INTERRO DE COURS

Exercice 1

1. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.
   Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.
   Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

Exercice 2

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 = A^2 + 8A + 6I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

CORRIGÉ : INTERRO DE COURS

Exercice 1

1. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.
   Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

> On a :
> $$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$
> donc P est inversible et $P^{-1} = Q$.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.
   Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

> On a :
> $$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = 12I_3$$
> donc P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{12}Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

> On a :
> $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
> $$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3$$

On a donc $A(A^2 - I_3) = 4I_3$ et donc $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = I_3$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3)$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Et donc,

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A^2$$

On a $A^2 = A + 2I_3$ donc $A^2 - A = 2I_3$ donc $A \times (A - I_3) = 2I_3$ donc $A \times \frac{1}{2}(A - I_3) = I_3$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -3 \\ -6 & 7 & 3 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$A^3 - 3A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -3 \\ -6 & 7 & 3 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -6 & 3 & 3 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3$$

On a donc $A(A - 3I_3) = 4I_3$ et donc $A \times \frac{1}{4}(A - 3I_3) = I_3$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(A - 3I_3)$.

4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 = A^2 + 8A + 6I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

> On a :
>
> $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$
>
> $$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$
>
> Donc,
>
> $$A^2 + 8A + 6I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix} = A^3$$
>
> On a donc $A^3 - A^2 - 8A = 6I_3$ donc $A(A^2 - A - 8I_3) = 6I_3$ donc $A \times \frac{1}{6}(A^2 - A - 8I_3) = I_3$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 - A - 8I_3)$.