DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Les documents, la calculatrice et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Justifiez vos affirmations avec clarté, précision, concision et rigueur.
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet, comportant 4 pages, est constitué de 4 problèmes. Bon courage !

Problème n° 1 (*Extrait de ESC*)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - 1 + x$$

1. (a) Écrire un programme Scilab permettant de définir la fonction g ci-dessus. On pourra nommer `g` cette fonction et `y` son résultat.

   (b) Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.

   (c) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x, le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}$$

   On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

2. (a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   (b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

   (c) Justifier que :

   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

3. (a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x, la relation :

   $$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

   (b) Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites calculées à la question **2**.

4. Montrer que la dérivée seconde de f vérifie, pour tout réel x, la relation :

   $$f''(x) = \frac{2 - x}{e^x}$$

   Étudier la convexité de f.

5. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Problème n° 2 (*Extrait de ESC*)

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer PQ et QP.
   (b) Vérifier que $QAP = D$.
2. (a) Montrer que $A = PDQ$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $A^n = PD^nQ$.
   (c) Calculer D^n pour tout entier naturel n.
   (d) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièces contigües A, B et C. À l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce B. On suppose que les déplacements qui suivent se font selon le protocole suivant :

- si à un instant n donné, la mouche est dans la pièce A ou dans la pièce C, alors elle revient dans la pièce B à l'instant $n+1$;
- si à un instant n donné, la mouche est dans la pièce B, alors elle y reste à l'instant $n+1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$, sinon elle va de façon équiprobable dans la pièce A ou dans la pièce C.

Pour tout entier naturel n, on définit l'évènement A_n : « la mouche est dans la pièce A à l'instant n ». On définit de même les évènements B_n et C_n. Enfin, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces évènements.

3. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \qquad b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \qquad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$

   On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix}$.

5. (a) Justifier que $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $U_n = A^nU_0$.
   (c) Déduire de la question **2.d)** que pour tout entier naturel n, on a :

$$b_n = \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

   (d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions de a_n et c_n en fonction de n.

Problème n° 3 (*Extrait de ECRICOME*)

Dans cet exercice, on étudie quelques situations probabilistes liées à un standard téléphonique d'un service après-vente. Le standard de ce service après-vente reçoit deux types d'appels : les appels concernant le petit éléctroménager et les appels concernant les appareils audio et vidéo.
Lors d'un appel, le problème est soit résolu directement par téléphone, soit il nécéssite l'intervention d'un technicien. On considère les évènements suivants :

- E : « un appel concerne le petit éléctroménager ».
- A : « un appel concerne les appareils audio-vidéo ».
- T : « le problème posé se résout directement par téléphone ».

De plus, des études ont permis d'établir les résultats suivants :

- (H_1) Le standard reçoit 20% d'appels concernant le petit éléctroménager et 80% d'appels concernant les appareils audio et vidéo.
- (H_2) Lorsqu'un appel concerne le petit éléctroménager, la probabilité pour que le problème soit résolu par téléphone est $0,5$.
- (H_3) Lorsqu'un appel concerne un appareil audio-vidéo, la probabilité pour que le problème soit résolu par téléphone est de $0,375$.

On supposera enfin les appels indépendants les uns des autres.

1. (a) Traduire en terme de probabilité les données (H_1), (H_2) et (H_3).

   (b) Montrer que $\mathbb{P}(T) = 0,4$.

   (c) On suppose qu'une personne appelant le standard a vu son problème résolu directement par téléphone. Calculer la probabilité pour que le problème posé concerne un petit éléctroménager.

2. Un standardiste reçoit 10 appels dans l'heure. On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'appels concernant du petit éléctroménager.

   (a) Déterminer la loi de X : on donnera les valeurs prises par X ainsi que, pour chacune d'elles, la probabilité correspondante.

   (b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

3. Pendant une période de 10 jours, un standardiste reçoit 600 appels. On note Y la variable aléatoire représentant, le nombre d'appels résolus directement par téléphone. Donner la loi de Y.

Problème n° 4 (*Extrait de ESCP*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$, et pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. (a) Calculer pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Placer les réels 1 et $f(1)$ dans ce tableau.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, on a $f(x) \in [0;1]$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, le réel u_n appartient à l'intervalle $[0;1]$.
3. Soient A, J et I les matrices d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que $J^2 = 2J$.
   (b) On admet que pour tout entier naturel n, on a la relation suivante :

$$A^n = I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J$$

   En déduire, sous forme matricielle, l'expression de A^n en fonction de n.
4. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $p_0 = 1$, $q_0 = 2$, et pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2q_n \end{cases}$$

   On considère pour tout n de $\mathbb{N}$, la matrice à deux lignes et une colonne X_n définie par :

$$X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$X_{n+1} = AX_n$$

   (b) Établir par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $X_n = A^n X_0$.
   (c) En déduire l'expression de X_n en fonction de n et donner les valeurs de p_n et q_n en fonction de n.
5. (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$u_n = \frac{p_n}{q_n}$$

   (b) Donner l'expression de u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.