

CORRIGÉ CONCOURS BLANC 1 - TYPE ESCP

Exercice 1 (ESCP 2015) – 1. On a $X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$$X_1 = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_2 - \frac{5}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) On a $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et par conséquent :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

et donc on a bien $X_{n+1} = AX_n$.

(b) Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $X_n = A^n X_0$ »

Initialisation ($n = 0$) :

$A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$ donc $X_0 = A^0 X_0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a :

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$$

3. (a) On a :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

et de même $QP = I_3$.

(b) On a :

$$PT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et :

$$AP = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 12 \\ 4 & 4 & 16 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On a donc $AP = PT$ donc en multipliant à droite par Q , on obtient $A = PTQ$. Montrons maintenant par récurrence que $A^n = PT^nQ$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $A^n = PT^nQ$ ».

Initialisation ($n = 0$) :

$A^0 = I_3$ et $PT^0Q = PI_3Q = PQ = I_3$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= PTQ \times PT^nQ \\ &= PTI_3T^nQ \\ &= PTT^nQ &= PT^{n+1}Q \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PT^nQ$$

4. (a) On a :

$$N = T - D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

Et donc pour tout entier $k \geq 2$, $N^k = 0_3$.

(b) On a :

$$DN = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $DN = ND$ et ainsi, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} T^n &= (N + D)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0 D^{n-0} + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} \\ &= D^n + nND^{n-1} \end{aligned}$$

Or, la matrice D est diagonale donc $D^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

$$D^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$ND^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} T^n &= D^n + nND^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned} A^n &= PT^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - n - 3 & \frac{3}{2}n - 4 \times 2^n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4 \times 2^n - 2n - 4 & 3n - 4 \times 2^n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4 \times 2^n - 4n - 4 & 6n - 4 \times 2^n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. (a) D'après la question 2/(b), on sait que $X_n = A^n X_0$. Par conséquent :

$$X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - n - 3 & \frac{3}{2}n - 4 \times 2^n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4 \times 2^n - 2n - 4 & 3n - 4 \times 2^n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4 \times 2^n - 4n - 4 & 6n - 4 \times 2^n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - n - 3 \\ 4 \times 2^n - 2n - 4 \\ 4 \times 2^n - 4n - 4 \end{pmatrix}$$

Or, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ donc en particulier

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 \times 2^n - 4n - 4)$$

(b) Transformons l'écriture de u_n :

$$u_n = 4 - 4 \times \frac{n}{2^n} - 4 \times \frac{1}{2^n}$$

Or, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$$

Exercice 2 (ESCP 2020) –

1. X compte le nombre de répétition nécessaires avant d'obtenir un premier succès (ici obtenir un premier « pile ») lors de la répétition d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi, X suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$. On a donc

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

De même, Y suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$, le succès étant cette fois d'obtenir un premier « face ».

2. Il est impossible d'obtenir son premier pile **et** son premier face dès le premier lancer. Ainsi, $P([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0$. Or, puisque X et Y suivent des lois géométriques, on a $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(Y = 1) = \frac{1}{2}$. Dès lors,

$$P([X = 1] \cap [Y = 1]) \neq P(X = 1) \times P(Y = 1)$$

Donc, X et Y ne sont pas indépendantes.

3. (a) Soit j un entier supérieur ou égal à 2. L'évènement $[X = 1] \cap [Y = j]$ signifie que l'on a obtenu le premier pile au premier lancer et le premier face au j -ème lancer. Or, puisque $j \geq 2$, si on obtient un premier face au j -ème lancer, alors on a forcément obtenu un premier pile dès le premier lancer. Ainsi, $[Y = j] \subset [X = 1]$ et donc $[X = 1] \cap [Y = j] = [Y = j]$. Et Donc, $P([X = 1] \cap [Y = j]) = P([Y = j])$.
 (b) Soit i un entier supérieur ou égal à 2. L'évènement $[X = i] \cap [Y = 1]$ signifie que l'on a obtenu le premier pile au premier lancer au i -ème lancer et le premier face au premier lancer. Or, puisque $i \geq 2$, si on obtient un premier pile au i -ème lancer, alors on a forcément obtenu un premier face dès le premier lancer. Ainsi, $[X = i] \subset [Y = 1]$ et donc $[X = i] \cap [Y = 1] = [X = i]$. Et Donc, $P([X = i] \cap [Y = 1]) = P([X = i])$.
 (c) On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Ensuite,

$$P(XY = 1) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0 \text{ d'après la question 2}$$

Puis, pour tout $k \geq 2$, on a $[XY = k] = ([X = k] \cap [Y = 1]) \cup ([X = 1] \cap [Y = k])$ puisque les événements $[X = i] \cap [Y = j]$ sont impossibles (pour les raisons évoquées aux questions 2(b) et 2(c)). Ainsi,

$$\begin{aligned} P(XY = k) &= P([X = k] \cap [Y = 1]) + P([X = 1] \cap [Y = k]) = P(X = k) + P(Y = k) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

En résumé, la loi de XY est donnée par

$$(XY)(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \llbracket \quad \text{et} \quad \forall k \geq 2, P(XY = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

- (d) Étudions la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} nP(XY = n)$. Soit $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^n kP(XY = k) = \sum_{k=2}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{j=1}^{n-1} (j+1) \left(\frac{1}{2}\right)^j = \sum_{j=1}^{n-1} j \left(\frac{1}{2}\right)^j + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Or, une variable aléatoire Z suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ admet une espérance, donnée par $2 = E(Z) = \sum_{j=1}^{+\infty} jP(Z = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \left(\frac{1}{2}\right)^j$. La première somme partielle ci-dessus correspond donc à la somme partielle d'une somme convergente de somme égale à 2.

Par ailleurs, la deuxième somme partielle correspond à la somme partielle des probabilités d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Donc, cette somme converge et sa somme vaut 1.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 2} nP(XY = n)$ converge et sa somme vaut $2 + 1 = 3$. Autrement dit, XY admet une espérance et $E(XY) = 3$.

- (e) D'après la formule de König-Huygens,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 3 - 2 \times 2 = -1$$

Dès lors,

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = 2 + 2 + 2 \times (-1) = 2$$

4. (a) X et Y peuvent prendre toutes les valeurs entières non nulles. Par ailleurs, X et Y ne peuvent valoir 1 simultanément 1. Ainsi, $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 3; +\infty \llbracket$. De plus, pour tout $k \in \llbracket 3; +\infty \llbracket$,

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= P([X = 1] \cap [Y = k - 1]) + P([X = k - 1] \cap [Y = 1]) = P(X = k - 1) + P(Y = k - 1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \end{aligned}$$

- (b) On vient de déterminer la loi de $X + Y$.

$$(X + Y)(\Omega) = \llbracket 3; +\infty \llbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, P(X + Y = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$$

La loi de XY a été déterminée à la question 3(c). On sait que $(XY)(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \llbracket$. Donc, $(XY + 1)(\Omega) = \llbracket 3; +\infty \llbracket$. Par ailleurs, pour tout $k \in \llbracket 3; +\infty \llbracket$,

$$P(XY + 1 = k) = P(XY = k - 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(k-1)-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$$

Ainsi, $X + Y$ et $XY + 1$ sont bien de même loi.

5. Le script suivant convient :

```

1. import numpy.random as rd
2. x=1
3. y=1
4. lancer=rd.binomial(1,1/2)
5. if lancer==1:
6.     while lancer==1:
7.         lancer=rd.binomial(1,1/2)
8.         y=y+1
9. else:
10.    while lancer==0:
11.        lancer=rd.binomial(1,1/2)
12.        x=x+1
13. print(x)
14. print(y)

```

Exercice 3 (ESCP 2020) –

1. (a) La probabilité $P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = i)$ correspond à la probabilité que le mobile se trouve à l'abscisse i à l'instant i , **sachant** qu'il se trouvait à l'abscisse $i-1$ à l'instant $i-1$. Or, on sait d'après l'énoncé, que si le mobile se trouve à une abscisse $i-1$ à un instant donné, alors il se trouvera à l'abscisse i à l'instant suivant avec une probabilité $\frac{i}{i+1}$. Ainsi, on a bien :

$$P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = i) = \frac{i}{i+1}$$

De même, la probabilité $P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = 0)$ correspond à la probabilité que le mobile se trouve à l'abscisse 0 à l'instant i **sachant** qu'il se trouvait à l'abscisse $i-1$ à l'instant $i-1$. Or, on sait d'après l'énoncé, que si le mobile se trouve à une abscisse $i-1$ à un instant donné, alors il se trouvera à l'abscisse 0 à l'instant suivant avec une probabilité $\frac{1}{i+1}$. Ainsi, on a bien :

$$P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = 0) = \frac{1}{i+1}$$

- (b) Le mobile se trouve pour la première fois à l'origine à l'instant k , si et seulement si, il se trouvait aux abscisses 1, 2, ..., $k-1$ aux instants 1, 2, ..., $k-1$ **et** qu'il retourne à l'origine à l'instant k . Autrement dit,

$$[U = k] = [A_1 = 1] \cap [A_2 = 2] \cap \cdots \cap [A_{k-1} = k-1] \cap [A_k = 0]$$

- (c) D'après la formule des probabilités composées, et en utilisant les deux questions précédentes,

$$\begin{aligned}
 P(U = k) &= P([A_1 = 1] \cap [A_2 = 2] \cap \cdots \cap [A_{k-1} = k-1] \cap [A_k = 0]) \\
 &= P(A_1 = 1) \times P_{A_1=1}(A_2 = 2) \times P_{[A_1=1] \cap [A_2=2]}(A_3 = 3) \times \cdots \times P_{[A_1=1] \cap \cdots \cap [A_{k-1}=k-1]}(A_k = 0) \\
 &= P(A_1 = 1) \times P_{A_1=1}(A_2 = 2) \times P_{(A_2=2)}(A_3 = 3) \times \cdots \times P_{(A_{k-1}=k-1)}(A_k = 0) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1} \\
 &= \frac{1}{k(k+1)}
 \end{aligned}$$

(d) Tout d'abord,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

Pour calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} P(U = k)$, on commence par calculer la somme partielle. En utilisant la question précédente, puis en reconnaissant une somme télescopique, on peut écrire :

$$\sum_{k=1}^n P(U = k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Puis, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$. Donc, la série converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} P(U = k) = 1$.

(e) On a alors

$$P(U = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(U = k) = 1 - 1 = 0$$

2. L'évènement contraire de $[U > n]$ est $[U \leq n]$. Donc, $P(U > n) = 1 - P(U \leq n)$. Or, en utilisant les résultats de la question 3(d), on a :

$$P(U \leq n) = \sum_{k=1}^n P(U = k) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Dès lors, on a

$$P(U > n) = 1 - P(U \leq n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

3. Le script suivant convient :

```
1. import numpy.random as rd
2. k=1
3. hasard=rd.randint(1,k+2)
4. while hasard>1
5.     k=k+1
6.     hasard=rd.randint(1,k+2)
7. print(k)
```

Exercice 4 (ESCP 2014) – 1. (a) La fonction g est constituée de deux termes :

- le terme $(1+t)\ln(1+t)$ qui est de la forme $u \times v$ et que l'on dérive donc comme un produit : $(uv)' = u'v + uv'$;
- le terme $-t$ dont la dérivée vaut -1 .

Posons $u(t) = 1+t$ et $v(t) = \ln(1+t)$. On a $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{1}{1+t}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(t) &= u'(t)v(t) + u(t)v'(t) - 1 \\ &= 1 \times \ln(1+t) + (1+t) \times \frac{1}{1+t} - 1 \\ &= \ln(1+t) + 1 - 1 \\ &= \ln(1+t) \end{aligned}$$

(b) Par définition de (u_n) , on a

$$u_1 = \int_0^1 (\ln(1+t))^1 dt = \int_0^1 \ln(1+t) dt$$

Il nous faut donc désormais trouver une primitive de $\ln(1+t)$. Or, on vient de voir que $g'(t) = \ln(1+t)$.

Donc, g est une primitive de $\ln(1+t)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \ln(1+t) dt \\ &= [(1+t)\ln(1+t) - t]_0^1 \\ &= 2\ln(2) - 1 - (1\ln(1) - 0) \\ &= 2\ln(2) - 1 \end{aligned}$$

2. (a) On a

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}$$

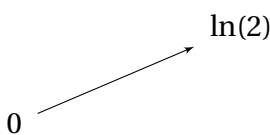
Posons ensuite $u(t) = 1+t$. On a $u'(t) = 1$. Donc,

$$f''(t) = \frac{-u'(t)}{u(t)^2} = \frac{-1}{(1+t)^2}$$

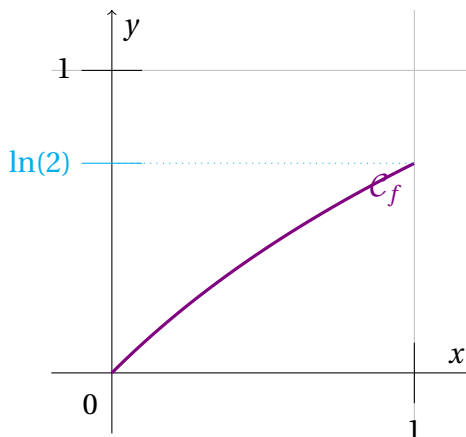
(b) Pour tout $t \in [0; 1]$, on a $1+t \geq 0$. Donc, pour tout $t \in [0; 1]$, $f'(t) \geq 0$. Donc, f est croissante sur $[0; 1]$. Par ailleurs,

$$f(0) = \ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = \ln(2)$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

t	0	1
Variations de f		

On obtient donc l'allure de courbe suivante :



(c) On a vu que $f''(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}$. Donc, $f''(t) \leq 0$. Donc, f est concave.

3. (a) La fonction f étant croissante sur $[0; 1]$, on a pour tout $t \in [0; 1]$,

$$f(0) \leq f(t) \leq f(1)$$

C'est-à-dire,

$$0 \leq \ln(1+t) \leq \ln(2)$$

- (b) En élevant l'inégalité précédente à la puissance n , on obtient

$$0^n \leq (\ln(1+t))^n \leq (\ln(2))^n$$

Puis par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 0^n dt \leq \int_0^1 \ln(1+t)^n dt \leq (\ln(2))^n$$

C'est-à-dire,

$$0 \leq u_n \leq (\ln(2))^n$$

- (c) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2)^n = 0$ car $\ln(2) \simeq 0,7 \in]-1; 1[$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

4. (a) En utilisant la relation donnée dans l'énoncé, on obtient

$$(n+1)u_n = 2\ln(2)^{n+1} - u_{n+1}$$

Or, $u_{n+1} \geq 0$ d'après la question 3(b), donc

$$(n+1)u_n \leq 2\ln(2)^{n+1}$$

- (b) Pour montrer que (u_n) est décroissante, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} dt - \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt \\ &= \int_0^1 \ln(1+t)^{n+1} - \ln(1+t)^n dt \\ &= \int_0^1 \ln(1+t)^n (\ln(1+t) - 1) dt \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [0; 1]$, on a

$$0 \leq \ln(1+t) \leq \ln(2) \leq 1$$

Ainsi,

$$\ln(1+t)^n \geq 0 \quad \text{et} \quad \ln(1+t) - 1 \leq 0$$

Et donc, par croissance de l'intégrale,

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Donc, (u_n) est bien décroissante.

- (c) En utilisant la relation de la question 4(a) ainsi que la décroissance de la suite (u_n) , on a :

$$2\ln(2)^{n+1} = u_{n+1} + (n+1)u_n \leq u_n + (n+1)u_n = (n+2)u_n$$

Autrement dit, on a bien

$$(n+2)u_n \geq 2\ln(2)^{n+1}$$

(d) On a vu que

$$(n+1)u_n \leq 2\ln(2)^{n+1}$$

Donc,

$$nu_n + u_n \leq 2\ln(2)^{n+1}$$

Donc,

$$nu_n \leq 2\ln(2)^{n+1} - u_n \leq 2\ln(2)^{n+1} \quad \text{car } u_n \geq 0$$

Et donc,

$$\frac{nu_n}{\ln(2)^{n+1}} \leq 1$$

Par ailleurs,

$$(n+2)u_n \geq 2\ln(2)^{n+1}$$

Donc,

$$\frac{nu_n}{2\ln(2)^{n+1}} \geq \frac{n}{n+2}$$

Bref, on a

$$\frac{n}{n+2} \leq \frac{nu_n}{2\ln(2)^{n+1}} \leq 1$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$. Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} = 1$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nu_n}{2\ln(2)^{n+1}} = 1$$