

## INTERRO DE COURS – SEMAINE 9

**Exercice 1** – Un site internet propose à ses abonnés des films à télécharger.

En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement est de 15 000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre de clients abonnés au site évolue selon la règle suivante : chaque mois, 10% des clients se désabonnent et 2500 nouveaux abonnés sont enregistrés.

On note  $v_n$  l'estimation du nombre d'abonnés  $n$  mois après l'ouverture. On a ainsi  $v_0 = 15\,000$ .

1. Calculer  $v_1$  et  $v_2$ .

**Solution :** On a  $v_1 = 0,9 \times 15\,000 + 2500 = 16\,000$  et  $v_2 = 0,9 \times 16\,000 + 2500 = 16\,900$ .

2. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 2500$$

**Solution :** Le nombre d'abonnés diminuant de 10% chaque mois, pour obtenir le nombre d'abonnés au mois  $n + 1$  est égale à 0,9 fois le nombre d'abonnés au mois  $n$ . Cependant, on a également 2500 nouveaux abonnés chaque mois. Il faut donc ajouter 2500 au nombre précédent. Ainsi, on a bien :

$$v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 2500$$

3. On considère la suite  $(w_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$w_n = v_n - 25\,000$$

- (a) Justifier que la suite  $(w_n)$  est géométrique et préciser son premier terme.

**Solution :** On a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - 25\,000 \\ &= 0,9 \times v_n + 2500 - 25\,000 \\ &= 0,9 \times (w_n + 25\,000) + 2500 - 25\,000 \\ &= 0,9w_n + 22\,500 + 2500 - 25\,000 \\ &= 0,9w_n \end{aligned}$$

Donc,  $(w_n)$  est géométrique. Par ailleurs, son premier terme est  $w_0 = v_0 - 25\,000 = 15\,000 - 25\,000 = -10\,000$ .

- (b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  :

$$v_n = 25\,000 - 10\,000 \times 0,9^n$$

**Solution :** La suite  $(w_n)$  étant géométrique, on a, pour tout  $n$  :

$$w_n = w_0 \times q^n = -10\,000 \times 0,9^n$$

Par ailleurs,  $v_n = w_n + 25000$ , donc :

$$v_n = 25000 - 10000 \times 0,9^n$$

(c) Calculer le nombre d'abonnés au bout d'un an.

Indication numérique :  $0,9^{12} \simeq 0,28$ .

**Solution** : Une année correspond à 12 mois. Il nous faut donc calculer  $v_{12}$ . La formule de la question précédente nous donne :

$$v_{12} = 25000 - 10000 \times 0,9^{12} \simeq 25000 - 10000 \times 0,28 = 25000 - 2800 = 22200$$

**Exercice 2** – 1. Calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{2^k + 1} + \sum_{k=1}^3 \frac{k^2}{2}$$

**Solution** : On a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{2^k + 1} + \sum_{k=1}^3 \frac{k^2}{2} \\ &= \frac{1}{2^0 + 1} + \frac{1}{2^1 + 1} + \frac{1}{2^2 + 1} + \frac{1}{2^3 + 1} + \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{4}{2} + \frac{9}{2} \\ &= \frac{15}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{45}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{47}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{235}{30} + \frac{6}{30} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{241}{30} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{723}{90} + \frac{10}{90} \\ &= \frac{733}{90} \end{aligned}$$

2. Traduire à l'aide du symbole  $\Sigma$  la somme suivante (on ne demande pas de calculer cette somme) :

$$T = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{102}{103} + \frac{103}{104}$$

**Solution** : On a :

$$T = \sum_{k=1}^{103} \frac{k}{k+1}$$