CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ 1

Exercice 1 – 1. On a $3x-2=-3x+4 \iff 6x=6 \iff x=\dfrac{6}{6}=1$. Donc, $\mathcal{S}=\{1\}$.

2. On a $2x(x-2)\leqslant 2x^2+4x-5 \iff 2x^2-4x\leqslant 2x^2+4x-5 \iff -8x\leqslant -5 \iff x\geqslant \dfrac{5}{8}$. Donc, $\mathcal{S}=[\dfrac{5}{8};+\infty[$.
3. Calculons le discriminant : $\Delta=64-60=4$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1=\frac{8-2}{2}=3 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{8+2}{2}=5$$

Donc, $\mathcal{S}=\{3;5\}$.

4. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x}<\frac{1}{x+7} &\iff \frac{1}{x-2}+\frac{3}{x}-\frac{1}{x+7}<0\\
&\iff \frac{x(x+7)}{(x-2)x(x+7)}+\frac{3(x-2)(x+7)}{(x-2)x(x+7)}-\frac{(x-2)x}{(x-2)x(x+7)}<0\\
&\iff \frac{x^2+7x+3x^2+21x-6x-42-x^2+2x}{(x-2)x(x+7)}<0\\
&\iff \frac{3x^2+24x-42}{(x-2)x(x+7)}<0\\
&\iff \frac{3(x^2+8x-14)}{(x-2)x(x+7)}<0
\end{aligned}$$

Calculons le discriminant de $x^2+8x-14$: $\Delta=64+56=120$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1=\frac{-8-\sqrt{120}}{2}=-4-\sqrt{30}\simeq -9 \qquad \text{et} \qquad x_2=-4+\sqrt{30}\simeq 1$$

Par ailleurs, on a $x-2=0 \iff x=0$ et $x+7=0 \iff x=-7$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		-7		0		x_2		2		$+\infty$
$x^2+8x-14$		+	0	−		−		−	0	+		+	
$x-2$		−		−		−		−		−	0	+	
x		−		−		−	0	+		+		+	
$x+7$		−		−	0	+		+		+		+	
$\dfrac{3(x^2+8x-14)}{(x-2)x(x+7)}$		−	0	+	‖	−	‖	+	0	−	‖	+	

Ainsi, $\mathcal{S}=]-\infty;x_1[\cup]-7;0[\cup]x_2;2[$.

5. On commence par chercher une racine évidente : $(-1)^3+3(-1)^2-6(-1)-8=-1+3+6-8=0$. On effectue donc la division euclidienne par $x+1$:

$$\begin{array}{rcrcrcr|l}
x^3 & + & 3x^2 & - & 6x & - & 8 & x+1 \\ \cline{8-8}
x^3 & + & x^2 & & & & & x^2+2x-8 \\ \cline{1-7}
 & & 2x^2 & - & 6x & - & 8 & \\
 & & 2x^2 & + & 2x & & & \\ \cline{3-7}
 & & & & -8x & - & 8 & \\
 & & & & -8x & - & 8 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

On calcule maintenant le discriminant de x^2+2x-8 : $\Delta=4+32=36$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1=\frac{-2-6}{2}=-4 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-2+6}{2}=2$$

Ainsi, $\mathcal{S}=\{-1;-4;2\}$.

6. Calculons le discriminant : $\Delta=49-48=1$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1=\frac{7-1}{2}=3 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{7+1}{2}=4$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2-7x+12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc, $\mathcal{S}=[3;4]$.

7. Calculons le dsicriminant de $-x^2+6x-8$: $\Delta=36-32=4$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1=\frac{-6-2}{-2}=4 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-6+2}{-2}=2$$

Par ailleurs, $-x+3=0 \iff x=3$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$-x^2+6x-8$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{-x^2+6x-8}{-x+3}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\mathcal{S}=[2;3[\cup[4;+\infty[$.

8. On a :

$$\begin{aligned} 4(x-2)-3(6-2(3-4x))+3(7-2x)=0 &\iff 4x-8-18+18-24x+21-6x=0 \\ &\iff 26x=13 \\ &\iff x=\frac{13}{26}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S}=\{\frac{13}{22}\}$.

Exercice 2 – Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ »

Initialisation $(n=0)$:

$u_0=\frac{2}{3}$ et $0 \leqslant \frac{2}{3} \leqslant 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

Donc,

$$\frac{1}{4}\times 0+\frac{3}{4} \leqslant \frac{1}{4}u_n+\frac{3}{4} \leqslant \frac{1}{4}\times 1+\frac{3}{4}$$

C'est-à-dire,

$$\frac{1}{4} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

Puisque $\frac{1}{4} \geqslant 0$, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

Exercice 3 – Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $u_n=\sqrt{1+n}$ »

Initialisation $(n=0)$:

$u_0=1$ et $\sqrt{1+0}=1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que

$$u_n=\sqrt{1+n}$$

Donc,

$$u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}=\sqrt{1+\sqrt{1+n}^2}=\sqrt{1+1+n}=\sqrt{2+n}$$

Donc, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n=\sqrt{1+n}$$

Exercice 4 – Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $\sum_{k=0}^{n} 3^k=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$ »

Initialisation $(n=0)$:

$\sum_{k=0}^{0} 3^k = 3^0 = 1$ et $\frac{1}{2}(3^{0+1}-1) = \frac{1}{2}\times(3-1) = \frac{1}{2}\times 2 = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on sait que

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$$

Donc,

$$\sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1} = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1) + 3^{n+1} = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1+2\times 3^{n+1}) = \frac{1}{2}(3^{n+2}-1)$$

Donc, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$$

Exercice 5 –

1. On a $\lim_{x\to 3} x^3+7x+3 = 3^3+7\times 3+3 = 27+21+3 = 51$.
2. On a $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x+1}{3x-2} = \frac{\frac{1}{2}+1}{3\times\frac{1}{2}-2} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$.
3. On a :
$$\left.\begin{array}{rcl}\lim_{x\to 3^-} -2x+1 &=& -5\\ \lim_{x\to 3^-} -2x+6 &=& 0^+\end{array}\right\} \lim_{x\to 3^-} \frac{-2x+1}{-2x+6} = -\infty$$
4. On a :
$$\left.\begin{array}{rcl}\lim_{x\to(-1)^+} -2x+1 &=& 3\\ \lim_{x\to(-1)^+} x(x+1) &=& 0^-\end{array}\right\} \lim_{x\to(-1)^+} \frac{-2x+1}{x(x+1)} = -\infty$$
5. On a :
$$\left.\begin{array}{rcl}\lim_{x\to 1^+} 2 &=& 2\\ \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} &=& +\infty\\ \lim_{x\to 1^+} \frac{3}{2x^2} &=& \frac{3}{2}\end{array}\right\} \lim_{x\to 1^+} 2-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2x^2} = -\infty$$
6. On a $\lim_{x\to-\infty} -x^5+5x^3+4x = \lim_{x\to-\infty} -x^5 = +\infty$.
7. On a $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-2x+1}{-4x^2+2x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{-4x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$.
8. On a :
$$\left.\begin{array}{rcl}\lim_{x\to-\infty} -2x^2+1 &=& \lim_{x\to-\infty} -2x^2 = -\infty\\ \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+1}{x+5} &=& \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to-\infty} (-2x^2+1)\frac{2x^2+1}{x+5} = +\infty$$
9. On a $\lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{x} = 0^+$ donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{x}+9 = 9$ donc $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{-2}{x}+9} = \sqrt{9} = 3$.

10. On a $\lim_{x\to(-1)^+} \frac{-3}{-x-1} = +\infty$ donc $\lim_{x\to(-1)^+} \sqrt{\frac{-3}{-x-1}} = +\infty$ donc $\lim_{x\to(-1)^+} \sqrt{\frac{-3}{-x-1}} - 5 = +\infty$ et donc

$$\lim_{x\to(-1)^+} \left(\sqrt{\frac{-3}{-x-1}} - 5\right)^2 = +\infty$$

Exercice 6 – 1. Chaque année, le nombre d'inscrit augmente de 15% et est donc multiplié par $1,15$. Par ailleurs, on a 90 désinscriptions, il faut donc soustraire 90 au nombre d'inscrits. Ainsi, on a bien :

$$u_{n+1} = 1,15u_n - 90$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 600 \\ &= 1,15u_n - 90 - 600 \\ &= 1,15(v_n + 600) - 90 - 600 \\ &= 1,15v_n + 690 - 90 - 600 \\ &= 1,15v_n \end{aligned}$$

Donc, la suite (v_n) est géométrique de raison $1,15$. Son premier terme est donné par :

$$v_0 = u_0 - 600 = 800 - 600 = 200$$

(b) Puisque (v_n) est géométrique, on a pour tout n,

$$v_n = v_0 \times q^n = 200 \times 1,15^n$$

(c) On a $u_n = v_n + 600$ donc

$$v_n = 200 \times (1,15)^n + 600$$

Exercice 7 – 1. On a :

$$f(-1) = \frac{0,5(-1)^2 - (-1) - 1}{-1+2} = \frac{0,5+1-1}{1} = 0,5$$

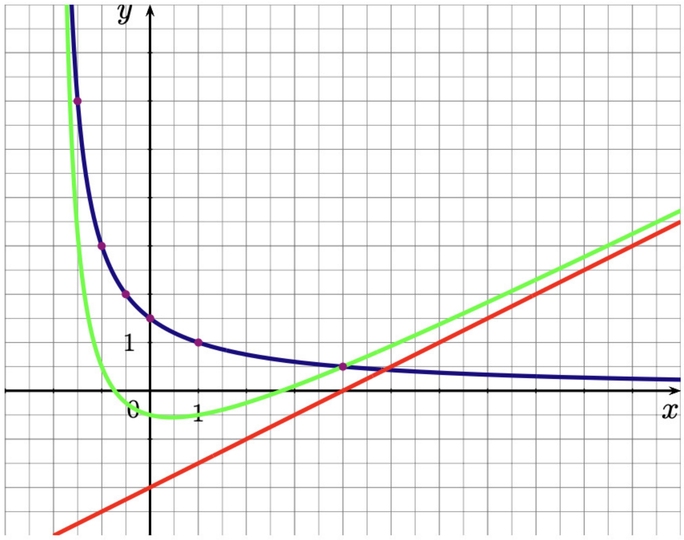
$$f(4) = \frac{0,5 \times 4^2 - 4 - 1}{4+2} = \frac{8-4-1}{6} = 0,5$$

$$f(8) = \frac{0,5 \times 8^2 - 8 - 1}{8+2} = \frac{32-8-1}{10} = \frac{23}{10} = 2,3$$

2. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2} &\iff \frac{0,5x^2 - x - 1}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2} \\ &\iff \frac{0,5x^2 - x - 1}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)}{x+2} + \frac{c}{x+2} \\ &\iff \frac{0,5x^2 - x - 1}{x+2} = \frac{ax^2 + 2ax + bx + 2b + c}{x+2} \\ &\iff \frac{0,5x^2 - x - 1}{x+2} = \frac{ax^2 + (2a+b)x + 2b + c}{x+2} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0,5 &=& a \\ -1 &=& 2a+b \\ -1 &=& 2b+c \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0,5 &=& a \\ -2 &=& b \\ 3 &=& c \end{array} \right. \end{aligned}$$

3. (b) On trace en rouge la courbe représentative de la fonction u et en vert celle de la fonction $u+v$:



(c) On a vu à la question **2** que $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+2}$ avec $a = 0,5$, $b = -2$ et $c = 3$. Autrement dit, on a bien $f(x) = u(x)+v(x)$.

4. Graphiquement, on obtient le tableau des variations suivant :

x	-2	0.5	$+\infty$
Variations de f	$\Vert$ $+\infty$ ↘	-0.5	↗ $+\infty$

Exercice 8 – Pour tout $k \in [\![1;3]\!]$, on note :

- B_k l'évènement « la k-ième boule tirée est blanche »
- N_k l'évènement « la k-ième boule tirée est noire »
- R_k l'évènement « la k-ième boule tirée est rouge »

1. (a) Calculons la probabilité d'obtenir trois boules blanches. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{5}{110}$$

De même, la probabilité d'obtenir trois boules noires est :

$$P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} = \frac{2}{110}$$

Et la probabilité d'obtenir trois boules rouges est :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{220}$$

Et donc, la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur vaut :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{5}{110} + \frac{2}{110} + \frac{1}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

(b) Pour avoir une boule de chaque couleur, il faut avoir obtenu l'un des six tirages suivants : $B_1 \cap N_2 \cap R_3$, $B_1 \cap R_2 \cap N_3$, $N_1 \cap B_2 \cap R_3$, $N_1 \cap R_2 \cap B_3$, $R_1 \cap B_2 \cap N_3$ ou $R_1 \cap N_2 \cap B_3$. On calcule donc la probabilité de chacun de ces tirages en utilisant la formule des probabilités composées. Chacun de ces tirages a la même probabilité de survenir, à savoir :

$$\frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{5}{110}$$

La probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur :

$$6 \times \frac{5}{110} = \frac{30}{110} = \frac{3}{11}$$

2. (a) Les tirages s'effectuant avec remise, les évènements B_k ($k \in [\![1;3]\!]$) sont indépendants, donc :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \left(\frac{5}{12}\right)^3$$

De même,

$$P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \left(\frac{4}{12}\right)^3$$

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \left(\frac{3}{12}\right)^3$$

La probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur est donc

$$\frac{5^3 + 4^3 + 3^3}{12^3} = \frac{125 + 64 + 27}{1728} = \frac{216}{1728} = \frac{1}{8}$$

(b) Pour avoir une boule de chaque couleur, il faut avoir obtenu l'un des six tirages suivants : $B_1 \cap N_2 \cap R_3$, $B_1 \cap R_2 \cap N_3$, $N_1 \cap B_2 \cap R_3$, $N_1 \cap R_2 \cap B_3$, $R_1 \cap B_2 \cap N_3$ ou $R_1 \cap N_2 \cap B_3$. Chacun de ces tirages a la même probabilité de survenir, à savoir :

$$\frac{5}{12} \times \frac{4}{12} \times \frac{3}{12} = \frac{5}{144}$$

La probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur :

$$6 \times \frac{5}{144} = \frac{30}{144} = \frac{5}{24}$$

Exercice 9 – 1. On a $p_1 = 0$ puisque l'élève n'est pas malade la première semaine. Par ailleurs, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_2 = P(E_2) &= P(E_1) \times P_{E_1}(E_2) + P(\overline{E_1}) \times P_{\overline{E_1}}(E_2) \\ &= 0 \times 0,24 + 1 \times 0,04 \\ &= 0,04 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} p_3 = P(E_3) &= P(E_2) \times P_{E_2}(E_3) + P(\overline{E_2}) \times P_{\overline{E_2}}(E_3) \\ &= 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 \\ &= 0,0096 + 0,0384 \\ &= 0,048 \end{aligned}$$

2. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{E_3}(E_2) = \frac{P(E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{P(E_2) \times P_{E_2}(E_3)}{P(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{0,0096}{0,048} = 0,2$$

3. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(E_{n+1}) &= P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P(\overline{E_n}) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \\ &= p_n \times 0,24 + (1 - p_n) \times 0,04 \\ &= 0,24p_n + 0,04 - 0,04p_n \\ &= 0,2p_n + 0,04 \end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,05 \\ &= 0,2p_n + 0,04 - 0,05 \\ &= 0,2(u_n + 0,05) + 0,04 - 0,05 \\ &= 0,2u_n + 0,01 + 0,04 - 0,05 \\ &= 0,2u_n \end{aligned}$$

Donc, (u_n) est une suite géométrique de raison $0,2$ et de premier terme :

$$u_1 = p_1 - 0,05 = 0 - 0,05 = -0,05$$