10.26 – Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{2^n+(-2)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{10}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas de limites.

Proposition 10.27 – Suites extraites et limites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

Démonstration.

□

V – Théorèmes d'existence de limite

L'existence d'une limite n'est jamais acquise. Dans les paragraphes qui précèdent, l'existence de certaines limites a été établie - somme, produit, suites extraites, etc. On omet généralement de voir ces résultats comme des théorèmes d' **EXISTENCE** pour les voir seulement, en pratique, comme des théorèmes de **CALCUL** , de manipulation des limites. Les théorèmes qui suivent gagnent au contraire à être conçus comme de vrais théorèmes d'existence. Ce qu'ils nous fournissent de façon essentielle, ce n'est pas tant la **VALEUR** d'une limite que son **EXISTENCE** .

1 – Théorèmes d'encadrement/minoration/majoration

Théorème 10.28

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

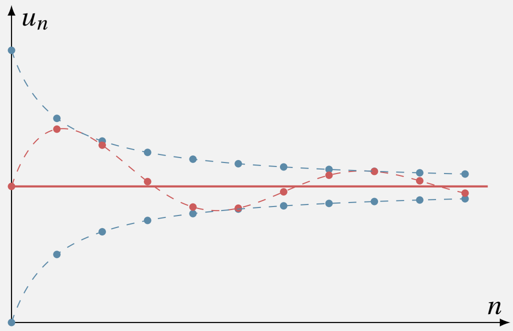
1. **Théorème d'encadrement :**
   Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
2. **Théorème de minoration :**
   Si $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. **Théorème de majoration :**
   Si $u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration.

□

Exemple 10.29 – $n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par minoration, car $n! \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exemple 10.30 – Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{2n^2 + (-1)^n}$.



(Le graphe n'est pas celui de la suite (u_n) mais est plus visuel.)

Exemple 10.31 – Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \left(2 + (-1)^n\right) n$.

Corollaire 10.32

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0, alors leur produit $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démonstration.

□

Exemple 10.33 – Montrer que la suite $\left(\dfrac{\sin(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

2 – Théorème de convergence monotone

Le théorème de convergence monotone est **LE** théorème d' **EXISTENCE** de limite par excellence. Aucune hypothèse de limite n'y est faite, mais la conclusion c'est qu'une limite existe, qui surgit par magie sans qu'on en connaisse la valeur. Et d'où vient la magie ? De la propriété de la borne supérieure !

Théorème 10.34 – Théorème de convergence monotone

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   En notant ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   En notant ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ell$.

Démonstration.

□

ATTENTION ! Une suite croissante majorée par M converge...
MAIS PAS FORCÉMENT VERS M qui n'est qu' **UN** majorant parmi d'autres !

Exemple 10.35 – On pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lfloor e^k \rfloor}{3^k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Démonstration. □

Exemple 10.36 – On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Montrer que la suite (S_n) est croissante.

2. Dans cette question, on va montrer que la suite (S_n) est majorée par 2.
   (a) Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

   (c) En déduire que $(S_n)_n$ est majorée par 2.

3. Conclure.

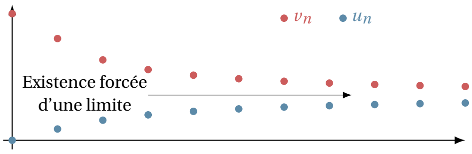
Remarque 10.37 – On peut démontrer (mais nous l'admettrons) que la suite (S_n) converge vers $\dfrac{\pi^2}{6} \simeq 1,6449340668$.

3 – Suites adjacentes

Définition 10.38 – Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si, et seulement si :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (ou l'inverse).
2. la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Deux suites adjacentes viennent à la rencontre l'une de l'autre, l'une en croissant, l'autre en décroissant, et finissent par s'écraser l'une contre l'autre. « Il faut bien qu'elles s'écrasent **QUELQUE PART!** » nous dit le théorème des suites adjacentes - théorème d' **EXISTENCE** .



Théorème 10.39 – Théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si elles sont adjacentes, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes de même limite ℓ.
Par ailleurs, si c'est $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante, alors pour tous $m, n \in \mathbb{N}$: $\quad u_m \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Démonstration.

□

Exemple 10.40 – Soient (u_n) et (v_n) définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Conclure.

Remarque 10.41 – On peut démontrer (cf chapitre ultérieur) que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers $\mathrm{e} \simeq 2.7182818$.

VI – Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans ce paragraphe nous allons étudier les suites définies par la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n), \qquad \text{où } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est une fonction.}$$

1 – La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?

ATTENTION ! Il n'est pas du tout automatique qu'une telle suite existe. La définition par récurrence nécessite qu'à chaque étape le terme u_n soit dans le domaine de définition de f.

Par exemple, on ne peut pas définir de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1/(1-u_n)$. En effet, on aurait $u_1 = 1$ et la relation ne permet pas de définir u_2.

Définition 10.42 – Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Une partie I de D est dite **stable** par f si, et seulement si, $f(I) \subset I$ c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\forall x \in I,\ f(x) \in I.$$

Proposition 10.43 – Suites récurrentes bien définies

Si I est une partie stable par f et $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

Démonstration.

□

Exemple 10.44 –

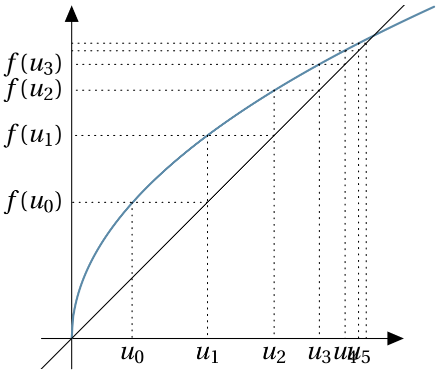
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$, est bien définie et que tous ses termes sont positifs ou nuls.

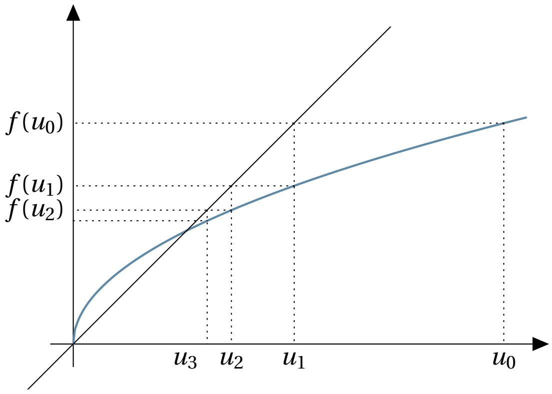
Remarque 10.45 – Il est évident que si f est définie sur $\mathbb{R}$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Dans la suite, on suppose que I est stable par f et que $u_0 \in I$ (et donc que tous les termes de la suite (u_n) sont dans I).

2 – Sens de variation.

Cas où f est croissante





On peut montrer que lorsque f est une fonction croissante alors la suite est monotone. Cette propriété ne peut pas être utilisée telle quelle, il faut établir à chaque fois la monotonie de la suite par l'une des deux méthodes suivantes :

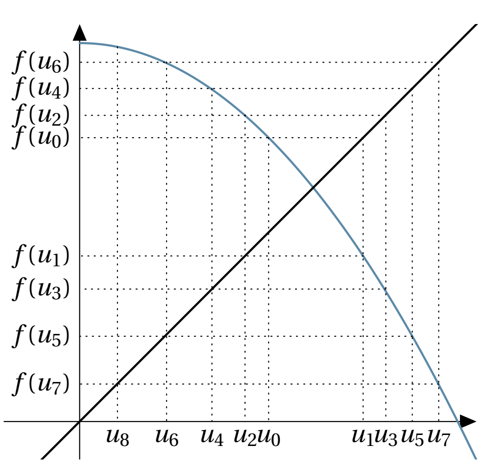
- ▹ Dans le cas où l'on peut comparer facilement les deux premiers termes de la suite, on peut utiliser une récurrence pour démontrer la monotonie de la suite :
  - Si $u_0 \leqslant u_1$ alors on démontre par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
  - Si $u_0 \geqslant u_1$ alors on démontre par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
- ▹ On peut également étudier la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$.
  Si g est positive sur I alors la suite (u_n) est croissante puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geqslant 0$.
  Si g est négative sur I alors la suite (u_n) est décroissante puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \leqslant 0$.

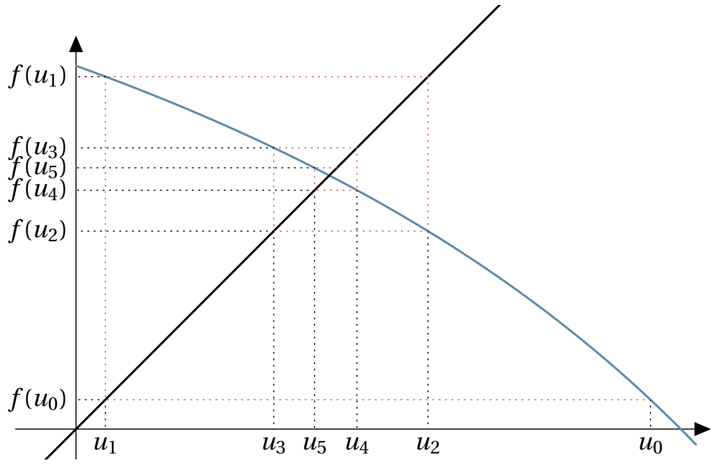
Exemple 10.46 – Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - \cos(u_n).$$

Cas où f est décroissante

Dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone. Elle n'a pas nécessairement une limite.





Puisque la composée de deux fonctions décroissantes est une fonction croissante, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2(n+1)} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n}) \qquad \text{et} \qquad u_{2(n+1)+1} = f(u_{2n+2}) = f \circ f(u_{2n+1}).$$

On reprend donc l'étude précédente sur ces deux suites extraites. Si elles possèdent la même limite ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ, dans tous les autres cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

3 – Cas où f est continue sur un intervalle fermé

Théorème 10.47 – Limite d'une suite récurrente convergente $u_{n+1} = f(u_n)$

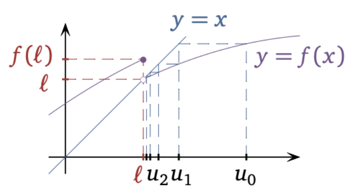
Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow D$ une fonction - ainsi D est stable par f. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle $u_0 \in D$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in D$ et si f est **CONTINUE** en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f, autrement dit $f(\ell) = \ell$.

Démonstration.

□

ATTENTION! L'hypothèse de continuité n'est pas là pour décorer.
Sur la figure ci-contre : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ mais $f(\ell) \neq \ell$.



Exemple 10.48 – On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f la fonction $x \longmapsto \ln(x+3)$ sur $]-3, +\infty[$.

Exemple 10.49 – On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$. Montrer que la suite est croissante puis qu'elle tend vers $+\infty$.

Exemple 10.50 – On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+2}{x+2} \end{array}$ ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in [0;+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que les intervalles $[0;2]$ et $[2;+\infty[$ sont stables par f.

Cela prouve que si $u_0 \in [0;2]$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et ses termes appartiennent à $[0;2]$ et que si $u_0 \in [2;+\infty[$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et ses termes appartiennent à $[2;+\infty[$.

2. Étudier le signe de $f(x)-x$ pour tout $x \in [0;+\infty[$. En déduire les points fixes de f sur $[0,+\infty[$ et le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0.

3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

VII – Le coin des grosses erreurs

ATTENTION !

- Les inégalités strictes deviennent **LARGES** à la limite.
- Un majorant **NE** dépend **JAMAIS** de n, c'est toujours une constante.
- Une suite croissante majorée par M converge, mais **PAS FORCÉMENT** vers M.
- Il ne doit **JAMAIS** rester de n à la limite.

Ce dernier interdit mérite de plus amples explications. Passer à la limite revient en quelque sorte à évaluer en $+\infty$, et quand on évalue, la variable disparaît totalement. Par exemple, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, cela n'a aucun sens d'écrire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = \ell^n$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+u_n} = \dfrac{n}{n+\ell}$. Une limite qui dépend de n ?

Plus subtil maintenant. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on ne peut pas affirmer **SANS PREUVE** que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+\ell}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n$. La première égalité est vraie, mais comment le justifier sans calculer explicitement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+u_n}$? Quant à la deuxième, elle peut aussi bien être vraie que fausse selon la valeur de ℓ. En résumé :

> Quand on passe à la limite, on **NE** peut **JAMAIS** le faire « par morceaux » en remplaçant tel morceau par sa limite et en laissant le reste intact.

VIII – Bornes supérieures/inférieures, densité et limites

Dans ce paragraphe, « caractérisation séquentielle » signifie « caractérisation en termes de suites ».

Théorème 10.51 – Caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

1. $\sup A = M$ si et seulement si $\begin{cases} M \text{ majore } A \\ M \text{ est la limite d'une suite d'éléments de } A \end{cases}$.
2. A n'est pas majorée si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A de limite $+\infty$.

On dispose bien sûr de résultats analogues sur les bornes inférieures et les parties non minorées.

Démonstration.

□

Exemple 10.52 – Si on note A l'ensemble $\left\{ \frac{q^2}{2^p+q} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{N}^* \right\}$, alors A n'est pas majoré, mais $\inf A = 0$.

Démonstration.

□

Définition 10.53 – Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est **dense** dans $\mathbb{R}$ si A rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Remarque 10.54 – Cela revient à dire que l'on peut toujours trouver un élément de A entre deux réels distincts. On a déjà vu dans le chapitre précédent que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ainsi que $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux, sont denses dans $\mathbb{R}$.

Théorème 10.55

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A.

Démonstration.

□

Remarque 10.56 – Ainsi, tout réel est limite d'une suite de rationnels, d'irrationnels, et de nombres décimaux.

IX – Le cas des suites de nombres complexes

Définition 10.57 – Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On dit que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée si**, et seulement si, la suite de nombres réels $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Définition 10.58 – On dit que la suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |z_n - \ell| < \varepsilon.$$

On dit alors que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell$. On dit que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente** si elle n'est pas convergente.

ATTENTION ! Il n'y a pas de sens à dire que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini.

Proposition 10.59 – Convergence d'une suite complexe

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $\ell = a + ib$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.

La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, les suites de nombres réels $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a et b.

Démonstration.

• Supposons que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = a + ib$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|\mathrm{Re}(z_n) - a| = |\mathrm{Re}(z_n - \ell)| \leqslant |z_n - \ell|$$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} |\mathrm{Re}(z_n) - a| = 0$ c'est-à-dire que la suite $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. On montrerait de même que $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b.

• Supposons que les suites de nombres réels $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a et b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'après l'inégalité triangulaire

$$|z_n - (a + ib)| = |(\mathrm{Re}(z_n) - a) + i(\mathrm{Im}(z_n) - b)| \leqslant |\mathrm{Re}(z_n) - a| + |\mathrm{Im}(z_n) - b|.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} |\mathrm{Re}(z_n) - a| = \lim\limits_{n\to+\infty} |\mathrm{Im}(z_n) - b| = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - (a+ib)| = 0$ donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = a + ib$. □

Proposition 10.60 – Convergence, module et conjugué

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et ℓ un nombre complexe. Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors

- ▷ la suite $(\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{\ell}$.
- ▷ la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.

De plus, toute suite complexe convergente est bornée.

Remarque 10.61 – Les résultats obtenus sur les suites de nombres réels qui ne font pas intervenir la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ restent valable pour les suites de nombres complexes.

Proposition 10.62 – Opérations sur les suites complexes convergentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ_1 et ℓ_2 respectivement, alors

1. la somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ces deux suites est convergente et l'on a
$$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = \ell_1 + \ell_2.$$
2. le produit $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ces deux suites est convergent et l'on a
$$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell_1 \ell_2.$$
3. pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et l'on a
$$\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda \ell_1.$$
4. si de plus ℓ_2 est non nul, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ v_n \neq 0$ et la suite $(\frac{1}{v_n})_{n\geqslant N}$ converge vers $\frac{1}{\ell_2}$. Dans ce cas, la suite $(\frac{u_n}{v_n})_{n\geqslant N}$ converge vers $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Démonstration. La preuve repose sur le même principe que celle des suites réelles. □

ATTENTION ! Il n'y a donc ni théorème des gendarmes, ni théorème de comparaison pour les suites complexes.

X – Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Ce théorème subtil et important aura pour nous un intérêt surtout théorique en cours d'année. Il établit une sorte de réciproque - mais pas jusqu'au bout - au résultat selon lequel toute suite convergente est bornée.

Théorème 10.63 – Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite (réelle ou complexe) bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration.

□