Exercice 1

1. On a :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{8}{12} - \frac{6}{12} + \frac{9}{12} \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \left(2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{7}{4} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{7}{12} \\ &= \frac{8}{12} - \frac{7}{12} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} C &= \frac{1 + \frac{5}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} \\ &= \frac{\frac{11}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \frac{7}{12}} \\ &= \frac{\frac{11}{6}}{\frac{12}{60} - \frac{70}{60}} \\ &= \frac{11}{6} \times \frac{-60}{58} \\ &= -\frac{110}{58} \\ &= -\frac{55}{29} \end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}D &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\div\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{6}\times\frac{1}{20}\div\frac{9}{4}\\ &= \frac{1}{120}\times\frac{4}{9}\\ &= \frac{1}{270}\end{aligned}$$

Exercice 2

1. On a $2x-3=4 \iff 2x=7 \iff x=\dfrac{7}{2}$ donc $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$.
2. On a $x-\frac{1}{2}=2x-1 \iff -x=-\frac{1}{2} \iff x=\frac{1}{2}$ donc $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
3. On a $2x-4<3x+5 \iff -x<9 \iff x>-9$ donc $\mathcal{S}=]-9;+\infty[$.
4. Commençons par calculer le discriminant : $\Delta=144-108=36$. Il y a donc deux racines qui sont :
$$x_1=\frac{12-6}{2}=3 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{12+6}{2}=9$$
Donc, $\mathcal{S}=\{3;9\}$.
5. Commençons par calculer le discriminant : $\Delta=9+40=49$. Il y a donc deux racines qui sont :
$$x_1=\frac{-3-7}{-2}=5 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-3+7}{-2}=-2$$
On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
Signe de $-x^2+3x+10$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\mathcal{S}=]-\infty;-2[\cup]5;+\infty[$.
6. On a $x(x-2)=-1 \iff x^2-2x+1=0$. Le discriminant vaut : $\Delta=4-4=0$. Il y a donc une seule racine :
$$x_0=\frac{2}{2}=1$$
Ainsi, $\mathcal{S}=\{1\}\,1$.
7. On a :
$$\begin{aligned}\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x+1} &\iff \frac{2}{x+3}-\frac{1}{x+1}=0\\ &\iff \frac{2(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+3)}=0\\ &\iff \frac{2x+2-x-3}{(x+1)(x+3)}=0\\ &\iff \frac{x-1}{(x+1)(x+3)}=0\end{aligned}$$

On a $(x+1)(x+3) = 0 \iff x+1 = 0$ ou $x+3 = 0 \iff x = -1$ ou $x = -3$ donc les valeurs interdites sont $x = -1$ et $x = -3$.
Par ailleurs, $x - 1 = 0 \iff x = 1$. Cette valeur ne fait pas parti des valeurs interdites donc $\mathcal{S} = \{1\}$.

8. On a $x - 3 = 0 \iff x = 3$ donc il y a une valeur interdite qui est $x = 3$. Par ailleurs, le discriminant de $x^2 - 5x + 6$ vaut : $\Delta = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

Au final, on a donc $\mathcal{S} = \{2\}$.

9. On a :

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} \leq \frac{2}{2x-3} &\iff \frac{x}{x+1} - \frac{2}{2x-3} \leq 0 \\ &\iff \frac{x(2x-3) - 2(x+1)}{(x+1)(2x-3)} \leq 0 \\ &\iff \frac{2x^2 - 3x - 2x - 2}{(x+1)(2x-3)} \leq 0 \\ &\iff \frac{2x^2 - 5x - 2}{(x+1)(2x-3)} \leq 0 \end{aligned}$$

Calculons le discriminant de $2x^2 - 2x - 5$: $\Delta = 25 + 16 = 41$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{41}}{4} \simeq -0,3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5 + \sqrt{41}}{4} \simeq 2,8$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		x_1		$\frac{3}{2}$		x_2		$+\infty$
$2x^2 - 2x - 5$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$2x - 3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{2x^2 - 5x - 2}{(x+1)(2x-3)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc, $\mathcal{S} =]-1; x_1] \cup]\frac{3}{2}; x_2]$.

10. On a $(-1)^3 - 9 \times (-1)^2 + 11 \times (-1) + 21 = -1 - 9 - 11 + 21 = 0$. On effectue donc la division euclidienne

de $x^3 - 9x^2 + 11x + 21$ par $x + 1$:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^3 & - & 9x^2 & + & 11x & + & 21 & x+1 \\ \cline{8-8}
x^3 & + & x^2 & & & & & x^2-10x+1 \\ \cline{1-7}
 & - & 10x^2 & + & 11x & + & 21 & \\
 & - & 10x^2 & - & 10x & & & \\ \cline{2-7}
 & & & & 21x & + & 21 & \\
 & & & & 21x & + & 21 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Conclusion : $\boxed{P(x) = (x+1)(x^2 - 10x + 21)}$ On calcule le discriminant de $x^2 - 10x + 21$: $\Delta = 100 - 84 = 16$. Il y a donc deux racines, qui sont :

$$x_1 = \frac{10-4}{2} = 3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{10+4}{2} = 7$$

Au final, on a donc $\mathcal{S} = \{-1; 3; 7\}$.

Exercice 3

1. La fonction a est un polynôme donc $\mathcal{D}_a = \mathbb{R}$.
2. La fonction b est une fraction rationnelle donc $\mathcal{D}_b = \mathbb{R} \setminus V.I.$ La valeur interdite est donnée par la solution de $4x - 1 = 0 \iff 4x = 1 \iff x = \frac{1}{4}$. Ainsi, $\mathcal{D}_b = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$.
3. La fonction c est une fraction rationnelle donc $\mathcal{D}_b = \mathbb{R} \setminus V.I.$ Les valeur interdite sont données par les solutions de $x^2 - 5x + 6 = 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines qui sont :
$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$
Ainsi, $\mathcal{D}_c = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$.
4. d est de la forme $\sqrt{f}$ avec $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Il nous faut donc résoudre $x^2 - 2x - 3 \geq 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = 4 + 12 = 16$. Il y a donc deux racines, qui sont :
$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$
On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de $x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et donc, $\mathcal{D}_d =]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$.
5. e est la forme $f + g$ avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = 4x - 5$. On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ donc, $\mathcal{D}_e\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$.
6. f est de la forme $\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{2x-1}{-x+3}$. Il nous faut donc résoudre $\dfrac{2x-1}{-x+3} \geq 0$. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\dfrac{2x-1}{-x+3}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Et donc $\mathcal{D}_f = [\frac{1}{2};3[$.

Exercice 4

1. La fonction f est une fraction rationnelle donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus V.I.$ On a par ailleurs, $2x-3=0 \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$.
La fonction g est un polynôme donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.
2. On a $f(-x) = \dfrac{1}{-2x-3}$ donc f n'est ni paire, ni impaire.
Par ailleurs, $g(-x) = 2(-x)^2+3 = 2x^2+3 = g(x)$ donc g est paire.

3. On a :
$$f\circ f(x) = f\left(\frac{1}{2x-3}\right) = \frac{1}{2\times\dfrac{1}{2x-3}-3} = \frac{1}{\dfrac{2}{2x-3}-\dfrac{3(2x-3)}{2x-3}} = \frac{1}{\dfrac{2-6x+9}{2x-3}} = \frac{2x-3}{-6x+11}$$
$f\circ f$ est une fraction rationnelle donc $\mathcal{D}_{f\circ f} = \mathbb{R}\setminus V.I.$ Il n'y a qu'une valeur interdite : $x = \frac{11}{6}$. Donc, $\mathcal{D}_{f\circ f} = \mathbb{R}\setminus\{\frac{11}{6}\}$.
On a :
$$f\circ g(x) = f\left(2x^2+3\right) = \frac{1}{2(2x^2+3)-3} = \frac{1}{4x^2+3}$$
$f\circ g$ est une fraction rationnelle, n'ayant pas de valeur interdite (il est clair que $4x^2+3\neq 0$ pour tout x), donc $\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathbb{R}$.
On a :
$$g\circ g(x) = g(2^2+3) = 2(2x^2+3)^2+3 = 2(4x^4+12x^2+9)+3 = 8x^4+24x^2+18+3 = 8x^4+24x^2+21$$
$g\circ g$ est un polynôme donc $\mathcal{D}_{g\circ g} = \mathbb{R}$.
On a :
$$\begin{aligned} g\circ f(x) = g\left(\frac{1}{2x-3}\right) = 2\left(\frac{1}{2x-3}\right)^3 + 3 = \frac{2}{(2x-3)^2}+3 \\ = \frac{2+3(2x-3)^2}{(2x-3)^2} = \frac{2+3(4x^2-12x+9)}{(2x-3)^2} = \frac{12x^2-36x+29}{(2x-3)^2}\end{aligned}$$
$g\circ f$ est une fraction rationnelle ayant pour unique valeur interdite $x=\frac{3}{2}$ donc $\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Exercice 5

1. Par lecture graphique, le tableau de variations de la fonction f est donné par :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Par lecture graphique, le tableau de signe de la fonction g est donné par :

x	$-\infty$		-4		6		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. (a) On a pour tout x :

$$\begin{aligned}\frac{(x+4)(x-2)^2}{16} &= \frac{(x+4)(x^2-4x+4)}{16}\\ &= \frac{x^3-4x^2+4x+4x^2-16x+16}{16}\\ &= \frac{x^3-12x+16}{16}\\ &= \frac{x^3}{16}-\frac{3}{4}x+1\\ &= f(x)\end{aligned}$$

(b) Un carré étant toujours positif, et puisque 16 est un nombre strictement positif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

3. On commence par calculer le discriminant : $\Delta = \dfrac{1}{16}+\dfrac{12}{8}=\dfrac{25}{16}>0$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}}{-\frac{2}{8}} = \frac{6}{4}\times\frac{8}{2} = 6 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}}{-\frac{2}{8}} = -4$$

D'après le cours, on a donc :

$$g(x) = -\frac{1}{8}\times(x+4)(x-6) = \frac{-(x+4)(x-6)}{8}$$

4. (a) Pour tout réel x et en utilisant les questions **2.(a)** et **3**, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= \frac{(x+4)(x-2)^2}{16} - \frac{-(x+4)(x-6)}{8} \\
&= \frac{(x+4)(x-2)^2 + 2(x+4)(x-6)}{16} \\
&= \frac{(x+4)((x-2)^2 + 2x - 12)}{16} \\
&= \frac{(x+4)(x^2 - 4x + 4 + 2x - 12)}{16} \\
&= \frac{(x+4)(x^2 - 2x - 8)}{16}
\end{aligned}$$

(b) On a $f(x) \leq g(x) \iff f(x) - g(x) \leq 0$. Il nous faut donc étudier le signe de $f(x) - g(x)$. On utilise l'expression établie à la question précédente. Le discriminant de $x^2 - 2x - 8$ vaut $\Delta = 4 + 32 = 36$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{2-6}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2+6}{2} = 4$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-4		-2		4		$+\infty$
$x+4$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2 - 2x - 8$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, la solution de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est $]-\infty; -4] \cup [-2; 4]$.

5. Le tableau de signe de f obtenu à la question **2.(a)** est bien cohérent avec le graphique fourni.
Par ailleurs, d'après la question **4.(b)**, on a $\mathcal{C}_f$ qui est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty; -4] \cup [-2; 4]$ et au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[-4; -2] \cup [4; +\infty[$. Ceci est également cohérent avec le graphique fourni.

Exercice 6

1. (a) $f(0) = -6$
   (b) $f(3) = 0$
   (c) les antécédents de -4 par f sont -1 et 2
   (d) l'antécédent de 10 par f est $4,5$
   (e) les antécédents de -6 par f sont 0 et 1
   (f) l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 5 est 14
   (g) les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont $-2,5$ et $3,5$

2. On a :
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-6=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-6=\frac{1}{4}-\frac{2}{4}-\frac{24}{4}=-\frac{25}{4}=-6,25$$
3. On a pour tout x :
$$(x-3)(x+2)=x^2-3x+2x-6=x^2-x-6=f(x)$$
4. On a $(x-3)(x+2)=0 \iff x-3=0$ ou $x+2=0 \iff x=3$ ou $x=-2$. On retrouve donc bien le fait que les antécdents de 0 par f sont -2 et 3.

Exercice 7

1. FAUX f est décroissante sur $[-1;-3]$
2. FAUX f est décroissante sur $[4;9]$
3. VRAI
4. VRAI
5. FAUX puisque le minimum de f est -3
6. VRAI
7. VRAI

Exercice 8

1. On a $u_0=\dfrac{3\times 0+4}{0+1}=\dfrac{4}{1}=4$.
   De même, $u_1=\dfrac{3+4}{1+1}=\dfrac{7}{2}$.
   $u_2=\dfrac{6+4}{2+1}=\dfrac{10}{3}$
   Et $u_3=\dfrac{9+4}{3+1}=\dfrac{13}{4}$
2. On a :
$$u_{n-1}=\frac{3(n-1)+4}{n-1+1}=\frac{3n-3+4}{n}=\frac{3n+1}{n}$$
$$u_n-1=\frac{3n+4}{n+1}-1=\frac{3n+4}{n+1}-\frac{n+1}{n+1}=\frac{2n+3}{n+1}$$
$$u_{n+2}=\frac{3(n+2)+4}{n+2+1}=\frac{3n+6+4}{n+3}=\frac{3n+10}{n+3}$$
$$u_n+2=\frac{3n+4}{n+1}+2=\frac{3n+4}{n+1}+\frac{2(n+1)}{n+1}=\frac{3n+4+2n+2}{n+1}=\frac{5n+6}{n+1}$$
$$u_{2n-1}=\frac{3(2n-1)+4}{2n-1+1}=\frac{6n-3+4}{2n}=\frac{6n+1}{2n}$$
$$2u_n-1=2\frac{3n+4}{n+1}-1=\frac{6n+8}{n+1}-\frac{n+1}{n+1}=\frac{5n+7}{n+1}$$
$$u_{2n}-1=\frac{3\times 2n+4}{2n+1}-1=\frac{6n+4}{2n+1}-\frac{2n+1}{2n+1}=\frac{4n+3}{2n+1}$$
3. On a :
$$u_{n+1}=\frac{3(n+1)+4}{n+1+1}=\frac{3n+3+4}{n+2}=\frac{3n+7}{n+2}$$

Exercice 9

1. On a $u_1 = 0,65u_0+861 = 0,65\times1760+861 = 2005$ et $u_2 = 0,65u_1+861 = 0,65\times2005+861 = 2164,25$.
2. La suite (u_n) n'est pas géométrique puisque $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$.
3. (a) On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2460 \\ &= 0,65u_n + 861 - 2460 \\ &= 0,65(v_n + 2460) + 861 - 2460 \\ &= 0,65v_n + 1599 + 861 - 2460 \\ &= 0,65v_n \end{aligned}$$

Donc, (v_n) est une suite géométrique de raison $0,65$. Son premier terme est donné par :

$$v_0 = u_0 - 2460 = 1760 - 2460 = -700$$

(b) Puisque (v_n) est géométrique, on a :

$$v_n = v_0 \times q^n = -700 \times 0,65^n$$

Et donc,

$$u_n = 2460 + v_n = 2460 - 700 \times 0,65^n$$

Exercice 10

1. (a) On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{4} \frac{3}{(1+k)^2} &= \frac{3}{(1+0)^2} + \frac{3}{(1+1)^2} + \frac{3}{(1+2)^2} + \frac{3}{(1+3)^2} + \frac{3}{(1+4)^2} \\ &= \frac{3}{1} + \frac{3}{4} + \frac{3}{9} + \frac{3}{16} + \frac{3}{25} \\ &= \frac{10800}{3600} + \frac{2700}{3600} + \frac{1200}{3600} + \frac{675}{3600} + \frac{432}{3600} \\ &= \frac{15807}{3600} = \frac{5269}{1200} \end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} \frac{k}{k^2+1} + \sum_{k=0}^{2}(k+2)^2 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + 4 + 9 + 16 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + 29 \\ &= \frac{5+4+3+290}{10} \\ &= \frac{302}{10} \\ &= \frac{151}{5} \end{aligned}$$

2. (a) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{100}} = \sum_{k=2}^{100} \sqrt{\frac{1}{k}}$

   (b) $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - 98 + 99 = \sum_{k=1}^{99} (-1)^{k+1} \times k$

   (c) $1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{4}{81} + \frac{1}{25} = \sum_{k=2}^{10} \frac{4}{k^2}$