INTERRO DE COURS

Exercice 1

1. Calculer la somme suivante :
$$S = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{2^k+1} + \sum_{k=1}^{3} \frac{k^2}{2}$$
2. Traduire à l'aide du symbole Σ la somme suivante (on ne demande pas de calculer cette somme :
$$T = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{102}{103} + \frac{103}{104}$$

Exercice 2

Un industriel étudie l'évolution de la production d ejouets sur la machine de son entreprise. En 2000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an.
Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2% par an.
On modélise le nombre total de jouets fabriqués au cours de l'année $2000+n$ par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc $u_0 = 120\,000$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier n.
4. Calculer le nombre total de jouets fabriqués de 2000 à 2015 (inclus).
Indication numérique : $0,98^{16} \simeq 0,72$

CORRIGÉ : INTERRO DE COURS

Exercice 1

1. Calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{2^k+1} + \sum_{k=1}^{3} \frac{k^2}{2}$$

> On a :
>
> $$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{2^k+1} + \sum_{k=1}^{3} \frac{k^2}{2} \\ &= \frac{1}{2^0+1} + \frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{4}{2} + \frac{9}{2} \\ &= \frac{15}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{45}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{47}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{235}{30} + \frac{6}{30} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{241}{30} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{723}{90} + \frac{10}{90} \\ &= \frac{733}{90} \end{aligned}$$

2. Traduire à l'aide du symbole Σ la somme suivante (on ne demande pas de calculer cette somme :

$$T = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{102}{103} + \frac{103}{104}$$

> On a :
>
> $$T = \sum_{k=1}^{103} \frac{k}{k+1}$$

Exercice 2

Un industriel étudie l'évolution de la production d ejouets sur la machine de son entreprise. En 2000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an.
Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2% par an.
On modélise le nombre total de jouets fabriqués au cours de l'année $2000+n$ par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc $u_0 = 120\,000$.

1. Calculer u_1 et u_2.

> On a :
> $$u_1 = 120\,000 \times 0,98 = 117\,600$$
> et
> $$u_2 = 117\,600 \times 0,98 = 115\,248$$

2. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $0,98$ et de premier terme $u_0 = 120\,000$.

3. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier n.

> On a pour tout n :
> $$u_n = u_0 \times q^n = 120\,000 \times (0,98)^n$$

4. Calculer le nombre total de jouets fabriqués de 2000 à 2015 (inclus).
Indication numérique : $0,98^{16} \simeq 0,72$

> Il nous faut calculer
> $$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{15} = \sum_{k=0}^{15} u_k$$
> D'après le cours, on a :
> $$S = u_0 \times \frac{1-q^{15+1}}{1-q} = 120\,000 \times \frac{1-0;98^{16}}{1-0,98} = 120\,000 \times \frac{1-0,72}{0,02} = 120\,000 \times \frac{0,28}{0,02} = 120\,000 \times 14 = 1\,680\,000$$
> Ainsi, $1\,680\,000$ jouets ont été fabriqués de 2000 à 2015.