DEVOIR SURVEILLÉ 1

Les documents, la calculatrice et tout matériel éléctronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez.
Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.
Toutes vos réponses doivent être justifiées, de manière claire et précise.

Ce sujet comporte 4 pages et est constitué de 4 problèmes. Bon courage!

Exercice 1 (Ecricome 2007) **–** On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}+^* \qquad f(x) = x+1+\frac{x-1+\ln(x)}{x^2}$$

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$$

1. Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^3 - x - 2$.
   (a) Prouver que $P(x)$ est factorisable par $x-1$.
   (b) Écrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de $(x-1)$ par un polynôme $Q(x)$ que l'on déterminera.
   (c) Déterminer alors le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g'(x) = \frac{P(x)}{x}$$
3. En déduire les variations de la fonction g sur son domaine de définition.
4. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g(x) > 0$$

Partie II : Étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathcal{C}_f$?
2. (a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
   (c) Montrer que sur l'intervalle $[1;+\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite (Δ).
3. (a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$
   (b) En déduire les variations de la fonction f.

Exercice 2 (BSB 2020) **–** On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix};C=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix};D=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix};P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix};Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer PQ et QP.
   (b) Justifier l'égalité $QAP=C$.
2. (a) Montrer que $B=I_2+A$ et que $D=I_2+C$.
   (b) En déduire que $QBP=D$.
   (c) Montrer que $PDQ=B$.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $B^n=PD^nQ$.
   (b) Pour tout entier naturel n, donner les coefficients de D^n.
   (c) Déduire de 3.a) et 3.b) que pour tout entier naturel n on a : $B^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1&3^n-1\\3^n-1&3^n+1\end{pmatrix}$
4. Antoine et Béatrice jouent au Badminton. On suppose que lors de chaque échange, le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\frac{2}{3}$ et le perd avec une probabilité $\frac{1}{3}$.
   On suppose que c'est Antoine qui a le service lors du premier echange. Ensuite, selon les regles de ce jeu, celui qui emporte l'échange marque un point et obtient le service pour l'échange suivant.
   Pour tout entier $n\geqslant 1$, on note A_n l'évènement « Antoine gagne le n-ième échange » et B_n l'évènement « Béatrice gagne le n-ième échange ». On note a_n et b_n leurs probabilités respectives.
   (a) Donner les valeurs de a_1 et b_1. Calculer a_2 et vérifier que $a_2=\frac{5}{9}$.
   (b) On observe qu'Antoine emporte le deuxième échange. Quelle est la probabilité qu'il ait emporté le premier échange ?
   (c) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier $n\geqslant 1$ on a : $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n$. Exprimer de même b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour tout entier $n\geqslant 1$
   (d) Pour tout entier $n\geqslant 1$, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$. Vérifier que $X_{n+1}=\frac{1}{3}BX_n$
   (e) Montrer par récurrence que pour tout entier $n\geqslant 1$ on a : $X_n=\frac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}X_1$.
   (f) Deduire de 3.c) que pour tout entier $n\geqslant 1$ on a : $a_n=\frac{3^n+1}{2\times 3^n}$. Déterminer de même une expression de b_n en fonction de n pour tout entier $n\geqslant 1$.
5. **Simulation informatique.**
   On suppose avoir importé la librairie Python `numpy.random` sous l'abréviation `rd`. On rappelle que l'instruction `a=rd.binomial(1,p)` simule une loi de Bernoulli de paramètre p. Ainsi si $p=\frac{2}{3}$ l'instruction `a=rd.binomial(1,p)` affecte à la variable `a` la valeur 0 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et la valeur 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
   On utilise cette instruction pour simuler une partie de 20 échanges entre Antoine et Béatrice.
   (a) Recopier et compléter les lignes 4 et 5 du programme ci-dessous de telle sorte que lors de chacun des 20 échanges de la partie la variable a corresponde au point marqué par Antoine lors de cet échange (c'est-à-dire 1 ou 0).

(b) Recopier et compléter les lignes 2 et 7 afin que la variable S calcule la somme des points obtenus par Antoine durant la partie.

```
1.  import numpy.random as rd
2.  a=rd.binomial(1,2/3)
3.  S=....
4.  for k in range(2,21):
5.      if a==1:
6.          a=....
7.      else:
8.          a=....
9.      S=...
10. print(S)
```

Exercice 3 (BSB 2019) – Dans cet exercice, on suppose que l'on dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 4 boules rouges, tandis que l'urne $\mathcal{U}_2$ contient deux boules rouges et deux boules blanches.
On commence par lancer une pièce non truquée. Si l'on obtient « PILE » on choisit de faire une succession de tirages dans l'urne $\mathcal{U}_1$. Dans le cas contraire, on choisit de faire des tirages dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
On note F l'évènement « la pièce amène FACE ». L'évènement « la pièce amène PILE » est donc $\overline{F}$.
On définit également, pour tout $k \geqslant 1$, R_k l'évènement « le k-ième tirage dans l'urne choisie amène une boule rouge ».

1. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on effectue un tirage. Montrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que la probabilité de tirer une boule rouge est $\dfrac{3}{4}$.
2. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on effectue deux tirages <u>sans remise</u>. C'est-à-dire que la boule tirée lors du premier tirage n'est pas remise dans l'urne avant de procéder au deuxième tirage dans la même urne.
   (a) Calculer $P_F(R_1 \cap R_2)$ et $P_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2)$. En déduire que la probabilité que le tirage amène deux boules rouges est $\dfrac{7}{12}$.
   (b) On remarque a posteriori que les deux boules tirées sont rouges. Quelle est la probabilité que la pièce ait amené PILE ?
3. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on décide de faire des tirages sans remise dans l'urne choisie jusqu'à ce que l'on soit en mesure de déterminer avec certitude dans quelle urne l'on se trouve. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
   (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![1;3]\!]$.
   (b) Expliquer pourquoi $[Y=1] = F \cap B_1$. En déduire $P(Y=1)$.
   (c) Calculer de même $P(Y=2)$.
   (d) En déduire la valeur de $P(Y=3)$.
   (e) Calculer $E(Y)$.

Exercice 4 (BSB 2021) – Une matrice carrée M est dite idempotente si elle vérifie $M^2 = M$.

1. **Exemple.**
   Vérifier que la rnatrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est idempotente. Le détail des calculs doit apparaitre sur la copie.

2. **Application à l'étude des puissances d'une matrice.**

   On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = I_2 - C$.

   (a) Montrer que C et D sont idempotentes. Calculer CD et DC.

   (b) On pose $B = 2C + D$.
   Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $B^n = 2^n C + D$.
   Calculer, pour tout entier naturel n, les quatre coefficients de B^n.

   On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

   (c) Calculer P^2.

   (d) Calculer PAP et vérifier que : $PAP = B$.

   (e) En déduire que $PBP = A$.

   (f) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $A^n = PB^nP$.

   (g) Déduire de la question précédente et de 3.b), en détaillant les calculs, que pour tout entier naturel n on a :
   $$A^n = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 & -2^n + 1 \\ 6\left(2^n - 1\right) & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}$$