

CORRIGÉ CONCOURS BLANC 2- TYPE ESCP

Exercice 1 – 1. (a) Les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{E}$ vérifient en particulier que $ad - bc = 0$ donc d'après le cours, elles ne sont pas inversibles.

(b) • Posons $a = 1, b = 1, c = -1$ et $d = -1$. Alors $a + d = 1 - 1 = 0$ et

$$ad - bc = 1 \times (-1) - 1 \times (-1) = -1 + 1 = 0 \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

• Posons $a = 1, b = -1, c = 1$ et $d = -1$. Alors $a + d = 1 - 1 = 0$ et

$$ad - bc = 1 \times (-1) - (-1) \times 1 = -1 + 1 = 0 \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

(c) • Posons $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\text{Alors } ad - bc = 2 \times (-2) - 0 \times 0 = -4 \neq 0 \text{ donc } S \notin \mathcal{E}$$

• Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Alors } a + d = 2 + 2 = 4 \neq 0 \text{ donc } P \notin \mathcal{E}$$

Ainsi, on constate sur ces deux exemples que la somme et le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ n'appartiennent pas nécessairement à $\mathcal{E}$. d/

(d) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{E}$. Alors $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$ Or, $M \in \mathcal{E}$ donc en particulier, on a $a + d = 0$ donc :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

De plus, $M \in \mathcal{E}$ donc en particulier, on a $ad - bc = 0$ donc $ad = bc$ donc :

$$a^2 + bc = a^2 + ad = a(a + d) = a \times 0 = 0$$

et

$$bc + d^2 = ad + d^2 = d(a + d) = d \times 0 = 0$$

Finalement, on a justifié que si $M \in \mathcal{E}$, alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$ Par suite, pour tout entier $n \geq 2$, on a $M^n = M^2 \times M^{n-2} = 0_2 \times M^{n-2} = 0_2$

2. (a) $1 \times 5 - (-2) \times 2 = 5 + 4 = 9 \neq 0$ donc la matrice A est inversible.

(b) Calculons K :

$$K = A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-2 + 2 = 0 \text{ et } -2 \times 2 - 2 \times (-2) = -4 + 4 = 0 \text{ donc } K \in \mathcal{E}$$

- (c) i. $K = A - 3I$ donc $A = K + 3I$. De plus $K \times (3I) = 3K$ et $(3I) \times K = 3K$ donc les matrices K et $3I$ commutent donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (K + 3I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} K^k (3I)^{n-k}$$

D'après la question 2/b/, on sait que $K \in \mathcal{E}$ donc d'après la question 1/d/, on a $K^2 = 0_2$ et par conséquent :

$$A^n = \binom{n}{0} K^0 (3I)^n + \binom{n}{1} K^1 (3I)^{n-1} + 0_2 = I \times 3^n I + nK \times 3^{n-1} I$$

En conclusion :

$$A^n = 3^n I + n3^{n-1} K$$

- ii. D'après ce qui précède, $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} + n3^{n-1} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ d'où

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n - 2n \times 3^{n-1} & 2n \times 3^{n-1} \\ -2n \times 3^{n-1} & 3^n + 2n \times 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

- (a) D'après la question 2/b/, on sait que $K \in \mathcal{E}$ donc d'après la question 1/d/, on a $K^2 = 0_2$ i.e. $(A - 3I)^2 = 0_2$. En développant, on obtient que $A^2 - 6A + 9I = 0_2$ donc $a = -6$ et $\beta = 9$ conviennent. Il reste à justifier l'unicité de a et β . Soit donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0_2$ et soit $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 + \alpha' A + \beta' I = 0_2$. Par soustraction, on obtient l'égalité :

$$(a - \alpha') A + (\beta - \beta') I = 0_2$$

Raisonnons par l'absurde et supposons un court instant que $a \neq \alpha'$. Alors on aurait $(\alpha - \alpha') A = (\beta' - \beta) I$ et puisque $\alpha - \alpha' \neq 0$, on aurait l'égalité $A = \frac{\beta' - \beta}{\alpha - \alpha'} I$, donc A serait diagonale, ce qui est absurde. Donc $\alpha = \alpha'$. Par suite, $(\beta - \beta') I = 0_2$, ce qui impose $\beta - \beta' = 0$ i.e. $\beta = \beta'$. En conclusion, $(a, \beta) = (-6, 9)$ est l'unique couple de réels tels que :

$$A^2 + aA + \beta I = 0_2$$

- (b) D'après la question précédente, $A^2 - 6A + 9I = 0$ donc $-A^2 + 6A = 9I$ donc $A(-A + 6I) = 9I$ donc $A \left[\frac{1}{9}(-A + 6I) \right] = I$ i.e. $A \left[3I - \frac{1}{6}A \right] = I$ ce qui suffit à prouver que la matrice A est inversible et que :

$$A^{-1} = \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}A$$

- (c) $K = A - 3I$ donc $A = K + 3I$ donc d'après la question précédente

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}A \\ &= \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}(K + 3I) \\ &= \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}K - \frac{1}{3}I \\ &= \frac{1}{3}I - \frac{1}{9}K \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$A^{-1} = \frac{1}{3}I - \frac{1}{9}K$$

Pour $n = -1$, on a donc :

$$3^n I + n3^{n-1} K = 3^{-1} I + (-1) \times 3^{-2} K = \frac{1}{3} I - \frac{1}{9} K = A^{-1}$$

donc la formule $A^n = 3^n I + n3^{n-1} K$ reste valide pour $n = -1$. Montrons qu'elle reste également valide pour tout $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Tout élément $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ s'écrit $p = -n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $A^{-n} = 3^{-n} I - n3^{-n-1} K$.

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $A^{-n} = 3^{-n} I - n3^{-n-1} K$ » **Initialisation** ($n = 1$) :

Nous venons de constater que $A^{-1} = 3^{-1} I - 3^{-2} K$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $A^{-n} = 3^{-n} I - n3^{-n-1} K$ et on sait que $K^2 = 0_2$ donc :

$$\begin{aligned} A^{-(n+1)} &= A^{-n-1} \\ &= A^{-n} \times A^{-1} \\ &= (3^{-n} I - n3^{-n-1} K) (3^{-1} I - 3^{-2} K) \\ &= 3^{-n-1} I - 3^{-n-2} K - n3^{-n-2} K + n3^{-n-3} K^2 \\ &= 3^{-n-1} I - (n+1)3^{-n-2} K \\ &= 3^{-(n+1)} I - (n+1)3^{-(n+1)-1} K \end{aligned}$$

done $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, à savoir

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^{-n} = 3^{-n} I - n3^{-n-1} K$$

En conclusion, la formule $A^n = 3^n I + n3^{n-1} K$ est valide pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque : Une autre méthode possible pour démontrer ce résultat est de s'inspirer astucieusement de la question 2.(c)(i) :

Soit $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Notons $p = -n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Alors d'après ce qui précède :

$$A^p = A^{-n} = (A^{-1})^n = \left(\frac{1}{3} I - \frac{1}{9} K \right)^n$$

Les matrices $\frac{1}{3} I$ et $-\frac{1}{9} K$ commutent donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$A^{-n} = \left(\frac{1}{3} I - \frac{1}{9} K \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3} I \right)^{n-k} \left(-\frac{1}{9} K \right)^k$$

D'après la question 2.(c)(i), on sait que $K^2 = 0_2$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} A^{-n} &= \binom{n}{0} \left(\frac{1}{3} I \right)^n - \binom{n}{1} \left(\frac{1}{3} I \right)^{n-1} \times \frac{1}{9} K + 0_2 \\ &= \left(\frac{1}{3} \right)^n I - n \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \times \frac{1}{9} K \\ &= 3^{-n} I - n3^{-n+1} \times 3^{-2} K \\ &= 3^{-n} I - n3^{-n-1} K \end{aligned}$$

3. (a) D'après la question 3.(a) on sait que $(A - 3I)^2 = 0_2$ donc un polynôme annulateur de A est $(X - 3)^2$, dont l'unique racine est 3. D'après le cours, on en déduit bien que la seule valeur propre possible λ de la matrice A est $\lambda = 3$

- (b) Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On sait que X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda = 3$ si et seulement si X est non nul et vérifie $AX = 3X$

$$\begin{aligned} AX = 3X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 3x \\ -2x + 5y = 3y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff -2x + 2y = 0 \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

Le système $AX = 3X$ possède une infinité de solutions, ce qui prouve que le réel 3 est effectivement valeur propre de A . Notons $E_3(A)$ l'ensemble des vecteurs propres de A associés. On a :

$$E_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R}^* \right\}$$

Exercice 2 –

1. Je montre que la fonction f vérifie les trois conditions d'une densité de probabilité :

- Pour $x \notin [0, 1]$, $f(x) = 0 \geq 0$ et pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = 4x(1 - x^2) \geq 0$ car $x \geq 0$ et $1 - x^2 \geq 0$ puisque $x \leq 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- Sur $]-\infty, 0[$, f est continue car constante, sur $[0, 1]$, f est continue car polynomiale et sur $]1, +\infty[$, f est continue car constante.

Donc f admet au plus deux points de discontinuité sur $\mathbb{R}$.

- Il me reste à montrer la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

Je calcule séparément les trois intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^0 f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 0 dx \text{ converge et vaut } 0. \\ - \int_1^{+\infty} f(x) dx &= \int_1^{+\infty} 0 dx \text{ converge et vaut } 0. \\ - \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 4x(1 - x^2) dx = \int_0^1 4x - 4x^3 dx. \end{aligned}$$

L'intégrande est un polynôme, dont je détermine une primitive terme à terme :

$$\int_0^1 4x - 4x^3 dx = \left[4 \frac{x^2}{2} - 4 \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \left[2x^2 - x^4 \right]_0^1 = (2 \times 1^2 - 1^4) - (2 \times 0^2 - 0^4) = (2 - 1) - 0 = 1.$$

Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Finalement, j'ai bien montré que f est une densité de probabilité.

2. (a) La variable aléatoire X possède une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge. Je calcule séparément les trois intégrales suivantes :

- $\int_{-\infty}^0 x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \times 0 dx = \int_{-\infty}^0 0 dx$ converge et vaut 0.
- $\int_1^{+\infty} x f(x) dx = \int_1^{+\infty} x \times 0 dx = \int_1^{+\infty} 0 dx$ converge et vaut 0.
- $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 4x^2(1-x^2) dx = \int_0^1 4x^2 - 4x^4 dx$.

L'intégrande est un polynôme, dont je détermine une primitive terme à terme :

$$\int_0^1 4x^2 - 4x^4 dx = \left[4 \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \left[\frac{4}{3} x^3 - \frac{4}{5} x^5 \right]_0^1 = \left(\frac{4}{3} \times 1^3 - \frac{4}{5} \times 1^5 \right) - 0 = \frac{20-12}{15} = \frac{8}{15}.$$

Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^1 x f(x) dx + \int_1^{+\infty} x f(x) dx = 0 + \frac{8}{15} + 0 = \frac{8}{15}.$$

Finalement la variable aléatoire X possède une espérance et $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{8}{15}$.

- (b) La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge. Je calcule séparément les trois intégrales suivantes :

- $\int_{-\infty}^0 x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 \times 0 dx = \int_{-\infty}^0 0 dx$ converge et vaut 0.
- $\int_1^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_1^{+\infty} x^2 \times 0 dx = \int_1^{+\infty} 0 dx$ converge et vaut 0.
- $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 4x^3(1-x^2) dx = \int_0^1 4x^3 - 4x^5 dx$.

L'intégrande est un polynôme, dont je détermine une primitive terme à terme :

$$\int_0^1 4x^3 - 4x^5 dx = \left[4 \frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \left[x^4 - \frac{2}{3} x^6 \right]_0^1 = \left(1^4 - \frac{2}{3} \times 1^6 \right) - 0 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_1^{+\infty} x^2 f(x) dx = 0 + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

Ainsi la variable aléatoire X^2 possède une espérance et $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$.

Finalement, grâce à la formule de König-Huygens, j'en déduis que la variable aléatoire X possède une variance et

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15} \right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{64}{225} = \frac{75-64}{225} = \frac{11}{225}.$$

3. Pour déterminer la fonction de répartition, je raisonne à l'aide d'une disjonction de cas pour appliquer la définition : $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

- Si $x < 0$, alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.
- Si $0 \leq x \leq 1$, alors il me faut découper l'intégrale en deux morceaux :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 4t(1-t^2) dt = 0 + \left(2 \times x^2 - x^4\right) - 0 = 2x^2 - x^4,$$

en réutilisant le calcul d'intégrale effectué à la question 1..

- Si $x > 1$, alors il me faut découper l'intégrale en trois morceaux :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 4t(1-t^2) dt + \int_1^x 0 dt = 0 + 1 + 0 = 1,$$

toujours en réutilisant le calcul d'intégrale effectué à la question 1..

Il me reste alors à me ramener à la forme souhaitée par l'énoncé.

Je dois montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $2x^2 - x^4 = 1 - (1 - x^2)^2$. Or pour $x \in [0, 1]$,

$$1 - (1 - x^2)^2 = 1 - (1^2 - 2 \times 1 \times x^2 + (x^2)^2) = 1 - (1 - 2x^2 + x^4) = 1 - 1 + 2x^2 - x^4 = 2x^2 - x^4.$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1 - x^2)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

4. (a) La fonction de répartition d'une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme U et V ont G pour fonction de répartition, alors

$$P(M > x) = P(U > x) \times P(V > x) = (1 - P(U \leq x)) \times (1 - P(V \leq x)) = (1 - G(x))^2.$$

Puis pour la fonction de répartition,

$$F_M(x) = P(M \leq x) = 1 - P(M > x) = 1 - (1 - G(x))^2.$$

- (c) En combinant les expressions obtenues aux deux questions précédentes, j'obtiens que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1 - x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

5. (a) De nouveau, j'opère par disjonction de cas selon les valeurs de x :

- Si $x < 0$, alors $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\sqrt{M} \leq x) = 0$ car une racine carrée ne peut pas être strictement négative.
- Si $0 \leq x \leq 1$, alors $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\sqrt{M} \leq x) = P(M \leq x^2)$ car $x \geq 0$.
Et comme $0 \leq x \leq 1 \implies 0 = 0^2 \leq x^2 \leq 1^2 = 1$, alors $F_Z(x) = F_M(x^2) = 1 - (1 - x^2)^2$.

- Si $x > 1$, alors $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\sqrt{M} \leq x) = P(M \leq x^2) = 1$ car $x \geq 0$.
Et comme $x > 1 \implies x^2 > 1^2 = 1$, alors $F_Z(x) = F_M(x^2) = 1$.

Ainsi j'ai bien montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1 - x^2)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- (b) Les deux variables aléatoires X et Z partagent la même fonction de répartition.
Comme la fonction de répartition caractérise la loi, alors X et Z suivent la même loi.
- (c) Grâce à la question précédente, pour simuler X , il suffit de simuler Z , qui est la racine carrée de la variable aléatoire M . Ainsi le script Python se complète ainsi :

1.	<code>U=rd.random()</code>
2.	<code>V=rd.random()</code>
3.	<code>M=np.min(U,V)</code>
4.	<code>X=np.sqrt(M)</code>

Exercice 3 –

1. (a) Comme les supports de X et de Y sont donnés par $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et que $S = X + Y$, alors S peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et 4 :

$$S(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Pour déterminer la loi, je calcule les probabilités de chaque issue possible en me servant de l'indépendance des variables aléatoires X et Y :

$$P(S = 0) = P([X = 0] \cap [Y = 0]) = P(X = 0) \times P(Y = 0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$

$$\begin{aligned} P(S = 1) &= P([X = 0] \cap [Y = 1]) + P([X = 1] \cap [Y = 0]) \\ &= P(X = 0) \times P(Y = 1) + P(X = 1) \times P(Y = 0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S = 2) &= P([X = 0] \cap [Y = 2]) + P([X = 1] \cap [Y = 1]) + P([X = 2] \cap [Y = 0]) \\ &= P(X = 0) \times P(Y = 2) + P(X = 1) \times P(Y = 1) + P(X = 2) \times P(Y = 0) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S = 3) &= P([X = 1] \cap [Y = 2]) + P([X = 2] \cap [Y = 1]) \\ &= P(X = 1) \times P(Y = 2) + P(X = 2) \times P(Y = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$P(S = 4) = P([X = 2] \cap [Y = 2]) = P(X = 2) \times P(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Je résume la loi de S dans un tableau :

k	0	1	2	3	4
$P(S = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

- (b) Grâce à la loi de S , je peux calculer son espérance :

$$E(S) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{5}{16} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

- (c) Par définition, $S = X + Y$ et par linéarité de l'espérance, $E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
Or

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad E(Y) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4},$$

donc finalement, je retrouve bien

$$E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2}.$$

2. (a) Comme les supports de X et de Y sont donnés par $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et que $T = XY$, alors T peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 4 :

$$T(\Omega) = \{0, 1, 2, 4\}.$$

- (b) Grâce à la formule de Poincaré,

$$\begin{aligned} P(T = 0) &= P([X = 0] \cup [Y = 0]) = P(X = 0) + P(Y = 0) - P([X = 0] \cap [Y = 0]) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{8-1}{16} = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

Pour déterminer la loi, je calcule les probabilités de chaque issue possible en me servant des probabilités déjà calculées à la question 1.a). J'obtiens alors

$$P(T = 1) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$

$$P(T = 2) = P([X = 1] \cap [Y = 2]) + P([X = 2] \cap [Y = 1]) = P(S = 3) = \frac{1}{4},$$

$$P(T = 4) = P([X = 2] \cap [Y = 2]) = P(S = 4) = \frac{1}{4}.$$

Je résume la loi de T dans un tableau :

k	0	1	2	4
$P(T = k)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

(c) Grâce à la loi de T , je peux calculer son espérance :

$$E(T) = 0 \times \frac{7}{16} + 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 + 8 + 16}{16} = \frac{25}{16}.$$

(d) Par définition, $T = XY$ et comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes,

$$E(T) = E(XY) = E(X) \times E(Y) = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{16}.$$

3. En me servant des calculs déjà effectués, j'obtiens aisément la loi du couple (S, T) .

En effet, je sais déjà que $[S = 4] = [T = 4]$, $[S = 3] = [T = 2]$, $[S = 0] \cup [S = 1] \subset [T = 0]$

et que $[T = 1] \subset [S = 2]$. Finalement, voici le tableau représentant la loi du couple (S, T) :

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 4$
$S = 0$	$\frac{1}{16}$	0	0	0
$S = 1$	$\frac{1}{8}$	0	0	0
$S = 2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	0
$S = 3$	0	0	$\frac{1}{4}$	0
$S = 4$	0	0	0	$\frac{1}{4}$

En sommant les probabilités de chaque ligne, je retrouve bien la loi de S et en sommant les probabilités de chaque colonne, je retrouve bien la loi de T .

4. Les variables aléatoires S et T ne sont pas indépendantes. Si c'était le cas, alors on aurait par exemple $P([S = 0] \cap [T = 1]) = P(S = 0) \times P(T = 1)$. Or

$$P([S = 0] \cap [T = 1]) = 0 \quad \text{et} \quad P(S = 0) \times P(T = 1) = \frac{1}{16} \times \frac{1}{16} \neq 0.$$

Donc les variables aléatoires S et T ne sont pas indépendantes.

5. Grâce à la loi du couple (S, T) , je peux calculer l'espérance du produit ST :

$$E(ST) = 2 \times 1 \times \frac{1}{16} + 3 \times 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times 4 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} + 4 = \frac{1 + 12 + 32}{8} = \frac{45}{8}.$$

La covariance $\text{Cov}(S, T)$ s'obtient à l'aide de la formule de König-Huygens :

$$\text{Cov}(S, T) = E(ST) - E(S) \times E(T) = \frac{45}{8} - \frac{5}{2} \times \frac{25}{16} = \frac{45}{8} - \frac{125}{32} = \frac{180 - 125}{32} = \frac{55}{32}.$$

Exercice 4 –

1. (a) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0^+$, donc par composition, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0^+$.
Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$, par produit, on a aussi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-\frac{1}{x}} = 0^+.$$

Comme la limite à droite de f en 0 est égale à $f(0)$, je peux conclure que la fonction f est continue à droite en 0.

- (b) On a $\frac{f(x)}{x} = e^{-\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0^+$ d'après la question précédente. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0^+.$$

Or on peut remarquer que comme $f(0) = 0$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ est le taux d'accroissement de la fonction f entre 0 et x . Alors comme sa limite lorsque x tend vers 0^+ vaut 0, en particulier la limite est finie, donc la fonction f est dérivable à droite en 0 et

$$f'_d(0) = 0.$$

2. (a) La fonction f est de la forme $f = u \times v$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

Alors $u'(x) = 1$ et pour v' , je remarque que v est de la forme $v = e^w$, avec $w(x) = -\frac{1}{x}$.

Alors $w'(x) = \frac{1}{x^2}$ et $v'(x) = w'(x)e^{w(x)} = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

Ainsi

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times e^{-\frac{1}{x}} + x \times \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

J'ai montré que

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

- (b) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x} \geq 0$ et $1 + \frac{1}{x} \geq 1 > 0$. Comme une exponentielle est toujours strictement positive, j'en déduis que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) > 0.$$

Je conclus alors directement que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

- (c) Je cherche la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0^-$ et $\lim_{X \rightarrow 0} e^X = 1$, donc par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, par produit, on a aussi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Je peux ainsi dresser le tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
f	0	$+\infty$

(d) Je cherche la dérivée seconde de f , i.e. la dérivée de f' .

La fonction f' est de la forme $f' = u \times v$, avec $u(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et $v(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

Alors $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$. Et

$$f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -\frac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}.$$

J'ai bien montré que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Comme pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x^3} > 0$ et $e^{-\frac{1}{x}} > 0$, j'en déduis que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) > 0$.

Donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

3. (a) Je reconnais la limite du taux d'accroissement $\frac{e^{-u} - e^{-0}}{u - 0}$. Lorsque u tend vers 0^+ , ce taux d'accroissement tend vers le nombre dérivé à droite de la fonction $u \mapsto e^{-u}$ en 0. Comme sa dérivée est $u \mapsto -e^{-u}$, on obtient que

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u} = -e^{-0} = -1.$$

- (b) On a $f(x) - (x - 1) = xe^{-\frac{1}{x}} - (x - 1) = xe^{-\frac{1}{x}} - x + 1$. Comme je veux utiliser le résultat de la question précédente, je pose $u = \frac{1}{x}$ afin d'obtenir e^{-u} . Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$. Et

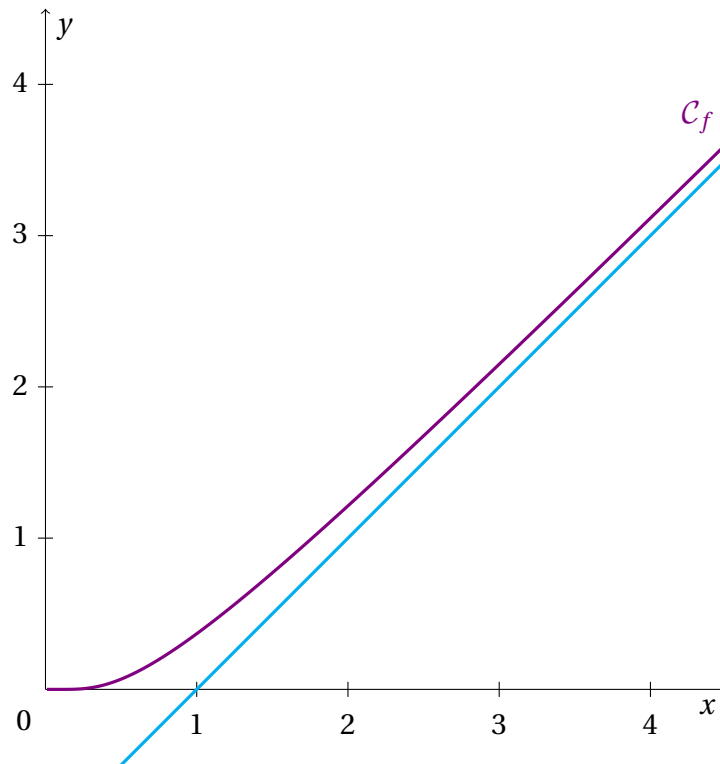
$$\frac{e^{-u} - 1}{u} = \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = xe^{-\frac{1}{x}} - x = f(x) - (x - 1) - 1.$$

Ainsi, on peut conclure que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u} + 1 = -1 + 1 = 0.$$

- (c) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = 0$, graphiquement, la courbe représentative de la fonction f se rapprochera infiniment près de la droite d'équation $y = x - 1$: cette droite est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

Voici l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$:



4. (a) Notons P_n la propriété $u_n > 0$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad 1 > 0.$$

Donc la propriété P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_n soit vraie au rang n et montrons que P_{n+1} est vraie aussi.

$$u_{n+1} = f(u_n) > f(0) = 0, \quad \text{car } f \text{ est strictement croissante.}$$

Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_0 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

- (b) Pour trouver le sens de variation de la suite (u_n) , je cherche le signe de l'expression $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

$$f(u_n) - u_n = u_n e^{-\frac{1}{u_n}} - u_n = u_n \left(e^{-\frac{1}{u_n}} - 1 \right).$$

Je sais que le premier facteur u_n est positif. Et comme $u_n > 0$, $-\frac{1}{u_n} < 0$ et $e^{-\frac{1}{u_n}} < e^0 = 1$.

Donc le second facteur $\left(e^{-\frac{1}{u_n}} - 1 \right)$ est lui négatif. Ainsi on a

$$f(u_n) - u_n \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1} \leq u_n.$$

J'ai bien montré que la suite (u_n) est décroissante.

- (c) La suite (u_n) est décroissante donc monotone et minorée par 0 puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de convergence monotone, j'en déduis que la suite (u_n) est

convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

En passant à la limite dans la formule $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient que $f(\ell) = \ell$, i.e.

$$0 = f(\ell) - \ell = \ell \left(e^{-\frac{1}{\ell}} - 1 \right).$$

Il s'agit d'une équation produit-nul, donc l'un des deux facteurs doit être nul.

Or $e^{-\frac{1}{\ell}} - 1 = 0 \iff e^{-\frac{1}{\ell}} = 1 = e^0 \iff -\frac{1}{\ell} = 0$, ce qui est impossible.

Donc nécessairement, $\ell = 0$.

J'ai montré que la limite de la suite (u_n) est 0.

(d) Voici le script complété.

```
n=0
u=1
while u>0.001
    u=u*exp(-1/u)
    n=n+1
end
disp(n)
```

5. (a) Notons P_n la propriété $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1})$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$\sum_{k=0}^0 \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{et} \quad -\ln(u_1) = -\ln\left(1 \times e^{-\frac{1}{1}}\right) = -\ln(e^{-1}) = -(-1) = 1.$$

Donc la propriété P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_n soit vraie au rang n et montrons que P_{n+1} est vraie aussi.

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_{n+1}} = -\ln(u_{n+1}) + \frac{1}{u_{n+1}}$$

et

$$\begin{aligned} -\ln(u_{n+2}) &= -\ln\left(u_{n+1} \times e^{-\frac{1}{u_{n+1}}}\right) = -\ln(u_{n+1}) - \ln\left(e^{-\frac{1}{u_{n+1}}}\right) \\ &= -\ln(u_{n+1}) - \left(-\frac{1}{u_{n+1}}\right) = -\ln(u_{n+1}) + \frac{1}{u_{n+1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+2}).$$

Donc P_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que P_0 est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1}).$$

(b) La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{u_n}$.

Pour connaître sa nature, il faut regarder la limite de la suite des sommes partielles. Or, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1}).$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(u_{n+1}) = +\infty,$$

puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0^+$ et que $\lim_{X \rightarrow 0^+} -\ln(X) = +\infty$.

J'ai donc montré que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ diverge vers $+\infty$.