CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ 1 - TYPE ESCP

Exercice 1 –

1. (a) La fonction g est constituée de deux termes :
   - le terme $(1+t)\ln(1+t)$ qui est de la forme $u \times v$ et que l'on dérive donc comme un produit : $(uv)' = u'v + uv'$;
   - le terme $-t$ dont la dérivée vaut -1.

   Posons $u(t) = 1+t$ et $v(t) = \ln(1+t)$. On a $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \dfrac{1}{1+t}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(t) &= u'(t)v(t) + u(t)v'(t) - 1 \\ &= 1 \times \ln(1+t) + (1+t) \times \frac{1}{1+t} - 1 \\ &= \ln(1+t) + 1 - 1 \\ &= \ln(1+t) \end{aligned}$$

   (b) Par définition de (u_n), on a

$$u_1 = \int_0^1 (\ln(1+t))^1 \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$$

   Il nous faut donc désormais trouver une primitive de $\ln(1+t)$. Or, on vient de voir que $g'(t) = \ln(1+t)$.
   Donc, g est une primitive de $\ln(1+t)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t \\ &= [(1+t)\ln(1+t) - t]_0^1 \\ &= 2\ln(2) - 1 - (1\ln(1) - 0) \\ &= 2\ln(2) - 1 \end{aligned}$$

2. (a) On a

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}$$

   Posons ensuite $u(t) = 1+t$. On a $u'(t) = 1$. Donc,

$$f''(t) = \frac{-u'(t)}{u(t)^2} = \frac{-1}{(1+t)^2}$$

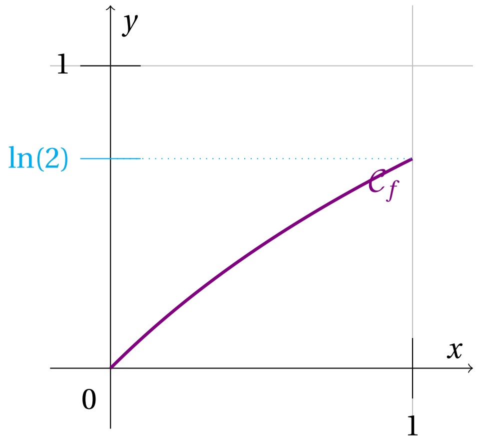
   (b) Pour tout $t \in [0;1]$, on a $1+t \geqslant 0$. Donc, pour tout $t \in [0;1]$, $f'(t) \geqslant 0$. Donc, f est croissante sur $[0;1]$. Par ailleurs,

$$f(0) = \ln(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(1) = \ln(2)$$

   On en déduit le tableau de variations suivant :

t	0	1
Variations de f	0 ↗	$\ln(2)$

On obtient donc l'allure de courbe suivante :



(c) On a vu que $f''(t) = \dfrac{-1}{(1+t)^2}$. Donc, $f''(t) \leqslant 0$. Donc, f est concave.

3. (a) La fonction f étant croissante sur $[0;1]$, on a pour tout $t \in [0;1]$,

$$f(0) \leqslant f(t) \leqslant f(1)$$

C'est-à-dire,

$$0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant \ln(2)$$

(b) En élevant l'inégalité précédente à la puissance n, on obtient

$$0^n \leqslant (\ln(1+t))^n \leqslant (\ln(2))^n$$

Puis par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 0^n \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \ln(1+t)^n \,\mathrm{d}t \leqslant (\ln(2))^n$$

C'est-à-dire,

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$$

(c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2)^n = 0$ car $\ln(2) \simeq 0,7 \in]-1;1[$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

4. (a) Calculons $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} \,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties. Posons

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & 1 \\ v(t) & = & \ln(1+t)^{n+1} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & 1+t \\ v'(t) & = & (n+1) \times \dfrac{1}{1+t} \ln(1+t)^n \end{array}\right.$$

Dès lors, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left[(1+t) \times \ln(1+t)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 (1+t) \times (n+1) \times \frac{1}{1+t} \times \ln(1+t)^n \,\mathrm{d}t \\ &= 2(\ln(2))^{n+1} - (n+1) \int_0^1 (\ln(1+t))^n \,\mathrm{d}t \\ &= 2(\ln(2))^{n+1} - (n+1) u_n \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$u_{n+1} = 2(\ln(2))^{n+1} - (n+1) u_n$$

(b) En utilisant la relation précédente, on obtient

$$(n+1)\,u_n = 2\ln(2)^{n+1} - u_{n+1}$$

Or, $u_{n+1} \geqslant 0$ d'après la question **3(b)**, donc

$$(n+1)\,u_n \leqslant 2\ln(2)^{n+1}$$

(c) Pour montrer que (u_n) est décroissante, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (\ln(1+t))^n\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \ln(1+t)^{n+1} - \ln(1+t)^n\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \ln(1+t)^n\,(\ln(1+t)-1)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [0;1]$, on a

$$0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant \ln(2) \leqslant 1$$

Ainsi,

$$\ln(1+t)^n \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \ln(1+t) - 1 \leqslant 0$$

Et donc, par croissance de l'intégrale,

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

Donc, (u_n) est bien décroissante.

(d) En utilisant la relation de la question **4(a)** ainsi que la décroissance de la suite (u_n), on a :

$$2\ln(2)^{n+1} = u_{n+1} + (n+1)\,u_n \leqslant u_n + (n+1)\,u_n = (n+2)\,u_n$$

Autrement dit, on a bien

$$(n+2)\,u_n \geqslant 2\ln(2)^{n+1}$$

(e) On a vu que

$$(n+1)\,u_n \leqslant 2\ln(2)^{n+1}$$

Donc,

$$nu_n + u_n \leqslant 2\ln(2)^{n+1}$$

Donc,

$$nu_n \leqslant 2\ln(2)^{n+1} - u_n \leqslant 2\ln(2)^{n+1} \qquad \text{car } u_n \geqslant 0$$

Et donc,

$$\frac{nu_n}{\ln(2)^{n+1}} \leqslant 1$$

Par ailleurs,

$$(n+2)\,u_n \geqslant 2\ln(2)^{n+1}$$

Donc,

$$\frac{nu_n}{2\ln(2)^{n+1}} \geqslant \frac{n}{n+2}$$

Bref, on a

$$\frac{n}{n+2} \leqslant \frac{nu_n}{2\ln(2)^{n+1}} \leqslant 1$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$. Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{nu_n}{2\ln(2)^{n+1}} = 1$$

Exercice 2 –

1. Par définition,

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_{0+2} \\ u_{0+1} \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs,

$$u_3 = 2u_2 - \frac{5}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_0 = 2\times 1 - \frac{5}{4}\times 0 + \frac{1}{4}\times 0 = 2$$

Et donc,

$$X_1 = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned} AX_n &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n \\ 4u_{n+2} \\ 4u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$X_{n+1} = AX_n$$

(b) Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $X_n = A^n U_0$ ».
Initialisation ($n = 0$) :
$A^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$ donc $X_0 = A^0 X_0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $X_n = A^n U_0$. D'autre part, d'après la question précèdente, on sait que $X_{n+1} = AX_n$, donc :

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = A^n X_0 .$$

3. (a) On a :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$QP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

(b) Calculons le produit PTQ :

$$PTQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 16 & -10 & 2 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Ainsi, on a bien

$$A = PTQ$$

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $A^n = PT^nQ$ ».
Initialisation ($n = 0$) :
$A^0 = I_3$ et $PT^0Q = PI_3Q = PQ = I_3$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $A^n = PT^nQ$. D'autre part, d'après ce qui précède $A = PTQ$. Donc on en déduit que :

$$A^{n+1} = A^n \times A = PT^nQ \times PTQ = PT^nI_3TQ = PT^{n+1}Q$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PT^nQ.$$

4. (a) Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ».

Initialisation ($n = 0$) :
$T^0 = I_3$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que $T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dès lors,

$$T^{n+1} = T^n \times T = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 2^n \times 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2+2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PT^nQ.$$

(b) D'après la question précédente, $A^n = PT^nQ$. Par ailleurs, on a vu à la question **4(a)** que $T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
A^n &= PT^nQ \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 0 & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \begin{pmatrix} 2^{n+4}-4-4n-8 & -2^{n+4}+4+6n+12 & 2^{n+2}-2n-4 \\ -8-8n-8 & 8+12n+12 & -4n-4 \\ 2^{n+4}-16-16n & -2^{n+4}+16+24n & 2^{n+2}-8n \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \begin{pmatrix} 2^{n+4}-4n-12 & -2^{n+4}+6n+16 & 2^{n+2}-2n-4 \\ -8n-16 & 12n+20 & -4n-4 \\ 2^{n+4}-16n-16 & -2^{n+4}+24n+16 & 2^{n+2}-8n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5. (a) D'après la question **2(a)**, on sait que $X_n = A^n X_0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} &= X_n = A^n X_0 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \begin{pmatrix} 2^{n+4}-4n-12 & -2^{n+4}+6n+16 & 2^{n+2}-2n-4 \\ -8n-16 & 12n+20 & -4n-4 \\ 2^{n+4}-16n-16 & -2^{n+4}+24n+16 & 2^{n+2}-8n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \begin{pmatrix} 2^{n+4}-4n-12 \\ -8n-16 \\ 2^{n+4}-16n-16 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Et on a donc

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \times \left(2^{n+4}-16n-16\right) = 4 - \frac{4n}{2^n} - \frac{4}{2^n}$$

(b) On a $2^n = e^{\ln(2^n)} = e^{n\ln(2)}$. Donc,

$$\frac{4n}{2^n} = \frac{4n}{e^{n\ln(2)}}$$

Et donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{e^{n\ln(2)}} = 0 \qquad \text{par croissance comparée}$$

Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{2^n} = 0$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$$

Exercice 3 –

1. À l'instant 0, le mobile se trouve sur le point d'abscisse 0. Dès lors, à l'instant 1, le mobile se trouve
   - soit sur le point d'abscisse 1, et ce avec la probabilité $\frac{1}{3}$;
   - soit sur le point d'abscisse 0, et ce avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

   Ainsi, la variable X_1 peut prendre les valeurs 1 et 0. Et on a
$$P(X_1 = 0) = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad P(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$$
   Autrement dit, la variable aléatoire X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{3}$. On a alors,
$$E(X_1) = p = \frac{1}{3}$$

2. (a) La variable aléatoire X_2 ne peut prendre de valeur plus grande que 2 puisque le mobile se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse 0 et qu'il ne fait des déplacements que d'une unité à la fois. Par ailleurs,
   - X_2 peut valoir 0 si par exemple, le mobile ne s'est pas déplacé ;
   - X_2 peut valoir 1 si le mobile ne s'est pas déplacé à l'instant 1 mais qu'il s'est déplacé à l'instant 2 ;
   - X_2 peut valoir si le mobile s'est déplacé aux instants 1 et 2.

   Ainsi, on a bien
$$X_2(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$
   (b) La variable aléatoire X_1 suit une loi de Bernoulli donc $[X_1 = 0]$ et $[X_1 = 1]$ forme bien un système complet d'évènements. On peut donc appliquer la formule des probabilité totales,
$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0) \times P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1) \times P_{[X_1=1]}(X_2 = 0) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 0) \times P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \times P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} P(X_2 = 2) &= P(X_1 = 0) \times P_{[X_1=0]}(X_2 = 2) + P(X_1 = 1) \times P_{[X_1=1]}(X_2 = 2) \\ &= \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$
   (c) On a
$$E(X_2) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

3. La variable aléatoire X_n peut prendre toutes les valeurs de 0 à n, la justification étant similaire à celle faite pour la question **2(a)**. Ainsi,

$$X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$$

4. (a) Le mobile ne peut se trouver à l'abscisse k à l'instant n, que si il se trouvait à l'abscisse $k-1$ à l'instant $n-1$. En effet, le mobile ne peut se déplacer que d'une unité à la fois, et ne peut rester sur une même abscisse d'un instant à l'autre. Ainsi, on a bien

$$[X_n = k] \subset [X_n - 1 = k-1]$$

(b) De manière générale, si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$. Ainsi, d'après la question précédente,

$$[X_n = k] = [X_n = k] \cap [X_{n-1} = k-1]$$

(c) D'après la formule des probabilités composées, et l'égalité d'évènements établie à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P([X_n = k]) &= P([X_n = k] \cap [X_{n-1} = k-1]) \\ &= P_{[X_{n-1}=k-1]}([X_n = k]) \times P([X_{n-1} = k-1]) \\ &= \frac{1}{3} \times P([X_{n-1} = k-1]) \end{aligned}$$

(d) On a vu que $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$. Ainsi, $\left\{[X_n = k]\ ;\ k \in [\![0;n]\!]\right\}$ forme un système complet d'évènement. Donc,

$$P(X_n = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(X_n = k)$$

Or, on vient de voir à la question précédente que $P(X_n = k) = \frac{1}{3}P([X_{n=1} = k-1])$. Donc,

$$P(X_n = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}P([X_{n=1} = k-1]) = 1 - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} P([X_{n=1} = k-1])$$

Or, en faisant le changement d'indice $j = k-1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} P([X_{n-1} = k-1]) = \sum_{j=0}^{n-1} P([X_{n-1} = j])$$

Et $X_{n-1}(\Omega) = [\![0;n-1]\!]$ donc

$$\sum_{j=0}^{n-1} P([X_{n-1} = j]) = 1$$

Bref,

$$P([X_n = 0]) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

5. (a) Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, notons $\mathcal{P}_k$ la propriété « $P[X_n = k]) = \left(\frac{1}{3}\right)^k P([X_{n-k} = 0])$ ».
Initialisation : $(k = 0)$
On a $\left(\frac{1}{3}\right)^0 P([X_{n-0} = 0]) = P([X_n = 0])$. Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie et on veut montrer que P_{k+1} est vraie aussi. Alors, en utilisant le résultat de la question **4(c)**, on a :

$$P([X_n = k+1]) = \frac{1}{3}P([X_{n-1} = k])$$

D'où en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} P([X_n = k+1]) &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k P([X_{n-1-k} = 0]) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} P([X_{n-(k+1)} = 0]) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.
Conclusion : $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in [\![0; n]\!]$ à savoir

$$P[X_n = k]) = \left(\frac{1}{3}\right)^k P([X_{n-k} = 0])$$

Remarque : En toute rigueur, il aurait fallu considérer la propriété $\mathcal{P}_k$: « pour tout entier $n \geqslant k$, $P[X_n = k]) = \left(\frac{1}{3}\right)^k P([X_{n-k} = 0])$ ».

(b) En choisissant $k = n$ dans l'expression obtenu à la quesrion précédente, on a :

$$P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n P([X_0 = 0]) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(c) On a vu que pour entier $n \geqslant 1$, $P(X_n = 0) = \frac{2}{3}$. En particulier, pour tout $0 \leqslant k < n$, $P([X_{n-k} = 0]) = \frac{2}{3}$. Donc, pour tout $0 \leqslant k < n$,

$$P([X_n = k]) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Et on a vu que

$$P([X_n = n]) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

6. (a) Selon la définition de $E(X_n)$, on a

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} kP([X_n = k]) = \sum_{k=1}^{n} kP([X_n = k])$$

Or, d'après la question **4(c)**,

$$P([X_n = k]) = \frac{1}{3}P([X_{n-1} = k-1])$$

Donc,

$$E(X_n) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} kP([X_{n-1} = k-1])$$

(b) On a donc

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} kP([X_{n-1}=k-1]) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} (k-1+1)P([X_{n-1}=k-1]) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} (k-1)P([X_{n-1}=k-1]) + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} P([X_{n-1}=k-1]) \\
&= \frac{1}{3}\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} jP([X_{n-1}=j])}_{=E(X_{n-1})} + \frac{1}{3}\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} P([X_{n-1}=j])}_{=1} \\
&= \frac{1}{3}E(X_{n-1}) + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(c) Vu la relation établie à la question précédente, on constate que $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = E(X_n) - \frac{1}{2}$. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
v_n &= E(X_n) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}E(X_{n-1}) + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}\left(v_{n-1} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}v_{n-1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}v_{n-1}
\end{aligned}$$

Donc, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Or, $v_0 = E(X_0) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Donc,

$$v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Et ainsi,

$$E(X_n) = v_n + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}$$

Exercice 4 –

1. (a) Posons $u(x) = x$ et $v(x) = (x+1)^2$. On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2(x+1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{1(x+1)^2 - x \times 2(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(x+1)(x+1-2x)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{1-x}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

(b) Puisque $x \in [0;+\infty[$, on a $(x+1)^3 > 0$. Par ailleurs, $1 - x \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$. On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[0;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$(x+1)^3$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

(c) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

(d) Par ailleurs,

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

2. (a) On a

$$u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$u_2 = f(u_1) = f(\frac{1}{4}) = \frac{\frac{1}{4}}{(\frac{1}{4}+1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{(\frac{5}{4})^2} = \frac{1}{4} \times \frac{16}{25} = \frac{4}{25}$$

(b) Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété « $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}$. ».

Initialisation : $(n = 1)$

$u_1 = \frac{1}{4}$ et $0 < \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{1}$.

Ainsi, $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on veut montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi. Par hypothèse de récurrence, on a

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$$

Or, on a vu à la question **1.(d)** que f est croissante sur $[0;1]$. Ainsi,

$$f(0) < f(u_n) \leqslant f(\frac{1}{n})$$

c'est-à-dire,

$$0 < u_{n+1} \leqslant \frac{\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n}+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2}$$

Or,

$$\frac{n}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1} \times \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\leqslant 1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Ainsi,

$$0 < u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.
Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, à savoir

$$\forall n \geqslant 1, \qquad 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}$$

(c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

3. (a) On a

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{1}{f(u_n)} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{1}{\frac{u_n}{(u_n+1)^2}} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{(u_n+1)^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{u_n^2 + 2u_n}{u_n} \\ &= \frac{u_n(u_n+2)}{u_n} \\ &= u_n + 1 \end{aligned}$$

(b) Puisque $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}$ et que $v_n = u_n + 2$, on a

$$2 < v_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}$$

4. Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété « $2(n+1) \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$. »

Initialisation : $(n=2)$

On a $2(2+1) = 6$, $\dfrac{1}{u_2} = \dfrac{1}{\frac{4}{25}} = \dfrac{25}{4} = 6{,}25$ et $2(2+1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 6 + 1 = 7$.

Ainsi, on a bien
$$2(2+1) \leqslant \frac{1}{u_2} \leqslant 2(2+1) + \sum_{k=1}^{2-1} \frac{1}{k}$$
et donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on veut montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi. Par hypothèse de récurrence, on a
$$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
Par ailleurs, $\dfrac{1}{u_{n+1}} = v_n + \dfrac{1}{u_n}$ par définition de v_n et on sait d'après la question **3(b)** que $2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{n}$. Dès lors,
$$2(n+1) + 2 \leqslant \frac{1}{u_n} + v_n \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + 2 + \frac{1}{n}$$
D'où,
$$2(n+2) \leqslant \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant 2(n+2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$, à savoir
$$\forall n \geqslant 2, \qquad 2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

5. (a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur l'intervalle $[k-1;k]$ donc
$$\forall t \in [k-1;k], \qquad \frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{k}$$
D'où, par croissance de l'intégrale,
$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}$$
Bref,
$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{k}$$
(b) On sait par ailleurs que
$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_{k-1}^{k} = \ln(k) - \ln(k-1)$$
Ainsi,
$$\ln(k) - \ln(k-1) \geqslant \frac{1}{k}$$

On somme maintenant cette inégalité pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Or, on reconnait une somme téléscopique,

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k)-\ln(k-1) = \ln(2)-\ln(1)+\ln(3)-\ln(2)+\cdots+\ln(n)-\ln(n-1) = \ln(n)+\ln(2) \leqslant 1+\ln(n)$$

Bref, on a bien

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1+\ln(n)$$

6. En multipliant par $\frac{1}{n}$ l'inégalité obtenue à la question **4**, on obtient

$$\frac{2(n+1)}{n} \leqslant \frac{1}{nu_n} \leqslant \frac{2(n+1)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Or, d'après la question **5(b)**,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1+\ln(n)$$

Donc,

$$\frac{2(n+1)}{n} \leqslant \frac{1}{nu_n} \leqslant \frac{2(n+1)}{n} + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$$

Enfin,

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissance comparée.

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n} = 2$$

Et donc,

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = \frac{1}{2}$$